УДК 517.53

©2013 р. О. Ю. Задорожна, О. Б. Скасків

Львівський національний університет імені Івана Франка

ЕЛЕМЕНТАРНІ ЗАУВАЖЕННЯ ПРО АБСЦИСИ ЗБІЖНОСТІ ІНТЕГРАЛІВ ЛАПЛАСА–СТІЛТ'ЄСА

Отримано нові залежності між підінтегральною функцією, мірою Лебеґа–Стілт'єса та абсцисою збіжності інтеграла Лапласа–Стілт'єса.

We find new estimates between the integrand, Lebesgue–Stieltjes measure and convergence abscissa of the Laplace-Stieltjes integral.

1. Вступ. Нехай V — клас невід'ємних, неспадних на $[0,+\infty)$ функцій, dF — міра Лебеґа–Стілт'єса, породжена функцією $F \in V$, а f — невід'ємна, визначена на $[0,+\infty)$ dF–вимірна функція. Розглянемо інтеграл Лапласа–Стілт'єса вигляду

$$I(\sigma) = \int_0^{+\infty} f(x)e^{\sigma x}dF(x), \quad \sigma \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Говоритимемо, що інтеграл (1) збіжний у точці $\sigma \in \mathbb{R}$, якщо $I(\sigma) < +\infty$. У протилежному випадку (тобто, якщо $I(\sigma) = +\infty$) називатимемо його розбіжним. Число $\sigma_{зб} \in \mathbb{R}$ називатимемо *абсцисою збіжності інтеграла* (1), якщо він збіжний для всіх $\sigma < \sigma_{зб}$ і розбіжний для всіх $\sigma > \sigma_{зб}$; якщо інтеграл збіжний для всіх $\sigma \in \mathbb{R}$, то покладемо $\sigma_{зб} := +\infty$, якщо ж він розбіжний для всіх $\sigma \in \mathbb{R}$, то вважатимемо, що $\sigma_{зб} := -\infty$.

Збіжність інтегралів такого вигляду досліджували, наприклад, К. Кнопп [1], Т. Угахері [2], Х. Деланж [3], Ю. Фойґт [4], О.С. Посіко [5], М.М. Шеремета [6]. Так, К. Кнопп [1] розглянув інтеграли вигляду

$$I_1(\sigma) = \int_0^{+\infty} e^{\sigma x}d\chi(x), \tag{2}$$

де χ — функція обмеженої варіації на кожному скінченному проміжку $[0, A]$, $A > 0$. При цьому він довів таку формулу для знаходження абсциси збіжності

$$\sigma_{зб} = -\varlimsup_{n\to+\infty} \frac{\ln \chi_n}{n}, \tag{3}$$

де $\chi_n = \sup\{|\chi(x) - \chi(n)|: n \le x \le n+1\}$, яка для інтегралів (1) набуває вигляду

$$\sigma_{зб} = -\varlimsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\ln \int_n^{n+1} f(x)dF(x). \tag{4}$$

О.С. Посіко [5] і М.М. Шеремета [6] доводили для інтегралів вигляду (1) аналоги, як класичної формули Ж. Валірона для абсциси абсолютної збіжності ряду Діріхле (див., наприклад, [7, с.115]), так і аналоги деяких нових тверджень про абсциси збіжності, встановлених недавно (див., наприклад, [8]).

У цій статті ми отримаємо деякі нові залежності між підінтегральною функцією, мірою Лебеґа–Стілт'єса та абсцисою збіжності інтегралів вигляду (1). Ці залежності, зокрема, навіть у випадку рядів Діріхле дозволяють негайно отримати як відомі твердження про їхні абсциси збіжності, так і деякі нові твердження.

Нехай $\operatorname{supp} f = \{x \in [0,+\infty)\colon f(x) > 0\}$, $\operatorname{supp} dF$ — носій міри Лебега–Стілт'єса dF, а $S = \operatorname{supp} dF \cap \operatorname{supp} f$. Для $\sigma \in \mathbb{R}$ покладемо

$$\mu(\sigma) = \mu(\sigma, I) = \sup\{f(x)e^{\sigma x}\colon x \in S\}.$$

.

