УДК 517.95

©2006 р. М.М. Бокало, О.В. Кушнір

Львівський національний університет ім. Івана Франка, Львів

# ВАРІАЦІЙНІ НЕЛІНІЙНІ ЕЛІПТИЧНІ НЕРІВНОСТІ ЗІ ЗМІННИМИ ПОКАЗНИКАМИ НЕЛІНІЙНОСТІ

Отримано клас нелінійних еліптичних нерівностей в необмежених областях, для яких відповідні задачі на знаходження розв'язків цих нерівностей є коректними (існує розв'язок задачі, він єдиний і неперервно залежить від початкових даних) без умов на поведінку розв'язку і обмежень на зростання вихідних даних на нескінченності. Розглядаються узагальнені розв'язки досліджуваних задач з узагальнених просторів Лебега.

We establish a class of nonlinear elliptic inequalities in unbounded domains, such that corresponding problems are well-posed (a solution of the problem exists, it is unique and continuously dependent on the initial data) without prescribing the behavior of solutions at infinity and the growth of the data at infinity need not be limited. The weak solutions of the investigated inequalities from the general Lebesque spaces are studied.

**Вступ.** Багато важливих прикладних задач зводяться до так званих варіаційних нерівностей. Їх найпростішим прикладом є такий. Нехай маємо функціонал $J : \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega) \to \mathbb{R}$, визначений за правилом

$$J(w) = \int\limits_{\Omega} \{|\nabla w|^2 - 2fw\} dx, \qquad (1)$$

де $\Omega$— обмежена область в $\mathbb{R}^n$. Розглянемо задачу, яка полягає у знаходженні функції $u \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$ такої, що

$$J(u) = \inf_{w \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)} J(w). \qquad (2)$$

Відомо, що функція $u$, яка мінімізує функціонал $J$, повинна задовольняти інтегральну тотожність

$$\int\limits_{\Omega} \{\nabla u \nabla v - fv\} dx = 0, \quad v \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega). \qquad (3)$$

Однак, розв'язок $u \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$ задачі

$$J(u) = \inf_{\substack{\in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega) \\ w \geq 0}} J(w), \ u \geq 0, \qquad (4)$$

задовольняє вже не інтегральну тотожність, а інтегральну нерівність вигляду

$$\int\limits_{\Omega} \{\nabla u \nabla (v-u) - f(v-u)\} dx \geq 0, \qquad (5)$$

$v \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega),\ v \geq 0,$
яку називають варіаційною нерівністю.

Зауважимо, що коли функція $u$ ще й належить до простору $H^2(\Omega)$, то нерівність (5) рівносильна співвідношенням

$$\Delta u - f \geq 0, \ u(\Delta u - f) = 0 \text{ на } \Omega. \qquad (6)$$

Якщо ж $\Omega$ необмежена область, $u$ береться з простору $\overset{\circ}{H}{}^1_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}) \bigcap H^2_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$ і $u \geq 0$ на $\Omega$, то співвідношення (6) можна записати у вигляді інтегральної нерівності

$$\int\limits_{\Omega} \{\nabla u \nabla (w(v-u)) - fw(v-u)\} dx \geq 0, \ (7)$$

$v \in \overset{\circ}{H}{}^1_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}) \bigcap H^2_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}),\ v \geq 0$ на $\Omega$,

$w \in C^1_c(\overline{\Omega}),\ w \geq 0$ на $\Omega$,

яка також називається варіаційною нерівністю. (Означення використаних тут просторів дано нижче).

Відмітимо, що в нерівності (7) обов'язково брати $w$, інакше інтеграли, які там фігурують можуть не бути визначеними.

Теорія варіаційних нерівностей виникла в 60-х роках XX ст. Джерелом її виникнення стала задача з теорії пружності (задача Синьйоріні), яка була вперше повністю досліджена в роботах Г.Фікери. Там були закладені основи теорії варіаційних нерівностей, яка розвивалася багатьма авторами (див., зокрема, [1—7]).

На даний час варіаційні нерівності в обмежених областях є досить добре вивченими. Нелінійні еліптичні варіаційні нерівності з необмеженими областями їх задання досліджено в роботах ([6],[7]) і при цьому встановлено, що для забезпечення єдиності розв'язку відповідної варіаційної нерівності необхідно накласти певні умови на його поведінку на нескінченності, а для існування розв'язку — умови на зростання вихідних даних на нескінченності.

Однак відомо ([8]), що рівняння

$$-\Delta u + |u|^{p-2}u = f(x),\ x \in \mathbb{R}^n,$$

де $p > 2$, має єдиний розв'язок при довільній поведінці $u$ та $f$ при $|x| \to \infty$. Цей результат в роботі [9] узагальнено на випадок систем нелінійних варіаційних нерівностей зі змінними показниками нелінійності. У даній роботі результат роботи [9] переноситься на деякий клас нелінійних еліптичних варіаційних нерівностей зі змінними показниками нелінійності (в необмежених областях).

**1. Постановка задачі і формулювання основних результатів.** Нехай $n \geq 2$, $N \geq 1$ — задані натуральні числа. Позначимо через $\mathbb{R}^k$, де $k \in \{n, N\}$, — лінійний простір вектор-стовпчиків вигляду $x := \mathrm{colon}(x_1, \ldots, x_k)$, де $x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{R}$, на якому введено скалярний добуток $(x, \widetilde{x}) := x_1\widetilde{x}_1 + \ldots + x_k\widetilde{x}_k$, і відповідну норму $|x| := \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_k^2}$, де $x = \mathrm{colon}(x_1, \ldots, x_k)$, $\widetilde{x} = \mathrm{colon}(\widetilde{x}_1, \ldots, \widetilde{x}_k)$; $M_{N\times n}$ — простір дійсних матриць $\eta := (\eta^1, \ldots, \eta^n)$, де $\eta^k := \mathrm{colon}(\eta_1^k, \ldots, \eta_N^k) \in \mathbb{R}^N$, $k \in \{1, \ldots, n\}$, з нормою $|\eta| := \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n}\sum\limits_{l=1}^{N}(\eta_l^k)^2}$. Якщо $X$ — деяка множина, то через $[X]^N$ позначатимемо декартів степінь множини $X$.

Нехай $\Omega$ — необмежена область в $\mathbb{R}^n$ з кусково-гладкою межею $\partial\Omega$, $0 \in \Omega$, а $\Omega_R$ — зв'язна компонента множини $\Omega \bigcap \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < R\}$ така, що $0 \in \Omega_R$ для довільних $R > 0$.

Позначимо через $C_c^1(\overline{\Omega})$ множину функцій з $C^1(\overline{\Omega})$, носії яких є компактами в $\overline{\Omega}$; $C_c^{1,+}(\overline{\Omega}) := \{v \in C_c^1(\overline{\Omega}) : v \geq 0\}$; $L_{q,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}) := \{v(x), x \in \Omega : v \in L_q(\Omega_R)\ \forall R > 0\}$ — локально опуклий простір із системою півнорм: $\|\cdot\|_{L_q(\Omega_R)}$, $R > 0$; $H^1(G)$, де $G = \Omega$ або $\Omega_R$ для деякого $R > 0$, — простір Соболєва, який є замиканням простору $C^1(\overline{\Omega}_R)$, якщо $G = \Omega_R$, і $C_c^1(\overline{\Omega})$, якщо $G = \Omega$, за нормою $\|v\|_{H^1(G)} = \left(\int\limits_G [|v|^2 + |\nabla v|^2]\,d\,x\right)^{\frac{1}{2}}$.

