УДК 517.929

©2006 р. Я.Й. Бігун

Чернівецький національний університет ім. Юрія Федьковича, Чернівці

БАГАТОЧАСТОТНІ НЕЛІНІЙНІ КОЛИВНІ СИСТЕМИ ВИЩОГО НАБЛИЖЕННЯ ІЗ ЗАПІЗНЕННЯМ

Для багаточастотних систем вищого наближення із лінійно перетвореним аргументом і вектором частот, залежним від повільних змінних, одержано оцінку похибки методу усереднення на скінченному проміжку. Одержану оцінку застосовано для обгрунтування методу усереднення за швидкими змінними для систем із багатоточковими умовами.

Error estimate of aweraging method on finite interval for multifrequency systems of higher approximations with linearly transformed argument and dependent on slow variables harmonics vector has been obtained. Found estimate has been applied for the substantiation of averaging method on the fast variables for systems with multipoint boundary values.

1. Вступ. Розглянемо систему вищого наближення із лінійно перетвореним аргументом вигляду

$$\frac{dx}{d\tau} = \sum_{\nu=0}^{r} \varepsilon^{\nu} X_{\nu}(\tau, x, x_{\lambda}) + \varepsilon^{r+1} X(\tau, x, x_{\lambda}, \varphi, \varphi_{\lambda}, \varepsilon),$$

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{\omega(\tau, x, x_{\lambda})}{\varepsilon} + \sum_{\nu=0}^{r-1} \varepsilon^{\nu} Y_{\nu}(\tau, x, x_{\lambda}) + \varepsilon^{r} Y(\tau, x, x_{\lambda}, \varphi, \varphi_{\lambda}, \varepsilon), \qquad (1)$$

де $r \geq 0$, $Y_{-1}(\tau, x, x_{\lambda}) \equiv 0$, коли $r = 0$; малий параметр $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, $\tau = \varepsilon t \in [0, L]$, $x \in D \subset R^n$, $\varphi \in R^m$, $x_{\lambda}(\tau) = x(\lambda\tau)$, $\varphi_{\lambda}(\tau) = \varphi(\lambda\tau)$, $\lambda \in (0, 1)$. Вектор-функції X і Y 2π-періодичні за змінними φ_{ν}, $\varphi_{\lambda\nu}$, $\nu = 1, \ldots, m$.

В монографії [1] для систем вищого наближення без запізнення і з вектором частот $\omega(\tau, x)$ одержано оцінку похибки методу усереднення за швидкими змінними порядку ε^{α} для повільних і $\varepsilon^{\alpha-1}$ для швидких змінних, де

$$\alpha = 1 + r + p^{-1},$$

$p \geq m$. В роботах [2, 3] дано обгрунтування методу усереднення, якщо $r = 0$, $\omega = \omega(x)$ і резонанс $(k, \omega(x(0))) = 0$ – ізольований на проміжку $[0, \varepsilon^{-1}]$.

Системи (1) із повільно змінним вектором частот $\omega(\tau)$ досліджувалися методом усереднення в [4]. На відміну від такого випадку для системи (1) умова резонансу в точці τ задається через компоненту $x(\tau, \varepsilon)$ наперед невідомого розв'язку:

$$\gamma_{kl}(\tau, x(\tau, \varepsilon)) := (k, \omega(\tau, x(\tau, \varepsilon), x(\lambda\tau, \varepsilon)) + \lambda(l, \omega(\lambda\tau, x(\lambda\tau, \varepsilon), x(\lambda^2\tau, \varepsilon))) \cong 0, \qquad (2)$$

де k, $l \in Z^m$, $\|k\| + \|l\| \neq 0$.