Як і у [5, 6, 9] (у цьому зв'язку див. також [10]) число σ_μ називатимемо *абсцисою існування максимума підінтегральної функції* інтеграла (1), якщо $\mu(\sigma) < +\infty$ для всіх $\sigma < \sigma_\mu$ і $\mu(\sigma) = +\infty$ для всіх $\sigma > \sigma_\mu$. Якщо $\mu(\sigma) < +\infty$ для всіх $\sigma \in \mathbb{R}$, то покладемо $\sigma_\mu = +\infty$, якщо $\mu(\sigma) = +\infty$ для всіх $\sigma \in \mathbb{R}$, то $\sigma_\mu = -\infty$.

Для абсциси існування максимуму підінтегральної функції інтеграла (1) нескладно доводиться (див. також [5, 9]), що

$$\sigma_\mu = \underline{\alpha} \stackrel{def}{=} \varliminf_{\substack{x\to+\infty\\ x\in S}} \frac{1}{x}\ln\frac{1}{f(x)}. \qquad (5)$$

Співвідношення між $\sigma_{зб}$ та σ_μ досліджено в [6], зокрема, там доведено такі твердження.

Теорема A (Corollary 1.1 [6, p.8]). *Нехай функція $F \in V$ — неперервна справа і необмежена. Якщо $\sigma_\mu < +\infty$ або $\varlimsup\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln F(x)}{x} := \overline{\tau} < +\infty$, то $\sigma_{зб} \geq \sigma_\mu - \overline{\tau}$.*

Теорема B (Corollary 1.4 [6, p.14]). *Нехай функція $F \in V$ — неперервна справа і необмежена. Якщо існує границя $\sigma_\mu = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-\ln f(x)}{x}$ і, або $\ln F(x) = o(x)$ $(x\to+\infty)$, або $\ln F(x) = o(\ln f(x))$ $(x\to+\infty)$, то*

$$\sigma_{зб} = \sigma_\mu.$$

2. Оцінки абсциси збіжності інтеграла Лапласа–Стілт'єса. Позначимо

$$\tau_* = \varliminf_{\substack{x\to+\infty\\ x\in S}} \frac{1}{x}\Big[\ln f(x) + \ln F(x-0)\Big].$$

Твердження 1. *Якщо*

$$(\forall\varepsilon>0)\colon \int_{x_0}^{+\infty} e^{\varepsilon x}\frac{dF(x)}{F(x-0)} = +\infty, \qquad (6)$$

то $\sigma_{зб} \leq -\tau_*$.

Доведення. З означення τ_* отримуємо, що

$$(\forall\varepsilon>0)\colon \ln f(x) + \ln F(x-0) \geq (\tau_* - \varepsilon)$$

$(x \geq x_0,\ x\in S)$, а звідси $\ln f(x) \geq (\tau_* - \varepsilon)x - \ln F(x-0)$ $(x\geq x_0,\ x\in S)$. Тоді для $\sigma = -\tau_* + 2\varepsilon$

$$\int_{x_0}^{+\infty} f(x)e^{\sigma x}dF(x) \geq$$

$$\geq \int_{x_0}^{+\infty} e^{(\tau_*-\varepsilon)x+(-\tau_*+2\varepsilon)x-\ln F(x-0)}dF(x) =$$

$$= \int_{x_0}^{+\infty} e^{\varepsilon x}\frac{dF(x)}{F(x-0)} = +\infty.$$

Отже, інтеграл (1) розбіжний у точці $\sigma = -\tau_* + 2\varepsilon$. З довільності $\varepsilon > 0$ отримуємо, що $\sigma_{зб} \leq -\tau_*$.

