УДК 517.982

©2006р. В.Г. Герасимчук, О.В. Маслюченко

Чернівецький національний університет ім.Ю.Федьковича, Чернівці

НЕПЕРЕРВНІСТЬ KL-ФУНКЦІЙ НА НЕПЕРЕРВНИХ КРИВИХ

Нехай X – берівський простір, Y, Z – метричні простори, $g : X \to Y$ – неперервна функція, $f : X \times Y \to Z$ – квазінеперервна відносно першої змінної і точково ліпшицева відносно другою і така, що функція $h(x) = f(x, g(x))$, $x \in X$, має ніде не щільну множину точок розриву. Тоді множина $D_g(f) = \{x \in X : f$ – розривна в точці $(x, g(x))\}$ – ніде не щільна.

Let X be a Baire space, Y, Z be a metric space, $g : X \to Y$ be a continuous function and $f : X \times Y \to Z$ be a function which is quasicontinuous with respect to the first variable and pointwise Lipschitz with respect to the second one such that discontinuity pointt set of the function $h(x) = f(x, g(x))$, $x \in X$, is nowhere dense. Then the set $D_g(f) = \{x \in X : f$ – discontinuous at the point $(x, g(x))\}$.

Питання про вивчення множини точок розриву CD-функцій, тобто функцій, які неперервні відносно першої змінної і диференційовні відносно другої, почалося ще з класичної праці К.Беґеля [1], в якій він встановив ніде не щільність множин точок розриву таких функцій. Цей факт показує, що множина точок розриву CD-функції істотно менша за множину точок розриву нарізно неперервної функції, адже (див. наприклад [2,3]) F_σ-множина $E \subseteq \mathbb{R}^n$ буде множиною точок розриву деякої нарізно неперервної функції $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ тоді і тільки тоді коли її проекції паралельно до кожної з координатних осей є множинами першої категорії. Множини точок розриву CD-функцій продовжували досліджуватись у працях [4-7]. Їх остаточна характеризація дана у [7].

Метричним аналогом диференційовності функції є точкова ліпшицевість.

Означення 1.[3] Нехай X і Y – метричні простори. Функція $f : X \to Y$ називається *точково ліпшицевою*, якщо для довільної точки $x_0 \in X$ існує її окіл U і така константа $C = C(x_0) > 0$, що для довільного $x \in U$ виконується нерівність

$$|f(x) - f(x_0)|_Y \le C|x - x_0|_X.$$

Означення 2. Нехай X – топологічний простір, а Y і Z – метричні простори. Функція $f : X \times Y \to Z$ називається *CL-функцією*, якщо f неперервна відносно першої змінної і точково ліпшицева відносно другої.

У [7] доведено, що що множина точок розриву CL-функції є спадково десь вертикально лакунарною. Звідси зокрема випливає і попередній результат з праці [4] про те, що множина точок розриву CL-функції $f : X \times Y \to Z$ ніде не щільна на графіку довільної неперервної функції $g : X \to Y$.

Для переходу від двох до більшого числа змінних часто буває зручною квазінеперервність.

Означення 3. Нехай X та Y топологічні простори. Функція $f : X \to Y$ називається *квазінеперервною*, якщо

$$f^{-1}(G) \subseteq \overline{\mathrm{int} f^{-1}(G)}$$

для довільної відкритої множини $G \subseteq Y$.

Означення 4. Нехай X – топологічний простір, а Y і Z – метричні простори. Функція $f : X \times Y \to Z$ називається

KL-функцією, якщо f квазінеперервна відносно першої змінної і точково ліпшицева відносно другої.

Як відомо, кожна нарізно неперервна функція при певних умовах є квазінеперервною. Таким чином, актуальним є вивчення множини точок розриву KL-функцій.

Нагадаємо поняття *гри Шоке* на топологічному просторі X. В цій грі два гравці α і β по черзі грають відкритими непорожніми множинами U_n і V_n. Починає гру β вибираючи деяку відкриту непорожню множину V_0. За ним α вибирає відкриту непорожню множину $U_1 \subseteq V_0$. Далі знову ходить β вибираючи $V_1 \subseteq U_1$. І так далі. В результаті утворюється послідовність відкритих непорожніх множин U_n і V_n, така, що

$$V_0 \supseteq U_1 \supseteq V_1 \supseteq \cdots \supseteq V_{n-1} \supseteq U_n \supseteq V_n \supseteq \cdots .$$

Якщо виявиться, що

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n \neq \varnothing,$$

то виграє гравець α. Інакше, виграє гравець β. Кажуть, що гравець α (гравець β) *має виграшну стратегію*, якщо існує правило, яке попереднім ходам супротивника ставить у відповідність певну відкриту непорожню множину, таке, що граючи згідно з ним гравець α (гравець β) завжди виграє. Простір X називається *α-сприятливим* (*β-сприятливим*), якщо гравець α (гравець β) має виграшну стратегію у грі Шоке. Якщо ж це не так, то простір X називається *α-несприятливим* (*β-несприятливим*). У [8] доведено, що β-несприятливіть рівносильна беровості.

Множину точок розриву функції $f : X \to Y$ ми позначатимемо $D(f)$.

Теорема. *Нехай X – берівський простір, Y, Z – метричні простори, $g : X \to Y$ – неперервна функція і $f : X \times Y \to Z$ – KL-функція, причому, множина точок розриву функції*

$$h(x) = f(x, g(x)),\ x \in X,$$

ніде не щільна. Тоді множина

$$D_g(f) = \{x \in X : (x, g(x)) \in D(f)\}$$

ніде не щільна в X.

Доведення. Оскільки кожний метричний простір ізометрично вкладається в деякий банаховий простір, то можна вважати, що Z – банаховий простір. Символом $B(p, \varepsilon)$ (відповідно $B[p, \varepsilon]$) позначатимемо (замкнену) ε-кулю з центром в точці p.

