УДК 517.526

©2006 р. Д.І. Боднар, В.Р. Гладун

Тернопільський державний економічний університет,
Національний університет "Львівська політехніка"

ДЕЯКІ ОБЛАСТІ СТІЙКОСТІ ДО ЗБУРЕНЬ ГІЛЛЯСТИХ ЛАНЦЮГОВИХ ДРОБІВ З КОМПЛЕКСНИМИ ЕЛЕМЕНТАМИ

Встановлено області елементів та області значень гіллястих ланцюгових дробів з комплексними елементами. Досліджено властивість стійкості до збурень гіллястих ланцюгових дробів загального та спеціального вигляду. Побудовано області відносної стійкості таких гіллястих ланцюгових дробів.

The regions of elements and regions of values of branched continued fractions with complex elements are established. The property of stability to perturbations of branched continued fractions of general and special type is investigated. The regions of the relative stability of such branched continued fractions are constructed.

Гіллясті ланцюгові дроби (ГЛД) отримали застосування в теорії функцій і теорії чисел, обчислювальній математиці і теоретичній фізиці, в теорії диференціальних рівнянь, механіці, електротехніці. У теорії функцій ГЛД використовуються для побудови дробово-раціональних наближень функцій багатьох змінних, зокрема багатовимірних гіпергеометричних функцій, для інтерполяції і апроксимації функцій. Оскільки елементи гіллястого ланцюгового дробу, у вигляді якого представлено розв'язок задачі обчислюються, взагалі кажучи, наближено, то виникає питання дослідження його стійкості до збурень.

Властивість стійкості до збурень ГЛД є однією із фундаментальних. Як показують числові експерименти та теоретичні дослідження, відносні похибки підхідних дробів гіллястих ланцюгових дробів, що виникають в результаті збурення їх елементів, є або обмеженими, або ж повільно зростають з ростом кількості поверхів. В. П. Терських вперше звернув увагу на стійкість неперервних дробів та їх узагальнень, що виникали в технічних розрахунках [21]. Питання обчислювальної стійкості неперервних дробів, в залежності від алгоритмів їх обчислення, розглядалося у роботах Г. Бланча [1], В. Гаучі [2], Н. Мейкона, М. Баскервілі [7], У. Джоунса, В. Трона [3, 15]. У роботах П. І. Боднарчука, В. Я. Скоробогатька та їх учнів досліджувалась асимптотична стійкість гіллястих ланцюгових дробів [13, 14], коли враховувались лише головні частини відносних похибок елементів і нехтувались нескінченно малі вищих порядків. У роботах Д. І. Боднара [9, 10, 11] одержані формули відносних похибок підхідних дробів гіллястих ланцюгових дробів та встановлені оцінки цих похибок у випадках, коли елементи є додатними або задовольняють умови багатовимірного аналогу теореми Ворпіцького. М. О. Недашковський дослідив обчислювальну стійкість ГЛД, елементи яких задовольняють умови типу Прінгсгейма [17,18], а також – стійкість ГЛД, які є розв'язками систем лінійних алгебраїчних рівнянь, встановив формули для похибок підхідних дробів з урахуванням машинних операцій [20]. Аналогічні дослідження здійснювалися в роботі [16]. Формули абсолютних похибок підхідних дробів вперше були встановлені та використані при дослідженні інтегральних ланцюгових дробів Т. М. Антоновою [19]. Деякі множини стійкості до збурень неперервних дробів та окремих типів ГЛД встановлено в роботі [11].

При аналізі похибок підхідних дробів, що виникають при збуренні елементів ГЛД, встановлено, що вони залежать не тільки від похибок елементів, але і від самих елементів. У зв'язку з цим виникає задача встановлення областей стійкості до збурень ГЛД.

При дослідженні збіжності неперервних дробів і ГЛД використовуються властивості дробово-лінійних відображень, області елементів і області значень, деякі спеціальні нерівності та метод мажорант [4-6, 8, 9, 20]. Зв'язок між областями елементів і відповідними їм областями значень дозволяє встановити області збіжності та стійкості до збурень неперервних дробів і ГЛД.

Інтерпретуючи стійкість ГЛД як їх неперервну залежність від елементів автори прийшли до означення стійкості до збурень та областей стійкості до збурень нескінченних ГЛД [12]. Використовуючи області елементів і відповідні їм області значень, побудовано та досліджено області відносної стійкості до збурень нескінченних ГЛД з комплексними елементами.

Розглянемо ГЛД з комплексними елементами

$$a_0\left(b_0+\mathop{\mathbf{D}}_{k=1}^{\infty}\sum_{i_k=1}^{N}\frac{a_{i(k)}}{b_{i(k)}}\right)^{-1}, \qquad (1)$$

де $i(k)=i_1i_2\ldots i_k$ – мультиіндекс. Нехай $I_0=\{0\}$, $I_k=\{\,i(k):1\le i_p\le N, p=\overline{1,k}\,\}$, $k\ge 1$.

Скінченні ГЛД

$$f^{(s)}=a_0\left(b_0+\mathop{\mathbf{D}}_{k=1}^{s}\sum_{i_k=1}^{N}\frac{a_{i(k)}}{b_{i(k)}}\right)^{-1},\ s\ge 0,$$

називають його s-ми підхідними дробами. Величини, які визначаються рекурентними співвідношеннями

$$Q_{i(p)}^{(s)}=b_{i(p)}+\sum_{i_{p+1}=1}^{N}\frac{a_{i(p+1)}}{Q_{i(p+1)}^{(s)}},$$

$i\,(p)\in I_p$, $p=\overline{s-1,0}$, $s\ge 1$, де $Q_{i(s)}^{(s)}=b_{i(s)}$, $i\,(s)\in I_s$, $s\ge 0$, називають залишками s-го підхідного дробу ГЛД (1). Позначимо

$$g_{i(p)}^{(s)}=a_{i(p)}\left(Q_{i(p-1)}^{(s)}Q_{i(p)}^{(s)}\right)^{-1}, \qquad (2)$$

$i\,(p)\in I_p$, $p=\overline{1,s}$, $s\ge 1$.

Розглянемо також ГЛД

$$\widehat{a}_0\left(\widehat{b}_0+\mathop{\mathbf{D}}_{k=1}^{\infty}\sum_{i_k=1}^{N}\frac{\widehat{a}_{i(k)}}{\widehat{b}_{i(k)}}\right)^{-1}, \qquad (3)$$

який будемо вважати збуреним до ГЛД (1). Нехай $\alpha_{i(k)}, \beta_{i(k)}, \varepsilon_{i(p)}^{(s)}$ – відносні похибки елементів ГЛД (1) $a_{i(k)}, b_{i(k)}$ і величин $Q_{i(p)}^{(s)}$ відповідно, тобто $\widehat{a}_{i(k)}=a_{i(k)}\left(1+\alpha_{i(k)}\right)$, $\widehat{b}_{i(k)}=b_{i(k)}\left(1+\beta_{i(k)}\right)$, $i\,(k)\in I_k$, $k\ge 0$, $\widehat{Q}_{i(p)}^{(s)}=Q_{i(p)}^{(s)}\left(1+\varepsilon_{i(p)}^{(s)}\right)$, $i\,(p)\in I_p$, $p=\overline{0,s}$, $s\ge 0$, у припущенні, що всі $a_{i(k)}\ne 0$, $b_{i(k)}\ne 0$, $Q_{i(p)}^{(s)}\ne 0$. Нехай величини $\widehat{\alpha}_{i(k)}, \widehat{\beta}_{i(k)}, \widehat{\varepsilon}_{i(p)}^{(s)}$ задаються співвідношеннями $a_{i(k)}=\widehat{a}_{i(k)}\left(1+\widehat{\alpha}_{i(k)}\right)$, $b_{i(k)}=\widehat{b}_{i(k)}\left(1+\widehat{\beta}_{i(k)}\right)$, $i\,(k)\in I_k$, $k\ge 0$, $Q_{i(p)}^{(s)}=\widehat{Q}_{i(p)}^{(s)}\left(1+\widehat{\varepsilon}_{i(p)}^{(s)}\right)$, $i\,(p)\in I_p$, $p=\overline{0,s}$, $s\ge 0$, у припущенні, що всі $\widehat{a}_{i(k)}\ne 0$, $\widehat{b}_{i(k)}\ne 0$, $\widehat{Q}_{i(p)}^{(s)}\ne 0$.