Зауваження 1. *Умова (6) у випадку обмеженої функції $F \in V$ може як виконуватись, так і не виконуватись. Наприклад, якщо F східчаста функція з стрибками $F(x_n+0) - F(x_n-0) := h_n = e^{-n}$ у точках $x_n = \ln n$ $(n\in\mathbb{N})$, то умова (6), очевидно, виконується. Якщо ж F східчаста функція з стрибками $h_n = n^{-2}$ у точках $x_n = n$ $(n\in\mathbb{N})$, то умова (6) не виконується. У випадку необмеженої функції $F\in V$ умова (6) виконується навіть без множника $e^{\varepsilon x}$, а саме*

$$\int_{x_0}^{+\infty} \frac{dF(x)}{F(x-0)} = +\infty.$$

Тепер для $h>0$ позначимо

$$\tau^*(h) := \varlimsup_{\substack{x\to+\infty\\ x\in S}} \frac{1}{x}\Big[\ln f(x) + h\ln F(x+0)\Big].$$

Твердження 2. *Якщо $h > 0$ і*

$$(\forall\varepsilon>0)\colon \int_{x_0}^{+\infty} e^{-\varepsilon x}\frac{dF(x)}{(F(x+0))^h} < +\infty, \quad (7)$$

то $\sigma_{зб} \geq -\tau^*(h)$.

Доведення. З означення $\tau^* = \tau^*(h)$ отримуємо, що

$$(\forall\varepsilon>0)\colon \ln f(x) + h\ln F(x+0) \leq (\tau^*+\varepsilon)x$$

$(x\geq x_0,\ x\in S)$ а звідси $\ln f(x) \leq (\tau^*+\varepsilon)x - h\ln F(x+0)(x \geq x_0,\ x\in S)$. Тоді для $\sigma = -\tau^* - 2\varepsilon$

$$\int_{x_0}^{+\infty} f(x)e^{\sigma x}dF(x) \leq$$

$$\leq \int_{x_0}^{+\infty} e^{(\tau^*+\varepsilon)x+(-\tau^*-2\varepsilon)x-h\ln F(x+0)}dF(x) =$$

$$= \int_{x_0}^{+\infty} e^{-\varepsilon x}\frac{dF(x)}{(F(x+0))^h} < +\infty.$$

Отже, інтеграл (1) збіжний у точці $\sigma = -\tau^* - 2\varepsilon$. Оскільки $\varepsilon > 0$ можна вибирати довільно малим, то звідси отримуємо, що $\sigma_{зб} \geq -\tau^*(h)$.

Зауваження 2. *Якщо $F \in V$ і необмежена, то (див. [10], [6, Lemma 1.1])*

$$(\forall h>1)\ :\ \int_{x_0}^{+\infty} \frac{dF(x)}{(F(x+0))^h} < +\infty.$$

Зауваження 3. *Теорема A випливає з твердження 2.*

Справді, оскільки якщо функція $F\in V$ і необмежена, то за Зауваженням 2 умова Твердження 2 виконується для кожного $h>1$. Тому, $\sigma_{зб}\geq -\tau^*(1+\varepsilon)$ для кожного $\varepsilon>0$ і за неперервністю F справа

$$\sigma_{зб}\geq \varliminf_{\substack{x\to+\infty\\ x\in S}}\frac{-\ln f(x)}{x}-$$

$$-(1+\varepsilon)\varlimsup_{\substack{x\to+\infty\\ x\in S}}\frac{\ln F(x+0)}{x}=\sigma_\mu-(1+\varepsilon)\overline{\tau}.$$

Звідси, з огляду на довільність вибору $\varepsilon>0$, отримуємо, що $\sigma_{зб}\geq\sigma_\mu-\overline{\tau}$.