Під $L_{r(\cdot)}(\Omega_R)$, де $r \in L_\infty(\Omega_R)$, $r(x) > 1$ для м.в. $x \in \Omega_R$, розумітимемо узагальнений простір Лебега (див. [10],[11]), утворений замиканням простору $C(\overline{\Omega}_R)$ за нормою $\|v\|_{L_{r(\cdot)}(\Omega_R)} := \inf\{\lambda > 0 : \rho_{r,R}(v/\lambda) \leq 1\}$, де $\rho_{r,R}(v) := \int\limits_{\Omega_R} |v(x)|^{r(x)}\,d\,x$. Простори $H_{\mathrm{loc}}^1(\overline{\Omega})$ і $L_{r(\cdot),\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$, де $r \in L_\infty(\Omega)$, $r(x) > 1$ для м.в. $x \in \Omega$, визначаються подібно до того, як визначається простір $L_{q,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$.

Нехай $\mathbb{P}$ — підмножина множини $L_{\infty,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$, складена з елементів, що задовольняють умову: $1 < p_{0,R} := \operatorname*{ess\,inf}\limits_{x\in\Omega_R} p(x)$, $\operatorname*{ess\,sup}\limits_{x\in\Omega_R} p(x) := p_{1,R} < +\infty$ для будь-яких $R > 0$.

Для $p \in \mathbb{P}$ під $p^*$ позначимо функцію з $\mathbb{P}$ таку, що $\frac{1}{p(x)} + \frac{1}{p^*(x)} = 1$ для м. в. $x \in \Omega$.

Для будь-якого $p \in \mathbb{P}$ позначимо через $\mathbb{A}_p$ множину впорядкованих наборів вектор-функцій $(A^i) := (A^0, ..., A^n)$ таких, що

1) для кожного $i = \overline{0,n}$ вектор-функція $A^i(\cdot,\cdot,\cdot) : \Omega \times \mathbb{R}^N \times M_{N\times n} \longrightarrow \mathbb{R}^N$ є каратеодорівською ;

2) для майже всіх $x \in \Omega$ і будь-яких $\xi \in \mathbb{R}^N$, $\eta \in M_{N\times n}$

$$|\,A^0(x,\xi,\eta)| \leq h_0(x)\left(|\,\xi|^{p(x)-1} + |\,\eta|^{2/p^*(x)}\right) + $$
$$+g_0(x),$$

$|A^i(x,\xi,\eta)| \le h_i(x)\,(|\xi|+|\eta|)+g_i(x),\ i=\overline{1,n}$, де $h_i \in L_{\infty,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$, $i=\overline{0,n}$, $g_0 \in L_{p^*(\cdot),\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$, $g_i \in L_{2,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$, $i=\overline{1,n}$;

3) для майже всіх $x\in\Omega$ і будь-яких $\xi,\widetilde{\xi}\in\mathbb{R}^N$ і $\eta,\widetilde{\eta}\in M_{N\times n}$ виконується нерівність

$$\sum_{i=1}^{n}(A^i(x,\xi,\eta)-A^i(x,\widetilde{\xi},\widetilde{\eta}),\eta^i-\widetilde{\eta}^i)+$$

$$+(A^0(x,\xi,\eta)-A^0(x,\widetilde{\xi},\widetilde{\eta}),\xi-\widetilde{\xi})\ge 0.$$

Під $\mathbb{F}_p$, де $p\in\mathbb{P}$, розумітимемо лінійний простір, складений з наборів вектор-функцій $(F^i):=(F^0,\ldots,F^n)$, де $F^0\in[L_{p^*(\cdot),\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})]^N$, $F^i\in[L_{2,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})]^N$, $i=\overline{1,n}$.

Скажемо, що послідовність $\{(F^{i,k})\}_{k=1}^{\infty}$ елементів простору $\mathbb{F}_p$ збігається в $\mathbb{F}_p$ до $(F^i)$, якщо $\|F^{0,k}-F^0\|_{[L_{p^*(\cdot)}(\Omega_R)]^N}+ +\sum\limits_{i=1}^{n}\|F^{i,k}-F^i\|_{[L_2(\Omega_R)]^N}\underset{k\to\infty}{\longrightarrow}0$ для будь-якого $R>0$.

Для кожного $p\in\mathbb{P}$ покладемо $\mathbb{U}_p:=[H^1_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})\bigcap L_{p(\cdot),\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})]^N$. Скажемо, що послідовність $\{v^k\}_{k=1}^{\infty}$ елементів з $\mathbb{U}_p$ збігається в $\mathbb{U}_p$ до $v\in\mathbb{U}_p$, якщо для будь-якого $R>0$ послідовність $\{v^k|_{\Omega_R}\}_{k=1}^{\infty}$ збіжна до $v|_{\Omega_R}$ в $[H^1(\Omega_R)\bigcap L_{p(\cdot)}(\Omega_R)]^N$.

Позначимо через $\mathbb{O}_p$, де $p\in\mathbb{P}$, множину опуклих замкнених підмножин множини $\mathbb{U}_p$, які містять 0.

Нехай $\widetilde{\mathbb{P}}\subset\mathbb{P}$ і $\widetilde{\mathbb{A}}_p\subset\mathbb{A}_p$, $\widetilde{\mathbb{F}}_p\subset\mathbb{F}_p$, $\widetilde{\mathbb{O}}_p\subset\mathbb{O}_p$, $p\in\widetilde{\mathbb{P}}$, причому $\widetilde{\mathbb{A}}_p$, $\widetilde{\mathbb{F}}_p$ і елементи множини $\widetilde{\mathbb{O}}_p$ для кожного $p\in\widetilde{\mathbb{P}}$ є топологічними просторами. Задача, яку назвемо $\mathbf{VI}(\widetilde{\mathbb{A}}_p,\widetilde{\mathbb{F}}_p,\widetilde{\mathbb{O}}_p:p\in\widetilde{\mathbb{P}})$ і будемо далі розглядати, є така: для кожних $p\in\widetilde{\mathbb{P}}$, $(A^i)\in\widetilde{\mathbb{A}}_p$, $(F^i)\in\widetilde{\mathbb{F}}_p$, $K\in\widetilde{\mathbb{O}}_p$ знайти множину $\mathbf{SVI}((A^i),(F^i),K)$ функцій $u\in K$, які задовольняють нерівність

$$\int\limits_{\Omega}\{\sum_{i=1}^{n}(A^i(x,u,\nabla u),(w(v-u))_{x_i})+$$

$$+(A^0(x,u,\nabla u),w(v-u))\}dx\ge \qquad (8)$$

$$\ge\int\limits_{\Omega}\{\sum_{i=1}^{n}(F^i,(w(v-u))_{x_i})+(F^0,w(v-u))\}dx$$

для довільних $w\in C_c^{1,+}(\overline{\Omega})$ і $v\in K$.