Для відносних похибок $\varepsilon_{i(p)}^{(s)}, \widehat{\varepsilon}_{i(p)}^{(s)}$ легко встановити такі рекурентні формули:

$$\varepsilon_{i(p-1)}^{(s)}=\left(1-\sum_{i_p=1}^{N}g_{i(p)}^{(s)}\right)\beta_{i(p-1)}+$$

$$+\sum_{i_p=1}^{N}g_{i(p)}^{(s)}\alpha_{i(p)}(1+\widehat{\varepsilon}_{i(p)}^{(s)})+\sum_{i_p=1}^{N}g_{i(p)}^{(s)}\widehat{\varepsilon}_{i(p)}^{(s)}, \qquad (4)$$

$$\widehat{\varepsilon}_{i(p-1)}^{(s)}=\left(1-\sum_{i_p=1}^{N}\widehat{g}_{i(p)}^{(s)}\right)\widehat{\beta}_{i(p-1)}+$$

$$+\sum_{i_p=1}^{N}\widehat{g}_{i(p)}^{(s)}\widehat{\alpha}_{i(p)}(1+\varepsilon_{i(p)}^{(s)})+\sum_{i_p=1}^{N}\widehat{g}_{i(p)}^{(s)}\varepsilon_{i(p)}^{(s)}, \qquad (5)$$

$i(p-1)\in I_{p-1}$, $p=\overline{1,s}$, $s\ge 1$, причому $\varepsilon_{i(s)}^{(s)}=\beta_{i(s)}$, $\widehat{\varepsilon}_{i(s)}^{(s)}=\widehat{\beta}_{i(s)}$, $s\ge 0$.

Послідовно використовуючи співвідношення (4), (5), отримуємо формулу для відносної похибки s -го підхідного дробу ГЛД (1):

$$\varepsilon^{(s)} = \alpha_0 + (1+\alpha_0)\left(\left(1 - \sum_{i_1=1}^{N} q_{i(1)}^{(s)}\right)\beta_0' + \right.$$

$$+ \sum_{k=1}^{s} \sum_{i_1,\ldots,i_k=1}^{N} \prod_{l=1}^{k} q_{i(l)}^{(s)} \left(1 - \sum_{i_{k+1}=1}^{N} q_{i(k+1)}^{(s)}\right)\beta_{i(k)}' +$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{s} \sum_{i_1,\ldots,i_k=1}^{N} \prod_{l=1}^{k} q_{i(l)}^{(s)} \gamma_{i(k)}\right), \qquad (6)$$

де

$$q_{i(l)}^{(s)} = \begin{cases} g_{i(l)}^{(s)}, & l = 2n, \\ \widehat{g}_{i(l)}^{(s)}, & l = 2n+1, \end{cases}$$

$$\beta_{i(k)}' = \begin{cases} \beta_{i(k)}, & k = 2n+1, \\ \widehat{\beta}_{i(k)}, & k = 2n, \end{cases}$$

$$\gamma_{i(k)} = \begin{cases} \alpha_{i(k)}\left(1 + \varepsilon_{i(k)}^{(s)}\right), & k = 2n, \\ \widehat{\alpha}_{i(k)}\left(1 + \widehat{\varepsilon}_{i(k)}^{(s)}\right), & k = 2n+1, \end{cases}$$

і $q_{i(s+1)}^{(s)} = 0$, $s \geq 0$.

Нехай $\{\Omega_{i(k)}\}$, $\emptyset \neq \Omega_{i(k)} \subset \mathbb{C}\times\mathbb{C}$, $i(k) \in I_k$, $k \geq 0$, – послідовність областей елементів ГЛД (1), (3), тобто

$$\left(a_{i(k)}, b_{i(k)}\right) \in \Omega_{i(k)}, \ \left(\widehat{a}_{i(k)}, \widehat{b}_{i(k)}\right) \in \Omega_{i(k)}. \quad (7)$$

Означення 1 ([12]). Послідовність областей $\left\{\Omega_{i(k)}\right\}$, $i(k) \in I_k$, $k \geq 0$, назвемо послідовністю областей відносної стійкості до збурень ГЛД (1), якщо:

1) послідовність $\left\{\Omega_{i(k)}\right\}$ є послідовністю областей збіжності ГЛД (1), (3), тобто виконання умов (7) забезпечує збіжність відповідних ГЛД;

2) для кожного дійсного числа ε, $\varepsilon > 0$, існує таке дійсне число δ, $\delta > 0$, що при всіх $\left(a_{i(k)}, b_{i(k)}\right) \in \Omega_{i(k)}$, $a_{i(k)} \neq 0$, $b_{i(k)} \neq 0$, $i(k) \in I_k$, $k \geq 0$, і всіх $\left(\widehat{a}_{i(k)}, \widehat{b}_{i(k)}\right) \in \Omega_{i(k)}$, $i(k) \in I_k$, $k \geq 0$, таких, що $\left|\left(\widehat{a}_{i(k)} - a_{i(k)}\right)/a_{i(k)}\right| < \delta$, $\left|\left(\widehat{b}_{i(k)} - b_{i(k)}\right)/b_{i(k)}\right| < \delta$, $i(k) \in I_k$, $k \geq 0$, виконуються нерівності $\left|\left(\widehat{f}^{(s)} - f^{(s)}\right)\Big/ f^{(s)}\right| < \varepsilon$, $s \geq 0$.

Означення 2 ([9]). Сукупність областей $\{\Omega_{i(k)}\}$, $\emptyset \neq \Omega_{i(k)} \subset \mathbb{C}\times\mathbb{C}$, $i(k) \in I_k$, $k \geq 0$, називають послідовністю областей елементів ГЛД (1), $\{V_{i(k)}\}$, $\emptyset \neq V_{i(k)} \subset \mathbb{C}$, $i(k) \in I_k$, $k \geq 0$, – послідовністю областей значень, що відповідають $\{\Omega_{i(k)}\}$, якщо:

$$\frac{a_{i(k)}}{b_{i(k)}} \in V_{i(k)}, \qquad (8)$$

для всіх $\left(a_{i(k)}, b_{i(k)}\right) \in \Omega_{i(k)}$, $i(k) \in I_k$, $k \geq 0$,

$$a_{i(k)}\left(b_{i(k)} + \sum_{i_{k+1}=1}^{N} \upsilon_{i(k+1)}\right)^{-1} \in V_{i(k)}, \qquad (9)$$

для всіх $\upsilon_{i(k+1)} \in V_{i(k+1)}$ і $\left(a_{i(k)}, b_{i(k)}\right) \in \Omega_{i(k)}$, $i(k) \in I_k$, $k \geq 0$.