Зауваження 4. *Зрозуміло, що теорема B негайно випливає з тверджень 1 та 2.*

Наслідок 1. *Нехай $F\in V$.*

i) Якщо функція $F(x)$ — необмежена, то

$$\lim_{h\to 1+0}\varliminf_{\substack{x\to+\infty\\ x\in S}}\frac{1}{x}\Big[\ln\frac{1}{f(x)}-h\ln F(x+0)\Big]\leq$$

$$\leq\sigma_{зб}\leq\varlimsup_{\substack{x\to+\infty\\ x\in S}}\frac{1}{x}\Big[\ln\frac{1}{f(x)}-\ln F(x-0)\Big].$$

ii) Якщо функція $F(x)$ — обмежена, то

$$\varliminf_{\substack{x\to+\infty\\ x\in S}}\frac{1}{x}\ln\frac{1}{f(x)}\leq\sigma_{зб}.$$

Крім того, якщо виконується умова

$$(\forall\varepsilon>0)\colon\ \int_{x_0}^{+\infty}e^{x\varepsilon}dF(x)=+\infty,\qquad(8)$$

то

$$\sigma_{зб}\leq\varlimsup_{\substack{x\to+\infty\\ x\in S}}\frac{1}{x}\ln\frac{1}{f(x)}.\qquad(9)$$

Доведення. $i)$ Якщо $F\in V$ і необмежена, то за Зауваженнями 1 і 2 $\int_{x_0}^{+\infty}\frac{dF(x)}{F(x-0)}=+\infty$ та $\int_{x_0}^{+\infty}\frac{dF(x)}{(F(x+0))^h}<+\infty$ $(\forall h>1)$, відповідно, тобто, умови Тверджень 1 та 2 негайно виконуються навіть без множників $e^{\varepsilon x}$ та $e^{-\varepsilon x}$. Звідси, $-\tau^*(h)\leq\sigma_{зб}\leq-\tau_*$ $(h>1)$. Тобто

$$-\lim_{h\to1+0}\tau^*(h)\leq\sigma_{зб}\leq-\tau_*.$$

$ii)$ Якщо ж функція $F(x)$ — обмежена, то $\int_{x_0}^{+\infty}dF(x)=F(+\infty)-F(x_0)<+\infty$. Враховуємо, що функція $\dfrac{1}{(F(x+0))^h}$ незростаюча, та отримаємо, що $\int_{x_0}^{+\infty}\dfrac{dF(x)}{(F(x+0))^h}<+\infty,\quad h>1$. Крім того,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\ln F(x\pm0)=0.$$

Звідси та з твердження 2 отримуємо, що

$$\varliminf_{\substack{x\to+\infty\\ x\in S}}\frac{1}{x}\ln\frac{1}{f(x)}\leq\sigma_{зб}.$$

Нескладно помітити, що якщо виконується умова (8), то виконується також і нерівність (6). Отже, з твердження 1 ми отримуємо нерівність (9).

3. Декілька простих прикладів. Зауважимо, що нерівності у твердженнях 1 та 2 є точними. Почнемо з твердження 1.

Приклад 1. *Покладемо $F(x)=e^x$. Тоді*

$$(\forall\varepsilon>0)\colon\ \int\limits_{x_0}^{+\infty}e^{\varepsilon x}\frac{dF}{F(x-0)}=\int\limits_{x_0}^{+\infty}e^{\varepsilon x}dx=+\infty.$$

Отже, умова (6) виконується, тому $\sigma_{зб}\leq-\tau_*$. Виберемо тепер $f(x)=e^{-qx}$ $(q>0)$. Тоді

$$I(\sigma)=\int_0^{+\infty}e^{-qx}e^{\sigma x}e^xdx=\int_0^{+\infty}e^{(-q+\sigma+1)x}dx$$

і для такого інтеграла маємо $\sigma_{зб}=q-1$. Крім того, бачимо, що

$$\tau_*=\varliminf_{x\to+\infty,\,x\in S}\frac{1}{x}\Big[\ln e^{-qx}+\ln e^x\Big]=1-q.$$

Отже, $\sigma_{зб}=-\tau_*$.

Перейдемо до твердження 2.