Задача $\mathbf{VI}(\widetilde{\mathbb{A}}_p,\widetilde{\mathbb{F}}_p,\widetilde{\mathbb{O}}_p:p\in\widetilde{\mathbb{P}})$ називається *однозначною (розв'язною)*, якщо для будь-яких $p\in\widetilde{\mathbb{P}}$ і довільних $(A^i)\in\widetilde{\mathbb{A}}_p$, $(F^i)\in\widetilde{\mathbb{F}}_p$, $K\in\widetilde{\mathbb{O}}_p$ множина $\mathbf{SVI}((A^i),(F^i),K)$ містить *не більше* одного елемента (*хоча б один* елемент). Задача $\mathbf{VI}(\widetilde{\mathbb{A}}_p,\widetilde{\mathbb{F}}_p,\widetilde{\mathbb{O}}_p:p\in\widetilde{\mathbb{P}})$ називається *однозначно розв'язною*, якщо вона є розв'язною і однозначною. Задача $\mathbf{VI}(\widetilde{\mathbb{A}}_p,\widetilde{\mathbb{F}}_p,\widetilde{\mathbb{O}}_p:p\in\widetilde{\mathbb{P}})$ — *коректна*, якщо вона є однозначно розв'язною і для кожного $p\in\widetilde{\mathbb{P}}$, довільної множини $K\in\widetilde{\mathbb{O}}_p$ та будь-яких елементів $(A^i),(F^i)$ і послідовностей елементів $\{(A^{i,k})\}_{k=1}^{\infty}$, $\{(F^{i,k})\}_{k=1}^{\infty}$ відповідно з $\widetilde{\mathbb{A}}_p$ та $\widetilde{\mathbb{F}}_p$ таких, що $(A^{i,k})\underset{k\to\infty}{\longrightarrow}(A^i)$ в $\widetilde{\mathbb{A}}_p$, $(F^{i,k})\underset{k\to\infty}{\longrightarrow}(F^i)$ в $\widetilde{\mathbb{F}}_p$, маємо $u^k\underset{k\to\infty}{\longrightarrow}u$ в $K$, де $u^k\in\mathbf{SVI}((A^{i,k}),(F^{i,k}),K)$, $k\in\mathbb{N}$, $u\in\mathbf{SVI}((A^i),(F^i),K)$.

Зрозуміло, що множини $\widetilde{\mathbb{P}}$ і $\widetilde{\mathbb{A}}_p$, $\widetilde{\mathbb{F}}_p$, $\widetilde{\mathbb{O}}_p$, $p\in\widetilde{\mathbb{P}}$, при яких задача $\mathbf{VI}(\widetilde{\mathbb{A}}_p,\widetilde{\mathbb{F}}_p,\widetilde{\mathbb{O}}_p:p\in\widetilde{\mathbb{P}})$ є розв'язною, однозначною чи коректною можуть бути різноманітними. В даній роботі нас цікавитиме вибір таких підмножин $\widetilde{\mathbb{P}}\subset\mathbb{P}$ і топологічних просторів $\widetilde{\mathbb{A}}_p\subset\mathbb{A}_p$, $\widetilde{\mathbb{F}}_p\subset\mathbb{F}_p$, $\widetilde{\mathbb{O}}_p\subset\mathbb{O}_p$, $p\in\widetilde{\mathbb{P}}$, щоби множини $\widetilde{\mathbb{F}}_p$ і $K\in\widetilde{\mathbb{O}}_p$, коли $p\in\widetilde{\mathbb{P}}$, складалися із функцій з довільною поведінкою при $|x|\to+\infty$ і задача $\mathbf{VI}(\widetilde{\mathbb{A}}_p,\widetilde{\mathbb{F}}_p,\widetilde{\mathbb{O}}_p:p\in\widetilde{\mathbb{P}})$ була або однозначною, або коректною, тобто нашою ціллю є отримання результатів, аналогічних до результатів роботи [9].

Покладемо $\mathbb{P}^*:=\{p\in L_\infty(\Omega):\operatorname*{ess\,inf}\limits_{x\in\Omega}p(x)>2\}$. Очевидно, що $\mathbb{P}^*\subset\mathbb{P}$. Використовуватимемо позначення $p_0:=\operatorname*{ess\,inf}\limits_{x\in\Omega}p(x)$, $p_1:=\operatorname*{ess\,sup}\limits_{x\in\Omega}p(x)$, коли $p\in\mathbb{P}^*$.

Для кожного $p\in\mathbb{P}^*$ під $\mathbb{A}_p^*$ розумітимемо підмножину множини $\mathbb{A}_p$, елементами якої є ті елементи $(A^i)\in\mathbb{A}_p$, для яких виконуються ще дві умови:

4) існує стала $B \geq 0$ така, що для кожного $i = \overline{1,n}$, майже всіх $x \in \Omega$ і будь-яких $\xi, \widetilde{\xi} \in \mathbb{R}^N$, $\eta, \widetilde{\eta} \in M_{N\times n}$ правильна нерівність

$$| A^i(x,\xi,\eta) - A^i(x,\widetilde{\xi},\widetilde{\eta})| \leq$$

$$\leq B(|\xi - \widetilde{\xi}| + |\eta - \widetilde{\eta}|) \qquad (9)$$

(тобто для майже всіх $x \in \Omega$ функція $A^i(x,\cdot,\cdot) : \mathbb{R}^N \times M_{N\times n} \to \mathbb{R}^N$ є ліпшицева);

5) існують сталі $K_1 \geq 0, K_2 > 0, K_3 > 0$ такі, що для майже всіх $x \in \Omega$ і будь-яких $\xi, \widetilde{\xi} \in \mathbb{R}^N$, $\eta = (\eta^1, \ldots, \eta^n), \widetilde{\eta} = (\widetilde{\eta}^1, \ldots, \widetilde{\eta}^n) \in M_{N\times n}$ виконується нерівність

$$\sum_{i=1}^{n}(A^i(x,\xi,\eta) - A^i(x,\widetilde{\xi},\widetilde{\eta}), \eta^i - \widetilde{\eta}^i) +$$

$$+(A^0(x,\xi,\eta) - A^0(x,\widetilde{\xi},\widetilde{\eta}), \xi - \widetilde{\xi}) \geq \qquad (10)$$

$$\geq K_1|\xi - \widetilde{\xi}|^2 + K_2|\eta - \widetilde{\eta}|^2 + K_3|\xi - \widetilde{\xi}|^{p(x)},$$

причому, якщо $p_1 := \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega} p(x) \geq \frac{2n}{n-1}$, то $K_1 > 0$.

Скажемо, що послідовність $\{(A^{i,k})\}_{k=1}^{\infty}$ елементів з класу $\mathbb{A}_p^*$ збігається в $\mathbb{A}_p^*$ до $(A^i) \in \mathbb{A}_p^*$, якщо набори функцій $(A^{i,k})$, $k \in \mathbb{N}$, $(A^i)$ задовольняють умови 4) і 5) з одними і тими ж сталими $B, K_1, K_2, K_3$ і

$$\operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega_R} \sup_{\xi,\eta} \left( \frac{|A^{0,k}(x,\xi,\eta) - A^0(x,\xi,\eta)|}{1 + |\xi|^{p(x)-1} + |\eta|^{2/p^*(x)}} + \right.$$

$$\left. + \sum_{i=1}^{n} \frac{|A^{i,k}(x,\xi,\eta) - A^i(x,\xi,\eta)|}{1 + |\xi| + |\eta|} \right) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

для будь-якого $R > 0$.

**Теорема 1.** Задача $\mathbf{VI}(\mathbb{A}_p^*, \mathbb{F}_p, \mathbb{O}_p : p \in \mathbb{P}^*)$ є однозначною і, якщо $\mathbf{SVI}((A^i), (F^i), K) \neq \varnothing$ для деяких $p \in \mathbb{P}^*$, $(A^i) \in \mathbb{A}_p^*$, $(F^i) \in \mathbb{F}_p$, $K \in \mathbb{O}_p$, то для $u \in \mathbf{SVI}((A^i), (F^i), K)$ і будь-яких $R_0, R, 0 < R_0 < R, R \geq 1$, виконується нерівність

$$\int_{\Omega_{R_0}} \left\{ |\nabla u(x)|^2 + K_1|u(x)|^2 + |u(x)|^{p(x)} \right\} dx \leq$$

$$\leq \left(\frac{R}{R-R_0}\right)^s \left[ C_1 R^{n-\frac{q}{q-2}} + \right.$$

$$+C_2 \int_{\Omega_R} \{|F^0(x) - A^0(x,0,0)|^{p^*(x)} +$$

$$\left. + \sum_{i=1}^{n} |F^i(x) - A^i(x,0,0)|^2\} dx \right], \qquad (11)$$

де $q = p_1$ при $K_1 = 0$ і $q \in (2; p_0] \cup \{p_1\}$ при $K_1 > 0$; $s > \max\{\frac{2p_0}{p_0-2}, \frac{2q}{q-2}\}$ — яке-небудь число, а $C_1, C_2$— сталі, які залежать тільки від $p_0, p_1, q, s$ і сталих $B, K_1, K_2, K_3$ з умов 4) і 5) на $(A^i)$.