Усереднена система набуває вигляду

$$\frac{d\overline{x}}{d\tau} = \sum_{\nu=0}^{r} \varepsilon^{\nu} X_{\nu}(\tau, \overline{x}, \overline{x}_{\lambda}) + \varepsilon^{r+1} \overline{X}(\tau, \overline{x}, \overline{x}_{\lambda}, \varepsilon), \qquad (3)$$

$$\frac{d\overline{\varphi}}{d\tau} = \frac{\omega(\tau, \overline{x}, \overline{x}_{\lambda})}{\varepsilon} + \sum_{\nu=0}^{r-1} Y_{\nu}(\tau, \overline{x}, \overline{x}_{\lambda}) + \varepsilon^{r} \overline{Y}(\tau, \overline{x}, \overline{x}_{\lambda}, \varepsilon), \qquad (4)$$

$$\overline{Z}(\tau, x, x_{\lambda}, \varepsilon) = \frac{1}{(2\pi)^{2m}} \int_0^{2\pi} \ldots \int_0^{2\pi} Z(\tau, x, x_{\lambda}, \varphi, \psi, \varepsilon) d\varphi d\psi,$$

$$Z = (X, Y).$$

Покажемо, що при виконанні певних умов існує єдиний розв'язок $z(\tau, y, \psi, \varepsilon) = (x, \varepsilon\varphi)$ системи (1), $z(0, y, \psi, \varepsilon) = (y, \psi)$, і для всіх $(\tau, \varepsilon) \in [0, L] \times (0, \overline{\varepsilon}_0]$, $\overline{\varepsilon}_0 \leq \varepsilon_0$, справджується оцінка

$$\|z(\tau, y, \psi, \varepsilon) - \overline{z}(\tau, y, \psi, \varepsilon)\| \leq c_1 \varepsilon^{\alpha}, \qquad (5)$$

$c_1 = const > 0$, $p \geq 2m$. Одержану оцінку застосуємо для обгрунтування методу усереднення для $m-$частотної системи із багатоточковими умовами.

2. Початкова задача. Введемо позначення: $C^l_u(S,a)$ – множина вектор-функцій $f(u,\varepsilon)$, $(u,\varepsilon) \in S \times [0,\varepsilon_0]$, які при кожному фіксованому ε мають неперервні частинні похідні до порядку l, а сама функція, $\dfrac{\partial f}{\partial u}$ та її частинні похідні вищих порядків рівномірно обмежені в S сталою a; $G_1 = [0,L]\times D\times D$, $G = G_1 \times R^m \times R^m \times [0,\varepsilon_0]$, $u = (\tau, x, x_\lambda)$, $v = (\varphi, \varphi_\lambda)$.

Вважатимемо, що виконані наступні умови:

1^0. $\omega \in C^{p_0}_u(G_1,a_1)$; $(X_\nu, Y_\nu, X_r, \overline{X}, \overline{Y}) \in C^{p_1}_u(G_1,a_1)$, $\min(p_0-1,p_1) \geq 2m-1$.

2^0. $Z \in C^{p_2,p_3}_{u,v}(G,a_1)$, $\left(\dfrac{\partial Z}{\partial \tau}, \dfrac{\partial Z}{\partial x}, \dfrac{\partial Z}{\partial y}\right) \in C^{p_4}_u(G,a_1)$, $p_2 \geq 1$, $\min(p_3-1,p_4) \geq 2m+1+q$, $q \geq 0$.

3^0. Нехай для фіксованого $y \in D$ існує розв'язок $\widetilde{x} = \widetilde{x}(\tau,y)$, $\widetilde{x}(0,y) = y$, системи рівнянь першого наближення

$$\frac{d\widetilde{x}}{d\tau} = X_0(\tau, \widetilde{x}, \widetilde{x}_\lambda), \tag{6}$$

який для всіх $\tau \in [0,L]$ лежить в D разом із ρ-околом.

В [1] при обгрунтуванні методу усереднення умова проходження багаточастотної системи через резонанс записана в термінах матриці $W_p(\tau,x)$, складеної з компонентів вектора $\omega(\tau,x)$, й обчислених уздовж розв'язку системи першого наближення, коли $(\tau,x) \in [0,L]\times D$, $u \in D_1 \subset D$. Сформулюємо аналогічну умову для $(p\times 2m)$-матриці $W_p(\tau, x^\lambda_p)$, елементами якої є похідні

$$\left(\frac{d^{j-1}}{d\tau^{j-1}}\omega_\nu(\tau, x, x_\lambda)\right)^{p,2m}_{j,\nu=1},$$

де $p \geq 2m$, $x^\lambda_p = (x, x^{(1)}, \dots, x^{(p+1)})$, $x^{(i)}(\tau,y) = x(\lambda^i\tau, y)$, $\omega_{m+\nu} = \omega_\nu(\lambda\tau, x^{(1)}, x^{(2)})$, $\nu = 1,\dots,m$.