Теорема 1. Нехай $\left\{V_{i(k)}\right\}$, $\left\{\Omega_{i(k)}\right\}$ – сукупності областей, що визначаються співвідношеннями

$$V_{i(2k)} = \left\{z \in \mathbb{C} : \left|z - \Gamma_{i(2k)}\right| \leq \rho_{i(2k)}\right\}, \quad (10)$$

$\Gamma_{i(2k)} \in \mathbb{C}$, $\rho_{i(2k)} \in \mathbb{R}^+$, $\left|\Gamma_{i(2k)}\right| < \rho_{i(2k)}$, $i(2k) \in I_{2k}$, $k \geq 0$,
$V_{i(2k+1)} =$

$$\left\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\left(z e^{-i\varphi_{2k+1}}\right) \geq -p_{i(2k+1)}\right\}, \quad (11)$$

$-\pi < \varphi_{2k+1} \leq \pi$, $p_{i(2k+1)} \in \mathbb{R}^+$, $i(2k+1) \in I_{2k+1}$, $k \geq 0$,
$\Omega_{i(2k)} =$

$$\left\{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}\times\mathbb{C} : \left|z_1 e^{-i\varphi_{2k+1}} - 2\Gamma_{i(2k)} \times \right.\right.$$
$$\times \left.\left(\mathrm{Re}\left(z_2 e^{-i\varphi_{2k+1}}\right) - p_{i(2k)}^{*}\right)\right| + |z_1| \leq$$
$$\left.\leq 2\rho_{i(2k)}\left(\mathrm{Re}\left(z_2 e^{-i\varphi_{2k+1}}\right) - p_{i(2k)}^{*}\right)\right\}, \quad (12)$$

$i(2k) \in I_{2k}$, $k \geq 0$,

$$\Omega_{i(2k+1)} = \left\{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}\times\mathbb{C} : |z_1|\,\rho_{i(2k+1)}^{*} - \right.$$
$$\mathrm{Re}\left(z_1\left(\bar{z}_2 + \overline{\Gamma}_{i(2k+1)}^{*}\right)e^{-i\varphi_{2k+1}}\right) \leq$$
$$\left.\leq p_{i(2k+1)}\left(\left|z_2 + \Gamma_{i(2k+1)}^{*}\right|^2 - \rho_{i(2k+1)}^{*2}\right)\right\}, \quad (13)$$

$i(2k+1) \in I_{2k+1}$, $k \geq 0$, де $\Gamma_{i(2k+1)}^{*} = \sum\limits_{i_{2(k+1)}=1}^{N} \Gamma_{i(2(k+1))}$, $\rho_{i(2k+1)}^{*} = \sum\limits_{i_{2(k+1)}=1}^{N} \rho_{i(2(k+1))}$, $i(2k+1) \in I_{2k+1}$, $p_{i(2k)}^{*} = \sum\limits_{i_{2k+1}=1}^{N} p_{i(2k+1)}$, $i(2k) \in I_{2k}$, $k \geq 0$.

Тоді $\{V_{i(k)}\}$ – послідовність областей значень, що відповідають послідовності областей елементів $\{\Omega_{i(k)}\}$.

Доведення. Умови

$$\mathrm{Re}\left(b_{i(2k)}e^{-i\varphi_{2k+1}}\right) - p^*_{i(2k)} \geq 0, \tag{14}$$

$$\left|b_{i(2k+1)} + \Gamma^*_{i(2k+1)}\right| - \rho^*_{i(2k+1)} \geq 0 \tag{15}$$

є необхідними, щоб відповідно області (12), (13) були непорожними. Якщо виконуються умови (14), (15), то нерівності, якими визначаються області (12), (13), справджуються при $a_{i(2k)} = 0$, $a_{i(2k+1)} = 0$ відповідно і тому $\Omega_{i(k)} \neq \emptyset$, $i\,(k) \in I_k$, $k \geq 0$.

Область $S_{i(2k+1)} := b_{i(2k+1)} + \sum\limits_{i_{2k+2}=1}^{N} V_{i(2k+2)}$ є кругом з центром в точці $b_{i(2k+1)} + \Gamma^*_{i(2k+1)}$ радіуса $\rho^*_{i(2k+1)}$. Якщо

$$\left|b_{i(2k+1)} + \Gamma^*_{i(2k+1)}\right| - \rho^*_{i(2k+1)} = 0,$$

то $0 \in \partial S_{i(2k+1)}$ і функція $w = \dfrac{a_{i(2k+1)}}{z}$ відображає область $S_{i(2k+1)}$ в напівплощину $\Big\{z \in \mathbb{C} : -\left|a_{i(2k+1)}\right| + 2\left|b_{i(2k+1)} + \Gamma^*_{i(2k+1)}\right| \times$

$$\mathrm{Re}\left(ze^{i\left(\arg\left(b_{i(2k+1)}+\Gamma^*_{i(2k+1)}\right)-\arg a_{i(2k+1)}\right)}\right) \geq 0\Big\}.$$

Тоді для виконання умови (9) необхідно і достатньо, щоб

$$\arg a_{i(2k+1)} = \arg\left(b_{i(2k+1)} + \Gamma^*_{i(2k+1)}\right) + \varphi_{2k+1}.$$

При виконанні останньої рівності $\Omega_{i(2k+1)} \neq \emptyset$.

Нехай

$$\left|b_{i(2k+1)} + \Gamma^*_{i(2k+1)}\right| - \rho^*_{i(2k+1)} > 0.$$

Тоді $0 \notin S_{i(2k+1)}$ і функція $w = \dfrac{a_{i(2k+1)}}{z}$ відображає область $S_{i(2k+1)}$ в круг з центром в точці $q_{i(2k+1)} = a_{i(2k+1)}\left(\bar{b}_{i(2k+1)} + \overline{\Gamma}^*_{i(2k+1)}\right) \times$

$$\times\left(\left|b_{i(2k+1)} + \Gamma^*_{i(2k+1)}\right|^2 - \rho^{*2}_{i(2k+1)}\right)^{-1}$$

радіуса $r_{i(2k+1)} = \left|a_{i(2k+1)}\right|\rho^*_{i(2k+1)} \times$

$$\times\left(\left|b_{i(2k+1)} + \Gamma^*_{i(2k+1)}\right|^2 - \rho^{*2}_{i(2k+1)}\right)^{-1}.$$

Для виконання умови (9) необхідно і достатньо, щоб:

$$q_{i(2k+1)} \in V_{i(2k+1)}, \tag{16}$$

$$\min\left\{\left|q_{i(2k+1)} - v\right|,\ v \in \partial V_{i(2k+1)}\right\} \geq r_{i(2k+1)}. \tag{17}$$

Підставивши величину $q_{i(2k+1)}$ у співвідношення, яким визначається область (11), маємо
$\mathrm{Re}\left(a_{i(2k+1)}\left(\bar{b}_{i(2k+1)} + \overline{\Gamma}^*_{i(2k+1)}\right)e^{-i\varphi_{2k+1}}\right) \geq$
$-p_{i(2k+1)}\left(\left|b_{i(2k+1)} + \Gamma^*_{i(2k+1)}\right|^2 - \rho^{*2}_{i(2k+1)}\right)$.
Остання нерівність випливає з нерівності, якою визначаються області (13), що доводить виконання умови (16).

Точка z, $z \in \partial V_{i(2k+1)}$, така, що $\left|z - q_{i(2k+1)}\right| = \min\limits_{v\in\partial V_{i(2k+1)}}\left\{\left|q_{i(2k+1)} - v\right|\right\}$, визначається формулою
$z = \exp\left(i\varphi_{2k+1}\right)\left(-p_{i(2k+1)} + \right.$

$$\left. + i\mathrm{Im}\left(q_{i(2k+1)}\exp\left(-i\varphi_{2k+1}\right)\right)\right).$$

Тоді $\left|z - q_{i(2k+1)}\right| = p_{i(2k+1)} +$

$$\left(\left|b_{i(2k+1)} + \Gamma^*_{i(2k+1)}\right|^2 - \rho^{*2}_{i(2k+1)}\right)^{-1} \times$$

$$\mathrm{Re}\left(a_{i(2k+1)}\left(\bar{b}_{i(2k+1)} + \overline{\Gamma}^*_{i(2k+1)}\right)e^{-i\varphi_{2k+1}}\right)$$

і умова (17) еквівалентна нерівності, якою визначаються області (13).