Введемо ще деякі позначення. Нехай $\mathbb{O}_p^*$ — підмножина $\mathbb{O}_p$, будь-який елемент $K$ якої визначається так: існує замкнений підпростір $U$ простору $\mathbb{U}_p$ такий, що $C_0^1(\Omega) \subset U$ і $K = \{v \in U : v \geq 0 \text{ на } \Omega\}$.

Позначимо через $\mathbb{F}^*$ підмножину $\mathbb{F}_p$, елементи якої мають вигляд $(F^0, 0, \ldots, 0)$, де $F^0 \in [L_{2,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})]^N$, тобто, якщо $(F^i) \in \mathbb{F}^*$, то $F^i = 0$, $i = \overline{1,n}$, $F^0 \in [L_{2,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})]^N$.

Нехай $\mathbb{A}_p^{**}$ підмножина $\mathbb{A}_p^*$, яка складається з елементів $(A^i) \in \mathbb{A}_p^*$ таких, що $A^i(\cdot,0,0) = 0$, $i = \overline{0,n}$ (цю умову можна замінити на умову: $A^i(\cdot,0,0) \in [H^1_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})]^N$, $i = \overline{1,n}$, $A^0(\cdot,0,0) \in [L_{2,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})]^N$, але ми цього робити не будемо).

**Теорема 2.** Задача $\mathbf{VI}(\mathbb{A}_p^{**}, \mathbb{F}^*, \mathbb{O}_p^* : p \in \mathbb{P}^*)$ є коректною.

Зауважимо, що коли $(A^i) \in \mathbb{A}_p^{**}$, $(F^i) \in \mathbb{F}^*$, $K \in \mathbb{O}_p^*$, то для $u \in \mathbf{SVI}((A^i), (F^i), K)$ справедлива оцінка (11) з відповідними спрощеннями.

## 2. Допоміжні твердження.

**Лема 1.** Нехай $R^* \geq 1$, $p \in \mathbb{P}^*$, $(A^i) \in \mathbb{A}_p^*$, $(F^{i,1}), (F^{i,2}) \in \mathbb{F}_p$, $K \in \mathbb{O}_p$, $u^1, u^2 \in K$ такі, що

$$\int_{\Omega_{R^*}} \{\sum_{i=1}^{n}(A^i(x,u^m,\nabla u^m), (w(v-u^m))_{x_i}) +$$

$$+(A^0(x,u^m,\nabla u^m), w(v-u^m))\} dx \geq$$

$$\geq \int\limits_{\Omega_{R^*}} \{\sum_{i=1}^{n}(F^{i,m},(w(v-u^m))_{x_i})+$$

$$+(F^{0,m},w(v-u^m))\}d\,x \qquad (12)$$

для будь-яких $m \in \{1,2\}$, $v \in K$, $w \in C_c^{1,+}(\overline{\Omega})$, $\operatorname{supp} w \subset \overline{\Omega}_{R^*}$.

Тоді для будь-яких додатних чисел $R_0, R$ $R_0 < R \leq R^*$, $R \geq 1$, правильна нерівність

$$\int\limits_{\Omega_{R_0}} \big[|\nabla u^{1,2}(x)|^2 + K_1|u^{1,2}(x)|^2+$$

$$+|u^{1,2}(x)|^{p(x)}\big]\,d\,x \leq \left(\frac{R}{R-R_0}\right)^s \Big[C_1 R^{n-\frac{q}{q-2}}+$$

$$+C_2\int\limits_{\Omega_R}\{|(F^{0,1}-F^{0,2})(x)|^{p^*(x)}+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}|(F^{i,1}-F^{i,2})(x)|^2\}d\,x\Bigg], \qquad (13)$$

де $u^{1,2} \stackrel{\mathrm{def}}{=} u^1 - u^2$; а $q$, $s$, $C_1, C_2$ — такі ж, як у формулюванні теореми 1.

Доведення леми 1 аналогічне доведенню леми зі статті [9, ст.73].

**Лема 2.** Для довільної функції $v \in [L_{p(\cdot),\mathrm{loc}}(\Omega)]^N$, де $p \in \mathbb{P}$, справедливі оцінки

$$\Psi_p(\|v\|_{[L_{p(\cdot)}(\Omega_k)]^N}) \leq \rho_{p,k}(v) \leq$$

$$\leq \Phi_p(\|v\|_{[L_{p(\cdot)}(\Omega_k)]^N}), \qquad (14)$$

$$\Psi_{\frac{1}{p}}(\rho_{p,k}(v)) \leq \|v\|_{[L_{p(\cdot)}(\Omega_k)]^N} \leq \Phi_{\frac{1}{p}}(\rho_{p,k}(v)), (15)$$

де $k \in \mathbb{N}$, $\rho_{p,k}(v) = \int\limits_{\Omega_k}|v(x)|^{p(x)}d\,x$, $\Phi_p(s) = \max\{|s|^{p_0}, |s|^{p_1}\}$, $\Psi_p(s) = \min\{|s|^{p_0}, |s|^{p_1}\}$.

Ця лема подібна до леми 1 з роботи [12, ст. 312] і її доведення не викликає труднощів.

Нехай $p \in \mathbb{P}^*$ і $(A^i) \in \mathbb{A}_p^{**}$, $K \in \mathbb{O}_p^*$, $F^0 \in [L_{2,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})]^N$, $k$ — яке-небудь натуральне число. Позначимо через $F^{0,k}$ звуження $F^0$ на $\Omega_k$. Нехай $U$ — замкнений лінійний підпростір простору $\mathbb{U}_p$ такий, що $K = \{v \in U : v \geq 0 \text{ на } \Omega\}$. Позначимо $U_k := \{v \in U : \operatorname{supp} v \subset \Omega_k\}$, $\widetilde{U}_k$ — простір, складений зі звужень елементів простору $U_k$ на $\Omega_k$, з нормою $H^1(\Omega_k)$. Простір $\widetilde{U}_k$ є замкненим підпростором простору $H^1(\Omega_k)$. Позначимо через $\widetilde{U}_k^*$ — спряжений до $\widetilde{U}_k$ простір, а через $\langle\cdot,\cdot\rangle_k$, $[\cdot,\cdot]_k$ — скалярні добутки відповідно на $\widetilde{U}_k^* \times \widetilde{U}_k$ і в $[L_2(\Omega_k)]^N$.

Розглянемо оператор

$$L_k : \widetilde{U}_k \longrightarrow \widetilde{U}_k^*,$$

визначений за правилом

$$\langle L_k v, \widetilde{v}\rangle_k := \int\limits_{\Omega_k}\{\sum_{i=1}^{n}\big(A^i(x,v,\nabla v),\widetilde{v}_{x_i}\big)+$$

$$+\big(A^0(x,v,\nabla v),\widetilde{v}\big)\}d\,x, \quad v,\widetilde{v} \in \widetilde{U}_k.$$

**Лема 3.** Оператор $L_k : \widetilde{U}_k \longrightarrow \widetilde{U}_k^*$ є обмеженим, коерцитивним, строго монотонним і семінеперервним.