Приклад 2. *Покладемо $F(x)=x$. Тоді $(\forall\varepsilon>0)$:*

$$\int_{x_0}^{+\infty}e^{-\varepsilon x}\frac{dF}{(F(x+0))^h}=\int_{x_0}^{+\infty}e^{-\varepsilon x}\frac{dx}{x^h}<+\infty.$$

Отже, виконується нерівність (7), і тому $\sigma_{зб}\geq-\tau^*$. Покладемо тепер $f(x)=$

e^{-qx} $(q>0)$. *Тоді*

$$I(\sigma)=\int_0^{+\infty}e^{-qx}e^{\sigma x}dx=\int_0^{+\infty}e^{(\sigma-q)x}dx.$$

Для цього інтеграла маємо $\sigma_{зб}=q$. *Крім того,*

$$\tau^*(h)=\varlimsup_{x\to+\infty,\,x\in S}\frac{1}{x}\Big[\ln e^{-qx}+h\ln x\Big]\equiv -q.$$

Отже, $\sigma_{зб}=-\tau^*$.

4. Наслідки для інтегралів Лапласа та рядів Діріхле. Оскільки інтеграл Лапласа–Стілт'єса є безпосереднім узагальненням інтеграла Лапласа та ряду Діріхле, наведемо деякі наслідки для цих об'єктів.

Наслідок 2. *Для абсциси збіжності* $\sigma_{зб}$ *інтеграла Лапласа вигляду* $\int_0^{+\infty}f(x)e^{\sigma x}dx$ *виконуються нерівності*

$$\varliminf_{\substack{x\to+\infty\\ x\in\mathrm{supp}\,f}}\frac{1}{x}\ln\frac{1}{f(x)}\le\sigma_{зб}\le\varlimsup_{\substack{x\to+\infty\\ x\in\mathrm{supp}\,f}}\frac{1}{x}\ln\frac{1}{f(x)}.$$

Доведення. Для інтеграла Лапласа $F(x)\equiv x$. Оскільки $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln F(x)}{x}=0$, то з пункту $i)$ наслідку 1 ми негайно отримуємо потрібні нерівності.

Нехай (λ_n) послідовність невід'ємних чисел така, що $0=\lambda_0<\lambda_n\uparrow+\infty$ $(1\le n\uparrow+\infty)$, а (a_n) — послідовність комплексних чисел. Розглядемо ряд Діріхле вигляду

$$\sum_{n=0}^{+\infty}a_ne^{z\lambda_n}.\tag{10}$$

Для $\alpha\in[0,1]$ покладемо

$$F_\alpha(x)=\sum_{\lambda_n\le x}|a_n|^\alpha,\ \ f(\lambda_n)=|a_n|^{1-\alpha}.$$

Тоді інтеграл Лапласа–Стілт'єса перетворюється в ряд Діріхле, тобто

$$\int\limits_0^{+\infty}f(x)e^{\sigma x}dF_\alpha(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}|a_n|e^{\sigma\lambda_n}.\tag{11}$$

Зауважимо, що абсциса абсолютної збіжності ряду Діріхле (10) дорівнює абсцисі збіжності інтеграла Лапласа–Стілт'єса (11). Тому, можна скористатись отриманими вище твердженнями про збіжність інтегралів вигляду (1).

Наслідок 3. *Нехай* $\alpha\in[0,1]$ *таке, що* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}|a_n|^\alpha=+\infty$. *Тоді для абсциси абсолютної збіжності* σ_a *ряду Діріхле (10) виконуються нерівності*

$$\lim_{h\to1+0}\varliminf_{n\to+\infty}\Big[\frac{1-\alpha}{\lambda_n}\ln\frac{1}{|a_n|}-\frac{h}{\lambda_n}\ln\sum_{k=0}^{n}|a_k|^\alpha\Big]\le$$

$$\le\sigma_a\le\varlimsup_{n\to+\infty}\Big[\frac{1-\alpha}{\lambda_n}\ln\frac{1}{|a_n|}-\frac{1}{\lambda_n}\ln\sum_{k=0}^{n-1}|a_k|^\alpha\Big].$$

Доведення. Зауважимо, що функція $F_\alpha(x)=\sum\limits_{\lambda_n\le x}|a_k|^\alpha$ — невід'ємна, неспадна і необмежена, а також, що $\mathrm{supp}\ dF_\alpha=\{\lambda_n\colon n\ge0\}$ і

$$F_\alpha(\lambda_n+0)=\sum_{k=0}^{n}|a_k|^\alpha,\quad F_\alpha(\lambda_n-0)=\sum_{k=0}^{n-1}|a_k|^\alpha.$$

Тому за пунктом $i)$ наслідку 1 отримуємо потрібні нерівності.