Область $S_{i(2k)} := b_{i(2k)} + \sum\limits_{i_{2k+1}=1}^{N} V_{i(2k+1)}$ є напівплощиною $\left\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\left(\left(z - b_{i(2k)}\right)e^{-i\varphi_{2k+1}}\right) \geq -p^*_{i(2k)}\right\}$.

Якщо

$$\mathrm{Re}\left(b_{i(2k)}e^{-i\varphi_{2k+1}}\right) - p^*_{i(2k)} = 0,$$

то $0 \in \partial S_{i(2k)}$ і функція $w = \dfrac{a_{i(2k)}}{z}$ відображає область $S_{i(2k)}$ в напівплощину

$$\left\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\left(ze^{i\left(\varphi_{2k+1}-\arg a_{i(2k)}\right)}\right) \geq 0\right\}.$$

Тоді для виконання умови (9) необхідно і достатньо, щоб $a_{i(2k)} = 0$. При виконанні останньої рівності $\Omega_{i(2k)} \neq \emptyset$.

Нехай

$$\operatorname{Re}\left(b_{i(2k)}e^{-i\varphi_{2k+1}}\right)-p^*_{p_{i(2k)}}>0.$$

Тоді функція $w=\dfrac{a_{i(2k)}}{z}$ відображає область $S_{i(2k)}$ в круг з центром в точці $q_{i(2k)}=r_{i(2k)}e^{i\left(\arg a_{i(2k)}-\varphi_{2k+1}\right)}$ радіуса $r_{i(2k)}=$

$$\left|a_{i(2k)}\right|\left(2\left(\operatorname{Re}\left(b_{i(2k)}e^{-i\varphi_{2k+1}}\right)-p^*_{i(2k)}\right)\right)^{-1}$$

Для виконання умови (9) необхідно і достатньо, щоб $\left|\Gamma_{i(2k)}-q_{i(2k)}\right|+r_{i(2k)}\le\rho_{i(2k)}$. Остання нерівність еквівалентна співвідношенню, яким визначаються області (12). Теорему доведено.

Нехай $\left\{E_{i(k)}\right\}$, $E_{i(k)}\subset\mathbb{C}$ – послідовніть областей елементів ГЛД

$$a_0\left(1+\mathop{\mathbf{D}}_{k=1}^{\infty}\sum_{i_k=1}^{N}\frac{a_{i(k)}}{1}\right)^{-1}, \qquad (18)$$

тобто $a_{i(k)}\in E_{i(k)}$, $i\left(k\right)\in I_k$, $k\ge 0$.

Наслідок. Нехай $\left\{V_{i(k)}\right\}$ – сукупність областей, що визначаються співвідношеннями (10), (11), $\left\{\Omega_{i(k)}\right\}$ – сукупність областей, що визначаються співвідношеннями
$E_{i(2k)}=$

$$\left\{z:\left|ze^{-i\varphi_{2k+1}}-2\Gamma_{i(2k)}\left(\cos\left(\varphi_{2k+1}\right)-p^*_{i(2k)}\right)\right|\right.$$

$$\left.+\left|z\right|\le 2\rho_{i(2k)}\left(\cos\left(\varphi_{2k+1}\right)-p^*_{i(2k)}\right)\right\}, \qquad (19)$$

$i\left(2k\right)\in I_{2k},\ k\ge 0$,
$E_{i(2k+1)}=\{z:\left|z\right|\rho^*_{i(2k+1)}-$

$$\operatorname{Re}\left(z\left(1+\overline{\Gamma}^*_{i(2k+1)}\right)e^{-i\varphi_{2k+1}}\right)\le$$

$$\le p_{i(2k+1)}\left(\left|1+\Gamma^*_{i(2k+1)}\right|^2-\rho^{*2}_{i(2k+1)}\right)\Big\}, \qquad (20)$$

$i\left(2k+1\right)\in I_{2k+1}$, $k\ge 0$, де $\Gamma_{i(2k)}\in\mathbb{C}$, $\rho_{i(2k)}\in\mathbb{R}^+$ і $\left|\Gamma_{i(2k)}\right|<\rho_{i(2k)}$, $i\left(2k\right)\in I_{2k}$, $k\ge 0$; $-\pi/2<\varphi_{2k+1}<\pi/2$, $p_{i(2k+1)}\in\mathbb{R}^+$, $i\left(2k+1\right)\in I_{2k+1}$, $k\ge 0$.

Тоді $\{V_{i(k)}\}$ – послідовність областей значень, що відповідають послідовності областей елементів $\left\{E_{i(k)}\right\}$.

Теорема 2. Нехай відносні похибки елементів ГЛД (18) є рівномірно обмеженими

$$\left|\alpha_{i(k)}\right|\le\alpha<1,\ i\left(k\right)\in I_k,\ k\ge 0. \qquad (21)$$

Сукупність областей $\left\{E_{i(k)}\right\}$, $i\left(k\right)\in I_k$, $k\ge 0$, де $E_{i(2k+1)}=E^{(1)}_{i(2k+1)}\cap E^{(2)}_{i(2k+1)}$, $E^{(2)}_{i(2k+1)}=\left\{z:\left|z\right|\le M_{i(2k+1)}\right\}$, а множини $E_{i(2k)}$, $E^{(1)}_{i(2k+1)}$ визначаються співвідношеннями (19), (20) відповідно, причому

$$\cos\left(\varphi_{2k+1}\right)>p^*_{i(2k)},\ \left|1+\Gamma^*_{i(2k+1)}\right|>\rho^*_{i(2k+1)},$$

є послідовністю областей відносної стійкості до збурень ГЛД (18), якщо збігається ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty}\prod_{l=0}^{k}\eta_l, \qquad (22)$$

де

$$\eta_{2l}=\max_{i(2l)\in I_{2l}}\left\{\left(\cos\left(\varphi_{2l+1}\right)-p^*_{i(2l)}\right)^{-1}\times\right.$$

$$\left.\sum_{i_{2l+1}=1}^{N}M_{i(2l+1)}\left(\left|1+\Gamma^*_{i(2l+1)}\right|-\rho^*_{i(2l+1)}\right)^{-1}\right\},$$

$$\eta_{2l-1}=\max_{i(2l-1)\in I_{2l-1}}\left\{\sum_{i_{2l}=1}^{N}\left(\left|\Gamma_{i(2l)}\right|+\rho_{i(2l)}\right)\times\right.$$

$$\left.\times\left(\left|1+\Gamma^*_{i(2l-1)}\right|-\rho^*_{i(2l-1)}\right)^{-1}\right\}. \qquad (23)$$

Для відносної похибки s-го підхідного дробу ГЛД (18) справджується оцінка

$$\left|\varepsilon^{(s)}\right|\le\alpha\left(1+\frac{1+\alpha}{1-\alpha}\sum_{k=0}^{s-1}\prod_{l=0}^{k}\eta_l\right). \qquad (24)$$

Доведення. Враховуючи формулу (6), для відносної похибки s-го підхідного дробу ГЛД (18) маємо оцінку
$\left|\varepsilon^{(s)}\right|\le$

$$\le\left|\alpha_0\right|+\left|1+\alpha_0\right|\sum_{k=1}^{s}\sum_{i_1,i_2,\dots i_k=1}^{N}\left|\gamma_{i(k)}\right|\prod_{l=1}^{k}\left|q^{(s)}_{i(l)}\right|.$$

Оцінимо зверху величини $\sum\limits_{i_{2l}=1}^{N}\left|q^{(s)}_{i(2l)}\right|$, $i\left(2l-1\right)\in I_{2l-1}$, $l=\overline{1,\left[\left(k-1\right)/2\right]}$, $k=\overline{3,s}$, $\sum\limits_{i_{2l+1}=1}^{N}\left|q^{(s)}_{i(2l+1)}\right|$, $i\left(2l\right)\in I_{2l}$, $l=\overline{0,\left[k/2-1\right]}$,