*Доведення.* Доведемо, що оператор $L_k$ — обмежений. Справді, для будь-яких $v, w \in \widetilde{U}_k$, використовуючи нерівність Гельдера, умови 2), 4) і лему 2, отримаємо

$$\langle L_k v, w\rangle_k = \int\limits_{\Omega_k}\{\sum_{i=1}^{n}(A^i(x,v,\nabla v),w_{x_i})+$$

$$+(A^0(x,v,\nabla v),w)\}d\,x \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n}\|A^i(x,v,\nabla v)\|_{[L_2(\Omega_k)]^N}\|w_{x_i}\|_{[L_2(\Omega_k)]^N}+$$

$$+C_3\|A^0(x,v,\nabla v)\|_{[L_{p^*(\cdot)}(\Omega_k)]^N}\|w\|_{[L_{p(\cdot)}(\Omega_k)]^N} \leq$$

$$\leq \left(\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{\Omega_k}B^2(|v|+|\nabla v|)^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\|w\|_{[H^1(\Omega_k)]^N}+$$

$$+C_3\Phi_{\frac{1}{p^*}}\Big(\int\limits_{\Omega_k}|A^0(x,v(x),\nabla v(x))|^{p^*(x)}dx\Big)\times$$

$$\times\|w\|_{[L_{p(\cdot)}(\Omega_k)]^N} \leq \sqrt{2n}B\|v\|_{[H^1(\Omega_k)]^N}\times$$

$$\times\|w\|_{[H^1(\Omega_k)]^N} + C_3\Phi_{\frac{1}{p^*}}\Big(\int\limits_{\Omega_k} |h_0(|v(x)|^{p(x)-1}+$$

$$+|\nabla v(x)|^{\frac{2}{p^*(x)}}) + g_0|^{p^*(x)}dx\Big)\|w\|_{[L_{p(\cdot)}(\Omega_k)]^N}, \quad (16)$$

де $C_3 > 0$ — деяка стала.

Звідси, використавши ще раз нерівність Гельдера і лему 2, одержимо

$$\|L_k v\|_{\widetilde{U}_k^*} \leq \sqrt{2n}B\|v\|_{[H^1(\Omega_k)]^N}+$$

$$+C_3\Phi_{\frac{1}{p^*}}\Big(C_4[\Phi_p(\|v\|_{[L_{p(\cdot)}(\Omega_k)]^N})+$$

$$+\|v\|^2_{[H^1(\Omega_k)]^N}] + C_5\Big),\ v \in \widetilde{U}_k,$$

де $C_4, C_5 > 0$ — деякі сталі. Отож, оператор $L_k$ — обмежений.

Коерцитивність і строга монотонність оператора $L_k$ випливає з умови (5).

Для доведення того, що оператор $L_k$ — семінеперевний, тобто, що для будь-яких $v, \widetilde{v}, w \in \widetilde{U}_k$ функція $\varphi(\lambda) = \langle L_k(v + \lambda\widetilde{v}), w\rangle_k$, $\lambda \in \mathbb{R}$, — неперервна, достатньо показати, що $|\langle L_k(v+\lambda\widetilde{v}) - L_k v, w\rangle_k| \equiv \Big|\int\limits_{\Omega_k}\{\sum\limits_{i=1}^{n}(A^i(x, v(x)+\lambda\widetilde{v}(x), \nabla(v(x)+\lambda\widetilde{v}(x))) - A^i(x, v(x), \nabla v(x)), w_{x_i}(x)) + (A^0(x, v(x)+\lambda\widetilde{v}(x), \nabla(v(x)+\lambda\widetilde{v}(x))) - A^0(x, v(x), \nabla v(x)), w(x))\}d\,x\Big| \xrightarrow{\lambda\to 0} 0$. А це отримаємо з теореми Лебега про граничний перехід під знаком інтеграла. □

Для будь-якого дійсного числа $t$ покладемо

$$t^- = \begin{cases} -t, & \text{якщо} \quad t < 0, \\ 0, & \text{якщо} \quad t \geq 0. \end{cases}$$

**Лема 4.** Для кожного $l \in \mathbb{N}$ існує єдина функція $u^{k,l}$ з простору $\widetilde{U}_k$ така, що

$$\langle L_k u^{k,l}, v\rangle_k - l[(u^{k,l})^-, v]_k = [F^{0,k}, v]_k \quad (17)$$

для будь-яких $v \in \widetilde{U}_k$, причому послідовність $\{u^{k,l}\}_{l=1}^{\infty}$ є обмеженою в $\widetilde{U}_k$, а послідовності $\{l(u^{k,l})^-\}_{l=1}^{\infty}$, $\{L_k u^{k,l}\}_{l=1}^{\infty}$ — обмеженими в $[L_2(\Omega_k)]^N$.

*Доведення.* Нехай $l \in \mathbb{N}$ — яке-небудь число. Розглянемо оператор $\mathcal{D}_{k,l} : \widetilde{U}_k \longrightarrow \widetilde{U}_k^*$, який діє за правилом $\langle \mathcal{D}_{k,l}v, \widetilde{v}\rangle_k := \langle L_k v, \widetilde{v}\rangle_k - l[v^-, \widetilde{v}]_k$, $v, \widetilde{v} \in \widetilde{U}_k$.

Тоді тотожність (17) можна записати як операторне рівняння

$$\mathcal{D}_{k,l}u^{k,l} = F^{0,k}, \qquad u^{k,l} \in \widetilde{U}_k. \quad (18)$$

Використовуючи лему 3, легко переконатися, що оператор $\mathcal{D}_{k,l}$ обмежений, семінеперервний, монотонний і коерцитивний. Враховуючи це, а також те, що простір $\widetilde{U}_k$ — рефлексивний і сепарабельний, на підставі теореми 2.1 монографії [1,Гл.2,§2], отримаємо існування розв'язку рівняння (18). Його єдиність випливає із сильної монотонності оператора $L_k$.

Покажемо, що послідовність $\{u^{k,l}\}_{l=1}^{\infty}$ є обмеженою в $\widetilde{U}_k$. Поклавши у (17) $v = u^{k,l}$, де $l \in \mathbb{N}$ — яке-небудь число, отримаємо

$$\langle L_k u^{k,l}, u^{k,l}\rangle_k + l\|(u^{k,l})^-\|^2_{[L_2(\Omega_k)]^N} =$$

$$= [F^{0,k}, u^{k,l}]_k. \quad (19)$$

З умови 5) і того, що $(A^i) \in \mathbb{A}_p^{**}$, випливає

$$\langle L_k u^{k,l}, u^{k,l}\rangle_k \geq \int\limits_{\Omega_k}[K_1|u^{k,l}(x)|^2+$$

$$+K_2|\nabla u^{k,l}(x)|^2 + K_3|u^{k,l}(x)|^{p(x)}]d\,x. \quad (20)$$

Використовуючи нерівність Пуанкаре, нерівності Коші-Буняковського і Юнга, здобудемо

$$[F^{0,k}, u^{k,l}]_k \leq \|F^{0,k}\|_{[L_2(\Omega_k)]^N}\|u^{k,l}\|_{[L_2(\Omega_k)]^N} \leq$$

$$\leq C_6\|F^{0,k}\|_{[L_2(\Omega_k)]^N}\|\nabla u^{k,l}\|^2_{[L_2(\Omega_k)]^N} \leq$$

$$\leq \varepsilon\|\nabla u^{k,l}\|^2_{[L_2(\Omega_k)]^N} + C_7(\varepsilon)\|F^{0,k}\|^2_{[L_2(\Omega_k)]^N}, \quad (21)$$

де $C_6$, $C_7$ — сталі, які не залежать від $u^{k,l}$, а $\varepsilon > 0$ — довільна стала.