Зауваження 5. *З наслідку 3 ми негайно отримуємо таку, встановлену Ж. Валіроном (див.[11, с.10]), нерівність*

$$\sigma_{зб}\le\sigma_a+\tau,\quad \tau:=\varlimsup_{n\to+\infty}\frac{\ln n}{\lambda_n},$$

а також $\underline{\alpha_0}\le\sigma_a+\tau$.

Справді, поклавши $\alpha=0$, з лівої частини нерівності у наслідку 3 ми отримаємо

$$\varliminf_{n\to+\infty}\frac{1}{\lambda_n}\ln\frac{1}{|a_n|}-\varlimsup_{n\to+\infty}\frac{\ln n}{\lambda_n}\le\sigma_a.$$

Крім того, використовуючи рівність (5), бачимо, що для ряду Діріхле (10)

$$\sigma_{зб}\le\sigma_\mu=\underline{\alpha_0}\overset{def}{=}\varliminf_{n\to+\infty}\frac{-\ln|a_n|}{\lambda_n},$$

де $\sigma_\mu=\sup\{\sigma\in\mathbb{R}\colon \mu(\sigma,F)<+\infty\}$ — абсциса існування максимального члена $\mu(\sigma,F)=\max\{|a_n|e^{\sigma\lambda_n}\colon n\ge0\}$ ряду Діріхле (10). Тепер, використовуючи дві останні нерівності, отримуємо, що

$$\sigma_{зб}\le\varliminf_{n\to+\infty}\frac{-\ln|a_n|}{\lambda_n}\le\sigma_a+\varlimsup_{n\to+\infty}\frac{\ln n}{\lambda_n}=\sigma_a+\tau.$$

Більше того, у випадку коли $\tau = 0$, маємо $\sigma = \sigma_a = \sigma_\mu = \underline{\alpha_0}$, позаяк $\sigma_a \le \sigma_{зб}$.

Зауваження 6. *Якщо* $\sigma_a \le 0$, *тобто* $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| = +\infty$, *то*

$$\sigma_a + \beta \ge 0, \quad \beta \overset{def}{=} \varlimsup_{n\to+\infty} \frac{1}{\lambda_n} \ln \sum_{k=0}^{n} |a_k|.$$

Справді, у наслідку 3 покладемо $\alpha = 1$ та негайно отримаємо потрібну нерівність. Зокрема, $\sigma_a = 0$ у випадку, коли $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| = +\infty$ та $\beta = 0$ (подібні нерівності можна знайти в [7]).

Введемо позначення

$$\underline{\tau} = \varliminf_{n\to+\infty} \frac{\ln n}{\lambda_n}.$$

Тоді з наслідку 3 отримуємо також таке твердження

Наслідок 4. *Для абсциси абсолютної збіжності ряду Діріхле (10) виконуються такі нерівності*

$$\varliminf_{n\to+\infty} \frac{1}{\lambda_n} \ln \frac{1}{a_n} - \tau \le \sigma_a \le \varlimsup_{n\to+\infty} \frac{1}{\lambda_n} \ln \frac{1}{a_n} - \underline{\tau}.$$

Припустимо тепер, що виконується умова

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^{1-\gamma} e^{-\delta\lambda_n} < +\infty, \tag{12}$$

де $\gamma > 0$, $\delta \in \mathbb{R}$. Тоді, вибираючи

$$F(x) = \sum_{\lambda_n \le x} |a_n|^{1-\gamma} e^{-\delta\lambda_n}, \quad f(\lambda_n) = |a_n|^\gamma e^{\delta\lambda_n},$$

з пункту ii) наслідку 1 з огляду на співвідношення $\sigma_{зб} \le \sigma_\mu = \alpha_0$ отримаємо такий наслідок.