$k = \overline{2,s}$. Враховуючи те, що $a_{i(k)}/Q_{i(k)}^{(s)} \in V_{i(k)}$, $\widehat{a}_{i(k)}/\widehat{Q}_{i(k)}^{(s)} \in V_{i(k)}$, $k = \overline{0,s}$, де області $V_{i(k)}$ визначаються співвідношеннями (10), (11), маємо:

$$\sum_{i_{2l}=1}^{N} \left|q_{i(2l)}^{(s)}\right| = \sum_{i_{2l}=1}^{N} \left|\frac{a_{i(2l)}}{Q_{i(2l-1)}^{(s)} Q_{i(2l)}^{(s)}}\right| \le$$

$$\le \left(\left|1+\Gamma_{i(2l-1)}^{*}\right| - \rho_{i(2l-1)}^{*}\right)^{-1} \times$$

$$\times \sum_{i_{2l}=1}^{N} \left(\left|\Gamma_{i(2l)}\right| + \rho_{i(2l)}\right) \le \eta_{2l-1}, \qquad (25)$$

$$\sum_{i_{2l+1}=1}^{N} \left|q_{i(2l+1)}^{(s)}\right| = \sum_{i_{2l+1}=1}^{N} \left|\frac{\widehat{a}_{i(2l+1)}}{\widehat{Q}_{i(2l)}^{(s)} \widehat{Q}_{i(2l+1)}^{(s)}}\right| \le$$

$$\sum_{i_{2l+1}=1}^{N} M_{i(2l+1)} \left(\left|1+\Gamma_{i(2l+1)}^{*}\right| - \rho_{i(2l+1)}^{*}\right)^{-1} \times$$

$$\times \left(\cos\left(\varphi_{2l+1}\right) - p_{i(2l)}^{*}\right)^{-1} \le \eta_{2l}.$$

Для величин $\sum_{i_k=1}^{N} \left|q_{i(k)}^{(s)} \gamma_{i(k)}^{(s)}\right|$, $k = \overline{1,s}$, справджуються такі оцінки:

$$\sum_{i_{2k}=1}^{N} \left|q_{i(2k)}^{(s)} \gamma_{i(2k)}^{(s)}\right| = \sum_{i_{2k}=1}^{N} \left|\frac{\widehat{a}_{i(2k)} \widehat{\alpha}_{i(2k)}}{Q_{i(2k-1)}^{(s)} \widehat{Q}_{i(2k)}^{(s)}}\right| \le$$

$$\max_{i(2k) \in I_{2k}} \left\{\left|\widehat{\alpha}_{i(2k)}\right|\right\} \left(\left|1+\Gamma_{i(2k-1)}^{*}\right| - \rho_{i(2k-1)}^{*}\right)^{-1}$$

$$\times \sum_{i_{2k}=1}^{N} \left(\left|\Gamma_{i(2k)}\right| + \rho_{i(2k)}\right) \le \alpha (1-\alpha)^{-1} \eta_{2k-1}, \qquad (26)$$

$k = \overline{1, [s/2]}$, $\sum_{i_{2k+1}=1}^{N} \left|q_{i(2k+1)}^{(s)} \gamma_{i(2k+1)}^{(s)}\right| =$

$$\sum_{i_{2k+1}=1}^{N} \left|\frac{a_{i(2k+1)} \alpha_{i(2k+1)}}{\widehat{Q}_{i(2k)}^{(s)} Q_{i(2k+1)}^{(s)}}\right| \le$$

$$\max_{i(2k+1) \in I_{2k+1}} \left\{\left|\alpha_{i(2k+1)}\right|\right\} \left(\cos\left(\varphi_{2k+1}\right) - p_{i(2k)}^{*}\right)^{-1}$$

$$\times \sum_{i_{2k+1}=1}^{N} M_{i(2k+1)} \left(\left|1+\Gamma_{i(2k+1)}^{*}\right| - \rho_{i(2k+1)}^{*}\right)^{-1}$$

$\le \alpha \eta_{2k}$, $k = \overline{0, [(s-1)/2]}$.

Отже, для відносної похибки s-го підхідного дробу ГЛД (18) справджується оцінка (24). Із оцінки (24) випливає, що збіжність ряду (22) забезпечує виконання умови 2) означення областей відносної стійкості до збурень ГЛД (18).

Із збіжності ряду виплливає розбіжність до нуля добутку $\prod_{k=0}^{\infty} \eta_k$. Із умови $\prod_{k=0}^{\infty} \eta_k = 0$ і теореми про збіжність ГЛД на основі фундаментальних нерівностей [9], доходимо висновку, що послідовність областей $\left\{E_{i(k)}\right\}$ є послідовністю областей збіжності ГЛД (18) і збуреного до нього ГЛД. Теорему доведено.

Теорема 3. Нехай відносні похибки ГЛД

$$a_0 \left(1 + \mathop{\mathbf{D}}_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{N_{i(k-1)}} \frac{a_{i(k)}}{1}\right)^{-1}, \qquad (27)$$

де $N_{i(2k)} = 1$, $i(2k) \in I_{2k}$, $k \ge 0$, $N_{i(2k+1)} = N$, $i(2k+1) \in I_{2k+1}$, $k \ge 0$, задовольняють умови (21).

Сукупність областей

$$E_{i(2k)} = \left\{z \in \mathbb{C} : \left|z - 2\Gamma_{i(2k)} \left(1 - p_{i(2k+1)}\right)\right| + \right.$$
$$\left. + |z| \le 2\rho_{i(2k)} \left(1 - p_{i(2k+1)}\right)\right\}, \qquad (28)$$

$i(2k) \in I_{2k}$, $k \ge 0$,

$$E_{i(2k+1)} = \left\{z \in \mathbb{C} : |z| \rho_{i(2k+1)}^{*} - \operatorname{Re}\left(z\left(1 + \overline{\Gamma}_{i(2k+1)}^{*}\right)\right) \le \right.$$
$$\left. p_{i(2k+1)} \left(\left|1+\Gamma_{i(2k+1)}^{*}\right|^2 - \rho_{i(2k+1)}^{*2}\right)\right\}, \qquad (29)$$

$i(2k+1) \in I_{2k+1}$, $k \ge 0$, де $\rho_{i(2k)} \in \mathbb{R}^+$, $\Gamma_{i(2k)} \in \mathbb{C}$, $\left|\Gamma_{i(2k)}\right| < \rho_{i(2k)}$, $i(2k) \in I_{2k}$, $k \ge 0$, $0 < p_{i(2k+1)} \le \frac{1}{2}$, $\left|1+\Gamma_{i(2k+1)}^{*}\right| > \rho_{i(2k+1)}^{*}$, $i(2k+1) \in I_{2k+1}$, $k \ge 0$, є послідовністю областей відносної стійкості до збурень ГЛД (27), якщо збігається ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \prod_{l=1}^{k} \eta_{2l-1}, \qquad (30)$$

де величини η_{2l-1}, $l \geq 1$, визначаються згідно з (23). Для відносної похибки s -го підхідного дробу ГЛД (27) справджується оцінка

$$\varepsilon^{(s)} \leq \alpha \left(1 + \frac{1+\alpha}{1-\alpha}\left(\frac{|1+\Gamma_1^*| + \rho_1^*}{|1+\Gamma_1^*| - \rho_1^*} + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \sum_{k=1}^{s-1} \prod_{l=1}^{[(k-1)/2]+1} \eta_{2l-1}\right)\right). \qquad (31)$$

Доведення. Враховуючи формулу (6), для відносної похибки s -го підхідного дробу маємо оцінку
$\left|\varepsilon^{(s)}\right| \leq$

$$|\alpha_0| + |1+\alpha_0| \sum_{k=1}^{s} \sum_{i_2, i_4, \ldots, i_{2[k/2]}=1}^{N} \left|\gamma_{i(k)}\right| \prod_{l=1}^{k} \left|q_{i(l)}^{(s)}\right|.$$

Оцінимо зверху величини $\left|q_{i(2l+1)}^{(s)}\right|$, $i(2l+1) \in I_{2l+1}$, $l = \overline{0, [k/2-1]}$, $k = \overline{2, s}$.