З (19)-(21), вибираючи значення $\varepsilon$ досить малим, отримаємо

$$\int\limits_{\Omega_k}[K_1|u^{k,l}(x)|^2 + |\nabla u^{k,l}(x)|^2 + |u^{k,l}(x)|^{p(x)}]d\,x \leq$$

$$\leq C_8 \|F^{0,k}\|_{[L_2(\Omega_k)]^N}, \tag{22}$$

де $C_8 > 0$ — стала, яка від $l$ не залежить.

З оцінки (22) випливає обмеженість послідовності $\{u^{k,l}\}_{l=1}^{\infty}$ в $\widetilde{U}_k$.

Тепер покажемо, що послідовність $\{l(u^{k,l})^-\}_{l=1}^{\infty}$ обмежена в $[L_2(\Omega_k)]^N$. Нехай $l \in \mathbb{N}$ — яке-небудь число. Оскільки $(u^{k,l})^- \in \widetilde{U}_k$, то, поклавши в (17) $v = (u^{k,l})^-$, отримаємо

$$\langle L_k u^{k,l}, (u^{k,l})^- \rangle_k - l\|(u^{k,l})^-\|^2_{[L_2(\Omega_k)]^N} =$$

$$= [F^{0,k}, (u^{k,l})^-]_k. \tag{23}$$

З (23), використовуючи умову 5) та нерівність Коші-Буняковського, одержимо

$$l\|(u^{k,l})^-\|^2_{[L_2(\Omega_k)]^N} = \langle L_k u^{k,l}, (u^{k,l})^- \rangle_k -$$

$$-[F^{0,k}, (u^{k,l})^-]_k \leq |[F^{0,k}, (u^{k,l})^-]_k| \leq$$

$$\leq \|F^{0,k}\|_{[L_2(\Omega_k)]^N} \|(u^{k,l})^-\|_{[L_2(\Omega_k)]^N}, \tag{24}$$

оскільки на підставі умови 5) $\langle L_k u^{k,l}, (u^{k,l})^- \rangle_k \leq 0$.

Послідовність $\{l(u^{k,l})^-\}_{l=1}^{\infty}$ обмежена в $[L_2(\Omega_k)]^N$, оскільки згідно з (24) маємо

$$l\|(u^{k,l})^-\|_{[L_2(\Omega_k)]^N} \leq \|F^{0,k}\|_{[L_2(\Omega_k)]^N}. \tag{25}$$

Доведемо обмеженість послідовності $\{L_k u^{k,l}\}_{l=1}^{\infty}$ в $[L_2(\Omega_k)]^N$. З (17), врахувавши (25), здобудемо

$$\langle L_k u^{k,l}, v \rangle_k = l[(u^{k,l})^-, v]_k + [F^{0,k}, v]_k \leq$$

$$\leq l\|(u^{k,l})^-\|_{[L_2(\Omega_k)]^N} \|v\|_{[L_2(\Omega_k)]^N} +$$

$$+\|F^{0,k}\|_{[L_2(\Omega_k)]^N} \|v\|_{[L_2(\Omega_k)]^N} \leq$$

$$\leq 2\|F^{0,k}\|_{[L_2(\Omega_k)]^N} \|v\|_{[L_2(\Omega_k)]^N}, \tag{26}$$

$v \in \widetilde{U}_k, l \in \mathbb{N}$.

Оскільки простір $\widetilde{U}_k$ є щільним в $[L_2(\Omega_k)]^N$, то з (26) випливає, що $L_k u^{k,l} \in [L_2(\Omega_k)]^N$, $l \in \mathbb{N}$, і $\|L_k u^{k,l}\|_{[L_2(\Omega_k)]^N} \leq 2\|F^{0,k}\|_{[L_2(\Omega_k)]^N}$, $l \in \mathbb{N}$, звідки маємо обмеженість послідовності $\{L_k u^{k,l}\}_{l=1}^{\infty}$ в $[L_2(\Omega_k)]^N$. $\square$

## 3. Доведення основних результатів.

*Доведення теореми 1.* Припустимо супротивне. Нехай для деяких $p \in \mathbb{P}^*$ і $(A^i) \in \mathbb{A}_p^*$, $(F^i) \in \mathbb{F}_p$, $K \in \mathbb{O}_p$ множина $\mathbf{SVI}((A^i), (F^i), K)$ складається з більш як одного елемента. Виберемо які-небудь два елемента з $\mathbf{SVI}((A^i), (F^i), K)$ і позначимо їх через $u^1$ та $u^2$. Згідно з лемою 1 і нашим припущенням маємо для довільних $R_0$, $R$ таких, що $0 < R_0 < R$, $R \geq 1$, нерівність

$$\int\limits_{\Omega_{R_0}} \left[|\nabla u^{1,2}(x)|^2 + |u^{1,2}(x)|^{p(x)}\right] dx \leq$$

$$\leq C_1 \left(\frac{R}{R - R_0}\right)^s R^{n - \frac{q}{q-2}}, \tag{27}$$

де $u^{1,2} = u^1 - u^2$, $q > 2$ таке, що $n - \frac{q}{q-2} < 0$, $s$ — деяке фіксоване число, а $C_1 > 0$— стала, яка від $R$ не залежить.

Отож, зафіксувавши довільним чином вибране $R_0$, перейдемо в (27) до границі при $R \to +\infty$. В результаті отримаємо, що $u^{1,2}(x) = 0$ для майже всіх $x \in \Omega_{R_0}$. Так як $R_0$ — довільне, то маємо $u^1(x) = u^2(x)$ для майже всіх $x \in \Omega$, тобто множина $\mathbf{SVI}((A^i), (F^i), K)$ не може містити більше одного елемента.

Нехай існує елемент $u \in \mathbf{SVI}((A^i), (F^i), K)$. На підставі леми 1, взявши у ній $u^1 = u$, $u^2 = 0$ та $F^{i,1} = F^i$, $F^{i,2}(\cdot) = A^i(\cdot, 0, 0)$, $i = \overline{0, n}$, отримаємо (11). $\square$

*Доведення теореми 2.* Нехай $p \in \mathbb{P}^*$ і $(A^i) \in \mathbb{A}_p^{**}$, $F^0 \in [L_{2,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})]^N$, $K \in \mathbb{O}_p^*$. Виберемо яке-небудь натуральне число $k$ і зафіксуємо його. Побудуємо послідовність вектор-функцій $\{u^{k,l}\}_{l=1}^{\infty}$, про яку говориться в лемі 4. За цією ж лемою маємо такі оцінки

$$\|u^{k,l}\|_{\widetilde{U}_k} \leq C_9(k),$$

$$l\|(u^{k,l})^-\|_{[L_2(\Omega_k)]^N} \leq C_{10}(k),$$

$$\|L_k u^{k,l}\|_{[L_2(\Omega_k)]^N} \le C_{11}(k),\ l \in \mathbb{N}, \qquad (28)$$

де $C_9(k), C_{10}(k), C_{11}(k) > 0$ — сталі, які від $l$ не залежать.