Наслідок 5. i) *Якщо* $(\exists\gamma > 0)(\exists\delta \in \mathbb{R})$ *такі, що виконується умова* (12), *то для абсцис ряду Діріхле (10) виконуються нерівності*

$$\sigma_a + \delta \ge \gamma\alpha_0 = \gamma\sigma_\mu \ge \gamma\sigma_{зб}. \tag{13}$$

ii) *Якщо існують* $\gamma > 0$ *та* $\delta \in \mathbb{R}$ *такі, що умова* (12) *не виконується, то для абсцис ряду Діріхле (10) виконуються нерівності*

$$\sigma_a + \delta + \varlimsup_{n\to+\infty} \frac{1}{\lambda_n} \ln \Big(\sum_{k=0}^{n} |a_k|^{1-\gamma} e^{-\delta\lambda_k} \Big) \ge$$
$$\ge \gamma\alpha_0 = \gamma\sigma_\mu \ge \gamma\sigma_c.$$

Доведення. За пунктом ii) з наслідку 1

$$\sigma_a \ge \varliminf_{x\to+\infty,\, x\in S} \frac{1}{x} \ln \frac{1}{f(x)} = \gamma\alpha_0 - \delta,$$

де $S = \{\lambda_n \colon n \in \mathbb{Z}_+\}$. Пункт ii) наслідку 5 отримуємо негайно, застосувавши пункт i) з наслідку 1.

У статті [8] можна знайти таке твердження, що стосується нерівності (13).

Теорема C ([8]). *Якщо* $(\exists\,\gamma > 0)(\exists\delta \in \mathbb{R})$:

$$\varliminf_{n\to+\infty} \frac{(\gamma - 1)\ln|a_n| + \delta\lambda_n}{\ln n} > 1, \tag{14}$$

то

$$\sigma_a + \delta \ge \gamma\sigma_{зб}, \quad \sigma_a + \delta \ge \gamma\sigma_\mu.$$

Зауваження 7. *Твердження теореми C випливає з наслідку 5.*

Справді, нескладно помітити, що з умови (14) випливає умова (12). Варто зауважити також, що умови наслідку 5, взагалі кажучи, є слабшими за умови Теореми C.

5. Ще декілька оцінок абсциси збіжності.

Нехай L_1 — клас функцій ψ визначених на $[0, +\infty)$, таких, що $\psi(t) \nearrow +\infty$ $(t \to +\infty)$ та $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{\psi(t)} = +\infty$. Для $\psi \in L_1$ позначимо

$$\tau_*(\psi) = \varliminf_{x\to+\infty,\, x\in S} \frac{1}{x} \Big[\ln f(x) + \ln\psi\big(F(x-0)\big) \Big].$$

Твердження 3. *Нехай* $\psi \in L_1$. *Тоді для абсциси збіжності інтеграла Лапласа–Стілт'єса* (1) *виконується нерівність* $\sigma_{зб} \le -\tau_*(\psi)$.

Доведення. Подібно, як і вище, з означення $\tau_*(\psi)$ для кожного $\varepsilon > 0$ отримуємо, що

$$\ln f(x) \ge \big(\tau_*(\psi) - \varepsilon\big)x - \ln\psi\big(F(x-0)\big)$$

$(x \ge x_0,\, x \in S)$. Тоді для $\sigma = -\tau_*(\psi) + \varepsilon$

$$\int_{x_0}^{+\infty} f(x) e^{\sigma x} dF(x) \ge \int_{x_0}^{+\infty} \frac{dF(x)}{\psi\big(F(x-0)\big)} = +\infty.$$

Отже, інтеграл (1) розбіжний у точці $\sigma = -\tau_*(\psi) + \varepsilon$. Оскільки вибір $\varepsilon > 0$ є довільним, то $\sigma_{зб} \le -\tau_*(\psi)$.