Перетворимо: $q_{i(2l+1)}^{(s)} = \dfrac{\widehat{a}_{i(2l+1)}}{\widehat{Q}_{i(2l)}^{(s)} \widehat{Q}_{i(2l+1)}^{(s)}} =$

$$\frac{\widehat{a}_{i(2l+1)}/\widehat{Q}_{i(2l+1)}^{(s)}}{1+\widehat{a}_{i(2l+1)}/\widehat{Q}_{i(2l+1)}^{(s)}} = 1 - \frac{1}{1+\widehat{a}_{i(2l+1)}/\widehat{Q}_{i(2l+1)}^{(s)}}.$$

Враховуючи те, що $\widehat{a}_{i(2l+1)}/\widehat{Q}_{i(2l+1)}^{(s)} \in V_{i(2l+1)}$, де

$$V_{i(2k+1)} = \left\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re} z \geq -p_{i(2k+1)}\right\},$$

$i(2k+1) \in I_{2k+1}$, $k \geq 0$, – підпослідовність послідовності множин значень $\left\{V_{i(k)}\right\}$, що відповідають послідовності множин елементів (28), (29), маємо

$$1 - \left(1 + \widehat{a}_{i(2l+1)}/\widehat{Q}_{i(2l+1)}^{(s)}\right)^{-1} \in V'_{i(2l+1)},$$

де $V'_{i(2l+1)} = 1 - \left(1 + V_{i(2l+1)}\right)^{-1}$. Отже,

$$\left|1 - \left(1 + a_{i(2l+1)}/Q_{i(2l+1)}^{(s)}\right)^{-1}\right| \leq \sup_{v \in V'_{i(2l+1)}} |v|.$$

Оскільки $0 < p_{i(2k+1)} \leq \dfrac{1}{2}$, то функція $w = \dfrac{1}{z}$ відображає множину $1 + V_{i(2l+1)} = \left\{z \in C : \mathrm{Re}(z-1) \geq -p_{i(2l+1)}\right\}$ в круг $\dfrac{1}{1+V_{i(2l+1)}} =$

$$= \left\{\left|2z - \left(1-p_{i(2l+1)}\right)^{-1}\right| \leq \left(1-p_{i(2l+1)}\right)^{-1}\right\}$$

і $\sup\limits_{v \in V'_{i(2l+1)}} |v| =$

$$\left|1 - \frac{1}{2}\left(1-p_{i(2l+1)}\right)^{-1}\right| + \frac{1}{2}\left(1-p_{i(2l+1)}\right)^{-1} = 1.$$

Для величини $\sum\limits_{i_{2l}=1}^{N}\left|q_{i(2l)}^{(s)}\right|$, $i(2l-1) \in I_{2l-1}$, $l = \overline{1, [k/2]-1}$, $k = \overline{4, s}$, $\sum\limits_{i_{2k}=1}^{N}\left|q_{i(2k)}^{(s)}\gamma_{i(2k)}^{(s)}\right|$, $i(2k-1) \in I_{2k-1}$, $k = \overline{1, [s/2]}$, справджуються оцінки (25), (26) відповідно.

Знайдемо оцінки зверху для величин $\sum\limits_{i_{2k}=1}^{N}\left|q_{i(2k)}^{(s)}\right|\left|q_{i(2k+1)}^{(s)}\gamma_{i(2k+1)}^{(s)}\right|$, $k = \overline{0, [(s-1)/2]}$, де $q_0^{(s)} = 1$:
для $k = \overline{1, [(s-1)/2]}$ маємо
$\sum\limits_{i_{2k}=1}^{N}\left|q_{i(2k)}^{(s)}\right|\left|q_{i(2k+1)}^{(s)}\gamma_{i(2k+1)}^{(s)}\right| =$

$$\sum_{i_{2k}=1}^{N}\left|\frac{\widehat{a}_{i(2k)}\left(1+\widehat{\alpha}_{i(2k)}\right)}{Q_{i(2k-1)}^{(s)}\widehat{Q}_{i(2k)}^{(s)}}\right|\left|\frac{a_{i(2k+1)}\alpha_{i(2k+1)}}{Q_{i(2k)}^{(s)}Q_{i(2k+1)}^{(s)}}\right| \leq$$

$$\max_{i(2k) \in I_{2k}}\left\{\left|\frac{\alpha_{i(2k)1}}{1+\alpha_{i(2k)}}\right|\right\} \frac{\sum\limits_{i_{2k}=1}^{N}\left(\left|\Gamma_{i(2k)}\right| + \rho_{i(2k)}\right)}{\left|1+\Gamma_{i(2k-1)}^*\right| - \rho_{i(2k-1)}^*}$$

$\leq \alpha(1-\alpha)^{-1}\eta_{2k-1}$,
для $k=0$ маємо

$$\left|q_1^{(s)}\gamma_1^{(s)}\right| = \left|\frac{\widehat{a}_1\widehat{\alpha}_1}{\widehat{Q}_0^{(s)}\widehat{Q}_{i(1)}^{(s)}}\right|\left|\frac{\widehat{Q}_1^{(s)}}{Q_1^{(s)}}\right| \leq$$

$$\alpha(1-\alpha)^{-1}\left(|1+\Gamma_1^*| + \rho_1^*\right)\left(|1+\Gamma_1^*| - \rho_1^*\right)^{-1}.$$

Отже, для відносної похибки s-го підхідного дробу ГЛД (27) справджується оцінка (31).

Повторюючи доведення теореми 2, доходимо висновку, що збіжність ряду (30) забезпечує виконання умов 1), 2) означення областей відносної стійкості до збурень ГЛД (27). Теорему доведено.

Нехай $\{G_{i(k)}\}$, $G_{i(k)} \subset \mathbb{C}$ – послідовніть областей елементів ГЛД

$$\left(b_0 + \mathop{\mathbf{D}}_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{N} \frac{1}{b_{i(k)}}\right)^{-1}, \qquad (32)$$

тобто $b_{i(k)} \in G_{i(k)}$, $i(k) \in I_k$, $k \geq 0$.

Теорема 4. Нехай відносні похибки елементів ГЛД (32) є рівномірно обмеженими

$$\left|\beta_{i(k)}\right| \leq \beta < 1,\ i(k) \in I_k,\ k \geq 0, \qquad (33)$$

і нехай $p_{i(k)}, i(k) \in I_k, k \geq 0,$ – дійсні додатні числа. Тоді послідовність областей $G_{i(k)} =$

$$\left\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}z \geq p_{i(k)}\right\}, i(k) \in I_k, k \geq 0, \quad (34)$$

є послідовністю областей відносної стійкості до збурень ГЛД (32), якщо збігається ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{1 + \frac{\eta_k}{4}} \prod_{l=0}^{k-1} \eta_l, \qquad (35)$$

де $\eta_k = \max\limits_{i(k)\in I_k} \left\{p_{i(k)}^{-1} \sum\limits_{i_{k+1}=1}^{N} p_{i(k+1)}^{-1}\right\}, i(k) \in I_k, k \geq 0$, причому для відносної похибки s-го підхідного дробу справджується оцінка $\left|\varepsilon^{(s)}\right| \leq$

$$\frac{\beta}{1-\beta}\left(\sqrt{1+\frac{\eta_0}{4}} + \sum_{k=1}^{s} \sqrt{1+\frac{\eta_k}{4}} \prod_{l=0}^{k-1} \eta_l\right). \qquad (36)$$