З (28) випливає існування функцій $u^k \in \widetilde{U}_k$, $\psi, \chi \in [L_2(\Omega_k)]^N$ та підпослідовностей відповідно послідовностей $\{u^{k,l}\}_{l=1}^{\infty}$, $\{l(u^{k,l})^-\}_{l=1}^{\infty}$ (за якими залишимо теж саме позначення, що і позначення відповідних послідовностей) таких, що

$$u^{k,l} \underset{l\to\infty}{\longrightarrow} u^k \ \text{ слабо в } \widetilde{U}_k,$$

$$\text{сильно в } [L_2(\Omega_k)]^N,$$

$$\text{м.в. на } \Omega_k, \qquad (29)$$

$$l(u^{k,l})^- \underset{l\to\infty}{\longrightarrow} \psi \ \text{ слабо в } [L_2(\Omega_k)]^N,$$

$$(u^{k,l})^- \underset{l\to\infty}{\longrightarrow} 0 \ \text{ сильно в } [L_2(\Omega_k)]^N, \qquad (30)$$

$$L_k u^{k,l} \underset{l\to\infty}{\longrightarrow} \chi \ \text{ слабо в } \ [L_2(\Omega_k)]^N. \qquad (31)$$

Оскільки $L_k u^{k,l} \in [L_2(\Omega_k)]^N$, $l \in \mathbb{N}$, то (17) можна записати у вигляді

$$\langle L_k u^{k,l}, \widetilde{v}\rangle_k - l[(u^{k,l})^-, \widetilde{v}]_k = [F^{0,k}, \widetilde{v}]_k \qquad (32)$$

для будь-яких $\widetilde{v} \in [L_2(\Omega_k)]^N$.

Перейдемо в (32) до границі при $l \to \infty$, врахувавши (28)-(31). Тоді отримаємо

$$\langle \chi, \widetilde{v}\rangle_k = [F^{0,k} + \psi, \widetilde{v}]_k,\ \widetilde{v} \in [L_2(\Omega_k)]^N. \qquad (33)$$

Звідси маємо $\chi = F^{0,k} + \psi$. З (29) і (31) випливає

$$\langle L_k u^{k,l}, u^{k,l}\rangle_k \underset{l\to\infty}{\longrightarrow} [\chi, u^k]_k, \qquad (34)$$

звідки, на підставі монотонності (див. доведення теореми 2.1 монографії [1,Гл.2,§2]) та семінеперервності оператора $L_k$, отримаємо

$$\chi = L_k u^k. \qquad (35)$$

Нехай $K_k := \{v \in K : \operatorname{supp} v \subset \Omega_k\}$, $\widetilde{K}_k$ — простір, складений зі звужень елементів $K_k$ на $\Omega_k$.

Покладемо в (32) $w(v - u^{k,l})$ замість $\widetilde{v}$, де $w \in C_c^{1,+}(\overline{\Omega})$, $v \in \widetilde{K}_k$. В результаті, врахувавши, що $((v)^- - (u^{k,l})^-, v - u^{k,l}) \le 0$, отримаємо

$$\langle L_k u^{k,l}, w(v - u^{k,l})\rangle_k \ge [F^{0,k}, w(v - u^{k,l})]_k \qquad (36)$$

для будь-яких $v \in K_k$. Перейшовши в (36) до границі при $l \to \infty$ і врахувавши (29), (31), (34), (35), отримаємо нерівність

$$\langle L_k u^k, w(v - u^k)\rangle_k \ge [F^{0,k}, w(v - u^k)]_k \qquad (37)$$

для будь-яких $v \in K_k$, $w \in C_c^{1,+}(\overline{\Omega})$.

Довизначимо для кожного $k \in \mathbb{N}$ функцію $u^k$ нулем на $\Omega \backslash \overline{\Omega}_k$ і залишимо за цим продовженням позначення $u^k$. Очевидно, що $u^k \in K_k$.

Зауважимо, що для довільних натуральних чисел $k$, $l$ таких, що $k > l + 1$, на підставі леми 1 (взявши $R_0 = l$, $R = k > l + 1$, $u^1 = u^k$, $u^2 = 0$, $F^{i,m} = 0$, $i = \overline{1,n}$, $m = \overline{1,2}$, $F^{0,1} = F^{0,k}$, $F^{0,2} = 0$) отримаємо

$$\int\limits_{\Omega_l} \left\{ |\nabla u^k(x)|^2 + |u^k(x)|^{p(x)} \right\} d\,x \le C_{12}(l), \qquad (38)$$

де $C_{12}(l) > 0$ — стала, яка залежить від $l$, але не залежить від $k$.

Тепер зауважимо, що для довільних натуральних $R$, $R_0$ $k$ і $m$ таких, що $0 < R_0 < R$, $R \ge 1$, $k > R$, $m > R$, з леми 1, отримаємо

$$\int\limits_{\Omega_{R_0}} \left\{ |\nabla (u^k - u^m)(x)|^2 + \right.$$

$$\left. + |(u^k - u^m)(x)|^{p(x)} \right\} d\,x \le$$

$$\le C_1 \left( \frac{R}{R - R_0} \right)^s R^{n - \frac{q}{q-2}}, \qquad (39)$$

де $C_1 > 0,\ s > 0,\ q > 2$— сталі, які не залежать від $k, m, R_0, R$, причому значення $q$ таке, що $n - q/(q-2) < 0$ (його можна таким вибрати, виходячи з умов теореми).

Міркуючи аналогічно як при доведенні теореми 1, отримаємо, що звуження членів послідовності $\{u^k\}_{k=1}^{\infty}$ на $\Omega_{R_0}$ утворює фундаментальну послідовність в просторі $\widetilde{U}_{R_0}$. Отже, існує функція $u \in K$ така, що

$$u^k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} u \quad \text{в} \quad U. \tag{40}$$

Покажемо, що $u$ є $\mathbf{SVI}((A^i),(F^i),K)$. Справді, з умови 4) на $(A^i)$ маємо

$$\int\limits_{\Omega_{R_0}} |A^i(x, u^k(x), \nabla u^k(x)) -$$

$$- A^i(x, u^m(x), \nabla u^m(x))|^2 d\,x \le$$

$$\le 2B^2 \int\limits_{\Omega_{R_0}} [|\nabla(u^k - u^m)(x)|^2 +$$

$$+ |(u^k - u^m)(x)|^2] d\,x \tag{41}$$

для будь-яких $k, m \in \mathbb{N}$ та $i = \overline{1,n}$.

З (40) та (41) отримаємо, що

$$A^i(\cdot, u^k(\cdot), \nabla u^k(\cdot)) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} A^i(\cdot, u(\cdot), \nabla u(\cdot))$$

$$\text{в } [L_{2,\mathrm{loc}}(\Omega)]^N,\ i = \overline{1,n}. \tag{42}$$

Нехай $l,\ k \in \mathbb{N}$ і $k > l + 1$. З умови 1), застосувавши нерівність Гельдера, отримаємо

$$\int\limits_{\Omega_l} |\, A^0(x, u^k(x), \nabla u^k(x))|^{p^*(x)} d\,x \le C_{13}(l), \tag{43}$$

де $C_{13}(l) > 0$ — стала, яка від $k$ не залежить.