Нехай L_2 — клас функцій φ визначених на $[0,+\infty)$, таких, що $\varphi(t) \nearrow +\infty$ $(t \to +\infty)$ та $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{\varphi(t)} < +\infty$. Для $\varphi \in L_2$ позначимо

$$\tau^*(\varphi) = \varlimsup_{x\to+\infty,\, x\in S} \frac{1}{x}\Big[\ln f(x)+\ln\varphi\big(F(x+0)\big)\Big].$$

Твердження 4. *Нехай $\varphi \in L_2$. Тоді для абсциси збіжності інтеграла Лапласа–Стілт'єса* (1) *виконується нерівність $\sigma_{зб} \geq -\tau^*(\varphi)$.*

Доведення. Подібно, як і у доведенні твердження 2, з означення $\tau^*(\varphi)$ для кожного $\varepsilon > 0$ отримуємо, що

$$\ln f(x) \leq \big(\tau^*(\varphi)+\varepsilon\big)x - \ln\varphi\big(F(x+0)\big)$$

$(x \geq x_0,\ x \in S)$. Тоді для $\sigma = -\tau^*(\varphi) - \varepsilon$

$$\int\limits_{x_0}^{+\infty} f(x)e^{\sigma x}dF(x) \leq \int\limits_{x_0}^{+\infty} \frac{dF(x)}{\varphi\big(F(x+0)\big)} < +\infty.$$

Отже, інтеграл (1) збіжний у точці $\sigma = -(\tau^*(\varphi)+\varepsilon)$. Звідси, за довільністю у виборі $\varepsilon > 0$, отримуємо, що $\sigma_{зб} \geq -\tau^*(\varphi)$.

З тверджень 3 та 4 отримуємо таке твердження.

Наслідок 6. *Для абсциси збіжності інтеграла Лапласа–Стілт'єса (1) виконується оцінка*

$$-\inf\{\tau^*(\varphi)\colon \varphi \in L_2\} \leq$$
$$\leq \sigma_{зб} \leq -\sup\{\tau_*(\psi)\colon \psi \in L_1\}.$$

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Knopp K.* Über die Konvergenzabszisse des Laplace-Integrals // Math. Zeitschr. – 1951. – **54**, №3. – P. 291-296.

2. *Ugaheri T.* On the abscissa of convergence of Laplace-Stieltjes integral // Ann. Inst. Stat. Math. – 1951. – **2**, №1. – P. 1-3.

3. *Delange H.* Sur les points singuliers de la fonction définie par une intégrale de Laplace-Stieltjes // J. d'Anal. Math. – 1956. – **5**, №1. – P. 1-33.

4. *Voigt Ju.* On the abscissa of convergence for the Laplace transform of vector valued measures // Arch. Math. – 1982. – **39**. – P. 455-462.

5. *Posiko O. S.* On the convergence abscissa of Laplace-Stieltjes integral // Visn. L'viv. Univ. – 2004. – **63**. – P. 123-130.

6. *Sheremeta M.* Asymtotical behaviour of Laplace-Stieltjes integrals. – Lviv: VNTL Publishers, 2010. – 211 p.

7. *Леонтьев А. Ф.* Ряды экспонент. – М.: Наука, 1976. – 536 с.

8. *Мулява О. М.* Про абсцису збіжності ряду Діріхле // Мат. Студ. – 1998. – **9**, №2. – С. 171-176.

9. *Посіко О., Шеремета М.* Асимптотичні оцінки інтегралів Лапласа–Стілт'єса // Укр. мат. вісн. – 2005. – **2**, N4. – S. 541-549.

10. *Посіко О. С., Скасків О. Б., Шеремета М. М.* Оцінки інтегралу Лапласа–Стілт'єса // Мат. Студ. – 2004. – **21**, N2. – С. 179-186.

11. *Шеремета М. М.* Цілі ряди Діріхле. – К.: ІСДО, 1993. – 168 с.