Доведення. Із формули (6) випливає оцінка відносної похибки s-го підхідного дробу ГЛД (32)

$$\left|\varepsilon^{(s)}\right| \leq \max_{i(k)\in I_k, k=\overline{0,s}} \left\{\left|\beta'_{i(k)}\right|\right\} \left(\left|1 - \sum_{i_1=1}^{N} q_{i(1)}^{(s)}\right| + \sum_{k=1}^{s} \sum_{i_1,i_2,\dots,i_k=1}^{N} \left|1 - \sum_{i_{k+1}=1}^{N} q_{i(k+1)}^{(s)}\right| \left|\prod_{l=1}^{N} q_{i(l)}^{(s)}\right|\right).$$

Оскільки $0 \notin G_{i(k)}$, то функція $w = \dfrac{1}{z}$ відображає область $G_{i(k)}$ в круг з центром в точці $\left(2p_{i(k)}\right)^{-1}$ радіуса $\left(2p_{i(k)}\right)^{-1}$. Тоді $\sum\limits_{i_k=1}^{N} \dfrac{1}{G_{i(k)}} =$

$$\left\{z : \left|z - \sum_{i_k=1}^{N} \left(2p_{i(k)}\right)^{-1}\right| \leq \sum_{i_k=1}^{N} \left(2p_{i(k)}\right)^{-1}\right\}$$

і область $G_{i(k-1)} + \sum\limits_{i_k=1}^{N} \dfrac{1}{G_{i(k)}}$ є напівплощиною $\left\{z \in\ : \mathrm{Re}z \geq p_{i(k-1)}\right\}$. Таким чином, сукупність областей (34) є послідовністю областей значень залишків ГЛД (32) та збуреного до нього ГЛД і для залишків $Q_{i(k)}^{(s)}$, $\widehat{Q}_{i(k)}^{(s)}$ справджуються оцінки $\left|Q_{i(k)}^{(s)}\right| \geq p_{i(k)}$, $\left|\widehat{Q}_{i(k)}^{(s)}\right| \geq p_{i(k)},\ i(k) \in I_k,\ k = \overline{0,s},\ s \geq 0$. Тоді $\sum\limits_{i_k=1}^{N} \left|g_{i(k)}^{(s)}\right| \leq p_{i(k-1)}^{-1} \sum\limits_{i_k=1}^{N} p_{i(k)}^{-1},\ \sum\limits_{i_k=1}^{N} \left|\widehat{g}_{i(k)}^{(s)}\right| \leq p_{i(k-1)}^{-1} \sum\limits_{i_k=1}^{N} p_{i(k)}^{-1},\ i(k-1) \in I_{k-1},\ k = \overline{1,s},$ $s \geq 1$.

Оцінимо зверху величини $\left|1 - \sum\limits_{i_k=1}^{N} g_{i(k)}^{(s)}\right|$, $i(k-1) \in I_{k-1}, k = \overline{1,s}, s \geq 1$. Перетворимо: $1 - \sum\limits_{i_k=1}^{N} g_{i(k)}^{(s)} =$

$$\frac{b_{i(k-1)}}{Q_{i(k-1)}^{(s)}} = \left(1 + \frac{1}{b_{i(k-1)}} \sum_{i_k=1}^{N} \frac{1}{Q_{i(k)}^{(s)}}\right)^{-1}.$$

Тоді $1 - \sum\limits_{i_k=1}^{N} g_{i(k)}^{(s)} \in \left(1 + \dfrac{1}{b_{i(k-1)}} \sum\limits_{i_k=1}^{N} \dfrac{1}{G_{i(k)}}\right)^{-1}$,

де $\left(1 + \dfrac{1}{b_{i(k-1)}} \sum\limits_{i_k=1}^{N} \dfrac{1}{G_{i(k)}}\right)^{-1} =$

$$\left\{z : \left|z - \frac{2\left|b_{i(k-1)}\right|^2 + b_{i(k-1)} \sum\limits_{i_k=1}^{N} p_{i(k)}^{-1}}{2\left(\left|b_{i(k-1)}\right|^2 + \mathrm{Re}b_{i(k-1)} \sum\limits_{i_k=1}^{N} p_{i(k)}^{-1}\right)}\right| \leq \frac{\left|b_{i(k-1)}\right| \sum\limits_{i_k=1}^{N} p_{i(k)}^{-1}}{2\left(\left|b_{i(k-1)}\right|^2 + \mathrm{Re}b_{i(k-1)} \sum\limits_{i_k=1}^{N} p_{i(k)}^{-1}\right)}\right\}.$$

Нескладно обчислити, що

$$\sup_{\substack{p_{i(k-1)}\le x<+\infty,\\ -\infty<y<+\infty}} \frac{1}{2}\left(x^2+y^2+x\sum_{i_k=1}^{N}p_{i(k)}^{-1}\right)^{-1}\times$$

$$\left(\sqrt{\left(2\left(x^2+y^2\right)+xp_{i(k-1)}^*\right)^2+y^2p_{i(k-1)}^{*2}+}\right.$$

$$\left.+p_{i(k-1)}^*\sqrt{x^2+y^2}\right)=\sqrt{1+\frac{p_{i(k-1)}^*}{4p_{i(k-1)}}},$$

де $p_{i(k-1)}^*=\sum\limits_{i_k=1}^{N}p_{i(k)}^{-1}$. Отже, $\left|1-\sum\limits_{i_k=1}^{N}g_{i(k)}^{(s)}\right|\le \sqrt{1+\dfrac{p_{i(k-1)}^*}{4p_{i(k-1)}}}\le\sqrt{1+\dfrac{\eta_{k-1}}{4}}$. Оскільки $\widehat{b}_{i(k)}\in G_{i(k)}$, то такі ж оцінки справджуються для величин $\left|1-\sum\limits_{i_k=1}^{N}\widehat{g}_{i(k)}^{(s)}\right|$.

Отже, для відносної похибки s-го підхідного дробу ГЛД (32) справджується оцінка (36). Із оцінки (36) випливає, що збіжність ряду (35) забезпечує виконання умов 1), 2) означення областей відносної стійкості до збурень ГЛД (32). Теорему доведено.

Перетворення гіллястого ланцюгового дробу, що залишає незмінними значення всіх його підхідних дробів, називається еквівалентним. Легко перевірити, що ГЛД

$$g_0a_0\left(g_0b_0+\mathop{\mathbf{D}}_{k=1}^{\infty}\sum_{i_k=1}^{N}\frac{g_{i(k-1)}g_{i(k)}a_{i(k)}}{g_{i(k)}b_{i(k)}}\right)^{-1}, \tag{37}$$

де $g_{i(k)}$, $g_{i(k)}\ne 0$, $i(k)\in I_k$, $k\ge 0$, – довільні комплексні числа, еквівалентний ГЛД (32).

Твердження. Величини $g_{i(p)}^{(s)}$, що визначаються згідно з (2), інваріантні відносно перетворень еквівалентності (37).

Доведення. Нехай $Q_{i(p)}^{(s)*}$ – залишки s-го підхідного дробу ГЛД (37). Покажемо, що $Q_{i(p)}^{(s)*}=\rho_{i(p)}Q_{i(p)}^{(s)}$, $i(p)\in I_p$, $p=\overline{0,s}$, $s\ge 0$. Застосуємо метод математичної індукції відносно p, $p=s,s-1,\ldots 0$. При $p=s$ рівність очевидна. Припустивши, що вона справджується для деякого $p=k+1$, $1\le k+1\le s$, при $p=k$ маємо

$$Q_{i(k)}^{(s)*}=\rho_{i(k)}b_{i(k)}+\sum_{i_{k+1}=1}^{N}\frac{\rho_{i(k)}\rho_{i(k+1)}a_{i(k+1)}}{Q_{i(k+1)}^{(s)*}}=$$

$$\rho_{i(k)}\left(b_{i(k)}+\sum_{i_{k+1}=1}^{N}\frac{a_{i(k+1)}}{Q_{i(k+1)}^{(s)}}\right)=\rho_{i(k)}Q_{i(k)}^{(s)}.$$

Тоді $g_{i(p)}^{(s)*}=\dfrac{\rho_{i(p-1)}\rho_{i(p)}a_{i(p)}}{Q_{i(p-1)}^{(s)*}Q_{i(p)}^{(s)*}}=\dfrac{a_{i(p)}}{Q_{i(p-1)}^{(s)}Q_{i(p)}^{(s)}}=g_{i(p)}^{(s)}$, $i(p)\in I_p$, $p=\overline{1,s}$, $s\ge 0$. Твердження доведено.