З (40), (43) та з рефлексивності простору $L_{p^*(\cdot)}(\Omega_l)$ випливає, що існує підпослідовність $\{u^{k_j}\}_{j=1}^{\infty}$ послідовності $\{u^k\}_{k=1}^{\infty}$ та вектор-функція $\chi^l \in [L_{p^*(\cdot)}(\Omega_l)]^N$ такі, що $k_1 > l + 1$ і

$$u^{k_j}(x) \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} u(x) \text{ для майже всіх } x \in \Omega_l, \tag{44}$$

$$A^0(\cdot, u^{k_j}(\cdot), \nabla u^{k_j}(\cdot)) \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} \chi^l(\cdot)$$

$$\text{слабо в } [L_{p^*(\cdot)}(\Omega_l)]^N. \tag{45}$$

Тепер відмітимо, що з умови 1) та (44) випливає, що

$$A^0(x, u^{k_j}(x), \nabla u^{k_j}(x)) \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} A^0(x, u(x), \nabla u(x))$$

$$\text{для майже всіх} \quad x \in \Omega_l. \tag{46}$$

На підставі леми 1.3 монографії [1,Гл.1,§1] випливає, що $\chi^l(\cdot) = A^0(\cdot, u(\cdot), \nabla u(\cdot))$, тобто

$$A^0(\cdot, u^{k_j}(\cdot), \nabla u^{k_j}(\cdot)) \longrightarrow A^0(\cdot, u(\cdot), \nabla u(\cdot))$$

$$\text{слабо в } [L_{p^*(\cdot)}(\Omega_l)]^N. \tag{47}$$

Нехай $v \in K$. Виберемо значення $l \in \mathbb{N}$ таке, що $\operatorname{supp} v \subset \Omega_l$. Зі сказаного вище випливає існування підпослідовності $\{u^{k_j}\}$ послідовності $\{u^k\}$ такої, що $k_1 > l$, виконується (47) і

$$\langle L_{k_j} u^{k_j}, w(v - u^{k_j})\rangle_{k_j} \ge [F^{0,k_j}, w(v - u^{k_j})]_{k_j},$$

$$j \in \mathbb{N},\ w \in C_c^{1,+}(\overline{\Omega}),\ \operatorname{supp} w \subset \Omega_l. \tag{48}$$

Тепер зауважимо, що $w(v - u^{k_j}) \in \widetilde{U}_{k_j}$, а отже, врахувавши (40), (42) і (47), отримаємо

$$\langle L_{k_j} u^{k_j}, w(v - u^{k_j})\rangle_{k_j} =$$

$$= \int\limits_{\Omega_{k_j}} \{\sum_{i=1}^{n} (A^i(x, u^{k_j}, \nabla u^{k_j}), (w(v - u^{k_j}))_{x_i}) +$$

$$+ (A^0(x, u^{k_j}, \nabla u^{k_j}), w(v - u^{k_j}))\} d\,x =$$

$$= \int\limits_{\Omega_l} \{\sum_{i=1}^{n} \big(A^i(x, u^{k_j}, \nabla u^{k_j}), (w(v - u^{k_j}))_{x_i}\big) +$$

$$+\big(A^0(x,u^{k_j},\nabla u^{k_j}),w(v-u^{k_j})\big)\}d\,x \underset{j\to\infty}{\longrightarrow}$$

$$\underset{j\to\infty}{\longrightarrow}\int\limits_{\Omega_l}\{\sum_{i=1}^{n}\big(A^i(x,u,\nabla u),(w(v-u))_{x_i}\big)+$$

$$+\big(A^0(x,u,\nabla u),w(v-u)\big)\}d\,x. \qquad (49)$$

Аналогічно

$$[F^{0,k_j},w(v-u^{k_j})]_{k_j}=$$

$$=\int\limits_{\Omega_{k_j}}(F^{0,k_j},w(v-u^{k_j}))d\,x=$$

$$=\int\limits_{\Omega_l}(F^{0,k_j},w(v-u^{k_j}))d\,x \underset{j\to\infty}{\longrightarrow}$$

$$\underset{j\to\infty}{\longrightarrow}\int\limits_{\Omega_l}(F^0,w(v-u))d\,x. \qquad (50)$$

Перейдемо в (48) до границі при $j\to\infty$, врахувавши (49) і (50). В результаті отримаємо (8) для заданої функції $v$. В силу довільності функцій $v$ і $w$ робимо висновок, що $u\in\mathbf{SVI}((A^i),(F^i),K)$.

Залишилось показати, що для будь-яких множини $K\in\mathbb{O}_p^*$ та елементів $(A^i)$, $F^0$ і послідовностей елементів $\{(A^{i,k})\}_{k=1}^{\infty}$, $\{F^{0,k}\}_{k=1}^{\infty}$, відповідно, з $\mathbb{A}_p^{**}$ та $\mathbb{F}^*$ таких, що $(A^{i,k})\underset{k\to\infty}{\longrightarrow}(A^i)$ в $\mathbb{A}_p^{**}$, $F^{0,k}\underset{k\to\infty}{\longrightarrow}F^0$ в $[L_{2,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})]^N$, маємо $u^k\underset{k\to\infty}{\longrightarrow}u$ в $K$, де $u\in\mathbf{SVI}((A^i),F^0,K)$, $u^k\in\mathbf{SVI}((A^{i,k}),F^{0,k},K)$, $k\in\mathbb{N}$.

Це можна зробити, міркуючи так, як при доведенні теореми з [9, ст. 77]. Тоді для довільного $\varepsilon>0$ і будь-якого $R_0>0$ знаходиться таке $k_0$, що для будь-якого $k>k_0$

$$\int\limits_{\Omega_{R_0}}\left[|\nabla u^{k,0}|^2+|u^{k,0}|^{p(x)}\right]d\,x\le\varepsilon, \qquad (51)$$

де $u^{k,0}\overset{def}{=}u^k-u$. Це означає, що $u^k\underset{k\to\infty}{\longrightarrow}u$ в $\mathbb{U}_p$. $\square$

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ


1. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач // М.: Мир, 1972.

2. *H. Brezis, Kinderlehrer D.* The Smoothness of solutions to nonlinear variational inequalities // Indiana Univ. Math. J. — 1974. — **V.17**. — p.831—844.

3. *Simon L.* On uniqueness, regularity and stability of solutions of strongly nonlinear elliptic variational inequalities // Acta Math. Hungar. — 1990. — **V.55**, №34. — p.379—392.

4. *Kovalevsky A., Nicolosi F.* Boundness of solutions of degenerate nonlinear elliptic variational inequalities // Nonlinear Anal., Theory Methods Appl. — 1999. — **V.35**, №8. — p.987—999.

5. *Lin Zh.-H.* Elliptic hemivariational inequalities // Appl. Math. Lett. — 2003. — **V.16**, №6. —p.871—876.

6. *Mustonen V.* Strongly nonlinear elliptic variational inequalities in unbounded domains // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A. I. Mathematica. — 1977. — **V.3**. — p.59—74.

7. *Carl S., Le V. K. and Motreanu D.* Existance, comparison and compactness results for quasilinear variational-hemivariational inequalities // Internetional Journal of Mathematics and Marhematical Sciences. — 2005. — **V.3**. — p.401—417.

8. *Brezis H.* Semilinear equation in $\mathbb{R}^n$ without conditions at infinity //Appl. Math. Optim. — 1984. —**V.12.**— P.271—282.

9. *Бокало М.М., Кушнір О.В.* Про коректність крайових задач для квазілінійних еліптичних систем в необмежених областях // Математичні Студії. — 2005. — **T.24**, №1. — C.69—82.

10. *Kováčik O., Rákosnić J.* On spaces $L^{p(x)}(\Omega)$ and $W^{1,p(x)}$// Czechosl. Math. J. — 1991. — **V.41**, №4. — P.592—618.

11. *Самохин В.Н.* Об одном классе уравнений, обобщающих уравнения политропной фильтрации //Диференц. уравнения. — 1996.— **T.32**, №5. — C.643—651.

12. *Бугрій О. М.* Параболічні варіаційні нерівності в узагальнених просторах Лебега // Наукові записки Вінницького держ. пед. ун-ту ім. М. Коцюбинського. — Серія фіз.—мат. — 2002. — **Вип. 1**. — с.310—321.


Стаття надійшла до редколегії 13.02.2006