Далі будемо міркувати від супротивного. Нехай множина $D_g(f)$ десь щільна. Покладемо

$$X_0 = \mathrm{int}\overline{D_g(f)} \setminus \overline{D(h)}.$$

Оскільки $D(h)$ – ніде не щільна, то X_0 – відкрита і непорожня в X.

Розглянемо функцію $f_0 : X_0 \times Y \to Z$, що діє за правилом

$$f_0(x, y) = f(x, y) - h(x).$$

Оскільки h неперервна на X_0, а f – квазінеперервна відносно першої змінної, то f_0 – KL-функція, адже сума неперервної і квазінеперервної функцій залишається квазінеперервною. Крім того, множина

$$D_g(f_0) = D_g(f_0) \cap X_0$$

щільна в X_0.

Побудуємо тепер деяку стратегію σ для гравця β у грі Шоке. Нехай $V_0 = X_0$ – перший хід β згідно з σ. Припустимо, що α уже здійснив ходи U_i, $i \leq n$. Визначимо відповідь V_n гравця β. Оскільки $D_g(f_0)$ щільна в $X_0 \supseteq U_n$, то існує точка $x_n \in U_n \cap D_g(f_0)$. Нехай

$$\omega_{f_0}(x_n, g(x_n)) > 2\varepsilon_n > 0.$$

Покладемо $W_n = B(g(x_n), \frac{\varepsilon_n}{2n})$. Оскільки g неперервна, то існує відкритий окіл $U_n' \subseteq U_n$ точки x_n, такий, що $g(U_n') \subseteq W_n$. Зрозуміло, що

$$f_0(U_n' \times W_n) \not\subseteq B[0, \varepsilon_n],$$

адже

$$\omega_{f_0}(x_n, g(x_n)) > 2\varepsilon_n.$$

Візьмемо $x'_n \in U'_n$ і $y_n \in W_n$ такі, що

$$\|f(x'_n, y_n)\| > \varepsilon_n.$$

Але f квазінеперервна відносно першої змінної. Тому існує відкрита непорожня множина $V_n \subseteq U'_n$ така, що

$$\|f(x, y_n)\| > \varepsilon_n,$$

для кожного $x \in V_n$. Цю множину V_n і вважатимемо відповіддю гравця β згідно зі стратегією σ на ходи U_i, $i \leq n$, гравця α. Таким чином, стратегія σ цілком визначена.

Простір X є берівським. Тому він є β-несприятливим для гри Шоке (див. наприклад [8]). Отже, β не має виграшної стратегії. Зокрема, стратегія σ не виграшна для β. Значить, α може так вибирати множини U_n, що β, граючи згідно з σ програє. Тобто

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} V_n \neq \varnothing.$$

Візьмемо $x_0 \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} V_n$ і покладемо $y_0 = g(x_0)$. Зафіксуємо $n \in \mathbb{N}$. Оскільки $x_0 \in V_n \subseteq U'_n$, то $y_0 \in g(U'_n) \subseteq W_n$. Але $y_n \in W_n$. Отже,

$$|y_n - y_0|_Y \leq \operatorname{diam}(W_n) \leq \frac{\varepsilon_n}{n}.$$

Зокрема, $y_n \to y_0$. Далі, оскільки $x_0 \in V_n$, то $\|f_0(x_0, y_n)\| > \varepsilon_n$. Але

$$f_0(x_0, y_0) = f(x_0, g(x_0)) - h(x_0) = 0.$$

Тому

$$\|f_0(x_0, y_0) - f_0(x_0, y_n)\| = \|f_0(x_0, y_0)\| >$$

$$> \varepsilon_n \geq n|y_0 - y_n|,$$

що суперечить точковій ліпшицевості функції f_0 відносно другої змінної. $\square$

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Bögel K.* Über partiell differenzierbare Funktionen // Math. Z.— 1926.— **25**.— S.490—495.

2. *Kershner R.* The continuity of function of many variables // Trans. Amer. Math. Soc.— 1943.— **53**, № 1.— P.83—106.

3. *Маслюченко В.К., Михайлюк В.В.* Характеризація множин точок розриву нарізно неперервних функцій багатьох змінних на добутках метризовних просторів // Укр. мат. журн.— 2000.— **52**, № 6.— С.740—747.

4. *Герасимчук В.Г., Маслюченко В.К., Михайлюк В.В.* Різновиди ліпшицевості і множини точок розриву нарізно диференційовних функцій // Наук. вісн. Чернівецького ун-ту. Вип. 134. Математика.— Чернівці: Рута, 2002.— С.22—29.

5. *Герасимчук В.Г., Маслюченко В.К.* До питання про розриви нарізно диференційовних функцій багатьох змінних // Наук. вісн. Чернівецького ун-ту. Вип. 160. Математика.— Чернівці: Рута, 2003.— С.23—29.

6. *Герасимчук В.Г.* Розриви CD-функцій на квазінеперервних кривих // Наук. вісн. Чернівецького ун-ту. Вип. 191-192. Математика.— Чернівці: Рута, 2004.— С.36—40.

7. *Герасимчук В.Г., Маслюченко В.К., Маслюченко О.В.* Про характеризацію множин точок розриву CD-функцій // Міжнар. конф. присвячена 125 річниці від дня народження Ганса Гана. Тези доповідей. 27 червня — 3 липня, 2004,Чернівці, Україна.— С.23—25.

8. *Saint-Raymond J.* Jeux topologiques et espaces de Namioka // Proc. Amer. Math. Soc.— 1984.— **87**.— P.499-504.

Стаття надійшла до редколегії 3.03.2006