Теорема 5. Нехай відносні похибки елементів ГЛД (32) задовольняють умови (33) і нехай $p_{i(k)}$, $p_{i(k)}>0$, $i(k)\in I_k$, $k\ge 0$, φ, $-\pi<\varphi\le\pi$, – задані дійсні числа.

Сукупність множин

$$G_{i(2k+1)}=\left\{z\in\mathbb{C}:\operatorname{Re}\left(z\exp\left(i\varphi\right)\right)\ge p_{i(2k+1)}\right\} \tag{38}$$

$i(2k+1)\in I_{2k+1}$, $k\ge 0$,

$$G_{i(2k)}=\left\{z\in\mathbb{C}:\operatorname{Re}\left(z\exp\left(-i\varphi\right)\right)\ge p_{i(2k)}\right\}, \tag{39}$$

$i(2k)\in I_{2k}$, $k\ge 0$, є послідовністю областей відносної стійкості до збурень ГЛД (32), якщо збігається ряд (35), причому для відносної похибки s-го підхідного дробу справджується оцінка (36).

Доведення. Розглянемо ГЛД

$$\rho_0\left(\rho_0b_0+\mathop{\mathbf{D}}_{k=1}^{\infty}\sum_{i_k=1}^{N}\frac{\rho_{i(k-1)}\rho_{i(k)}}{\rho_{i(k)}b_{i(k)}}\right)^{-1},$$

$$\rho_0\left(\rho_0\widehat{b}_0+\mathop{\mathbf{D}}_{k=1}^{\infty}\sum_{i_k=1}^{N}\frac{\rho_{i(k-1)}\rho_{i(k)}}{\rho_{i(k)}\widehat{b}_{i(k)}}\right)^{-1}$$

еквівалентні відповідно до ГЛД (32) та збуреного до нього ГЛД, де $\rho_{i(2k)}=e^{i\varphi}$, $i(2k)\in I_{2k}$, $\rho_{i(2k+1)}=e^{-i\varphi}$, $i(2k+1)\in I_{2k+1}$, $k\ge 0$, і $b_{i(k)},\widehat{b}_{i(k)}\in\left\{z\in C:\operatorname{Re}z\ge p_{i(k)}\right\}$, $i(k)\in I_k$, $k\ge 0$. Тоді величини $b_{i(2k)}e^{i\varphi}$, $\widehat{b}_{i(2k)}e^{i\varphi}\in G_{i(2k)}$, $b_{i(2k+1)}e^{-i\varphi}$, $\widehat{b}_{i(2k+1)}e^{-i\varphi}\in G_{i(2k+1)}$, де $G_{i(2k+1)}$, $G_{i(2k)}$ визначаються згідно з (38), (39).

Враховуючи теорему 4 і наведене твердження доходимо висновку, що для відносної похибки s-го підхідного дробу ГЛД (32), областями елементів якого є області (38), (39) , справджується оцінка (36). Із оцінки (36) випливає, що збіжність ряду (35) забезпечує виконання умов 1), 2) означення областей відносної стійкості до збурень ГЛД (32). Теорему доведено.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Blanch G.* Numerical evaluation of continued fractions // SIAM Rev., 1964, **v. 7**. p. 383-421.

2. *Gautschi W.* Computational aspects of three-term recurrence relations // SIAM Rev., 1967, **v. 9**. P. 24-82.

3. *Jones W. B., Thton W. J.* Numerical stability in evaluating continued fractions // Math. Comp., 1974, **v. 28**.P. 795-810.

4. *Jones W. B., Thton W. J.* Convergence of continued fractions // Canad. J. Math., 1968, **v. 20**. P. 1037-1055.

5. *Lorentzen L., Waadeland H.* Continued Fractions with Application. Amsterdam: North-Holland. - 1992. 606p.

6. *Lorentzen L.* Convergence criteria for continued fractions $K(a_n/1)$ based on value sets // Contemp. Math., 1999, **v. 236**. P. 205-255.

7. *Macon N., Baskervill M.* On the generation of errors in the digital evaluation of continued fractions // J. Assoc. Comp. Mach., 1956, **v. 5**. P. 211-221.

8. *Wall H. S.* Analytic theory of continued fractions. New York: Van Nostrand. 1948, 433p.

9. *Боднар Д. И.* Ветвящиеся цепные дроби. - Киев: Наук. думка, 1986. - 176 с.

10. *Боднар Д. И.* Оценка погрешности вычисления ветвящихся цепных дробей // Докл. АН УССР. Сер. А. - 1975. - **№ 12**. - С. 1059-1062.

11. *Боднар Д. І., Воделанд Х., Кучмінська Х. Й., Сусь О.М.* Про стійкість гіллястих ланцюгових дробів // Мат. методи та фіз.-мех. поля. - 1994. - **37**. - С. 3-7.

12. *Боднар Д., Гладун В.* Достатні умови стійкості до збурень гіллястих ланцюгових дробів з додатними елементами // Мат. методи та фіз.-мех. поля. -2002. - **45, № 1**. - С. 22-27.

13. *Боднарчук П. И., Иванел В. К., Дзюбка Б. Е., Пустомельников И. П., Слоневский Р. В.* Вычислительная устойчивость цепных и ветвящихся цепных дробей // В кн.: Цепные дроби и их прим.- К:ИМ АН УССР. 1976. - С. 12-14.

14. *Боднарчук П. І., Скоробогатько В. Я.* Гіллясті ланцюгові дроби та їх застосування. - К.: Наук. думка, 1974. - 272 с.

15. *Джоунс У., Трон В.* Непрерывные дроби. Аналитическая теория и приложения. - М.: Мир, 1985. - 414 с.

16. *Иванов В. В., Бесараб П.Н., Данильченко Л.С. и др.* Оценки погрешностей округления для цепных и ветвящихся цепных дробей // В кн.: Цепные дроби и их применения. - К.: ИМ АН УССР. 1976. - С. 20-24.

17. *Недашковский Н. А.* О сходимости и вычислительной устойчивости ветвящихся цепных дробей некоторых типов // Мат. методы и физ.-мех. поля. - 1984. - Вып. **20**. - С. 27-31.

18. *Недашковський Н. О.* Збіжність і обчислювальна стійкість гіллястих ланцюгових дробів з елементами, що задовольняють умовам типу Прінгсгейма // - В кн.: Питання якісної теор. диф. р-нь та їх застосув. - К.: ІМ АН УРСР, 1978. - С. 43-44.

19. *Одноволова (Антонова) Т. Н.* Некоторые оценки погрешности вычисления интегральных цепных дробей // Докл. АН УССР. Сер А. - 1984. - **№ 7**. - С. 19-22.

20. *Скоробогатько В. Я.* Теория ветвящихся цепных дробей и ее применение в вычислительной математике. - М.: Наука. 1983. - 312 с.

21. *Терских В. П.* Метод цепных дробей в применении к исследованию колебаний механических систем: 2 т. - Л.: Судпромгиз, 1955. - Т. 1. - 376 с.; Т. 2. - 332 с.

Стаття надійшла до редколегії 28.02.2006