4^0. Для всіх $\tau \in [0,L]$

$$\Delta_p(\tau, \widetilde{x}^\lambda_p(\tau,y)) := \det(W^T_p(\tau, \widetilde{x}^\lambda(\tau,y))\times$$

$$\times W_p(\tau, \widetilde{x}^\lambda_p(\tau,y))) \neq 0. \tag{7}$$

Введемо ще такі позначення: $\widetilde{x}(\tau,y,[0,L])$ – траєкторія розв'язку $\widetilde{x}(\tau,y)$, коли $\tau \in [0,L]$, $\widetilde{x}_p(\tau,y,[0,L]) = \prod\limits_{\nu=0}^{p+1} \widetilde{x}(\lambda^\nu\tau, y, [0,L])$ – відповідна $\widetilde{x}_p(\tau,y)$ траєкторія в D^{p+2}; $D_\rho(\widetilde{x}_p)$ – ρ-окіл траєкторії $\widetilde{x}_p$ в D^{p+2}.

Теорема 1. *Нехай виконуються умови 1^0 – 4^0, $q = 1$. Тоді знайдеться досить мале $\overline{\varepsilon}_0 > 0$ таке, що для всіх $(\tau,\varepsilon) \in [0,L] \times (0,\overline{\varepsilon}_0]$ існує єдиний розв'язок $z = z(\tau,y,\psi,\varepsilon)$ системи (1) і має місце оцінка (5).*

Доведення. Із неперервності елементів матриці $W_p(\tau, x^\lambda_p)$ та з умови 4^0 випливає існування такого ρ_1, $0 < \rho_1 < \rho$, що в ρ_1-околі траєкторії $\widetilde{x}_p(\tau,y,[0.L])$

$$\Delta_p(\tau, x^\lambda_p) \geq \overline{c} > 0, \quad x^\lambda_p \in D_{\rho_1}(\widetilde{x}_p).$$

Як випливає із рівнянь (3) і (6)

$$\|\overline{x}(\tau,y,\varepsilon) - \widetilde{x}(\tau,y)\| \leq a_1 n(1+\lambda^{-1})\times$$

$$\times \int\limits_0^1 \|\overline{x}(s,y,\varepsilon) - \widetilde{x}(s,y)\| ds + 2a_1\varepsilon.$$

На підставі леми Гронуолла-Беллмана для $(\tau,\varepsilon) \in [0,L]\times[0,\varepsilon_0]$

$$\|\overline{x}(\tau,y,\varepsilon) - \widetilde{x}(\tau,y)\| \leq 2a_1c_2\varepsilon \equiv c_3\varepsilon, \tag{8}$$

де $c_2 = \exp[a_1 n(1+\lambda^{-1})L]$.

Нехай

$$\varepsilon_1 = \min\left(\varepsilon_0, 0.5, \frac{\rho_1}{c_3(p+2)}, \left(\frac{\rho}{4a_1c_2^2}\right)^{\frac{1}{r+1}}\right).$$

Тоді розв'язок $\overline{x}(\tau,y,\varepsilon)$ рівняння (3) визначений для всіх $\tau \in [0,L]$, $\overline{x}_p(\tau,y,[0,L]) \in D_{\rho_1}(\widetilde{x}_p)$ і для цього розв'язку виконується нерівність (7).

Враховуючи (8) та умову 1^0 одержимо

$$\Delta_p(\tau, \overline{x}^\lambda_p(\tau,y,\varepsilon)) = \Delta_p(\tau, \widetilde{x}^\lambda_p(\tau,y)) + \varepsilon c_4,$$

$$c_4 = const.$$

Тому для $(\tau,\varepsilon) \in [0,L]\times[0,\varepsilon_1]$

$$\Delta_p(\tau, \overline{x}^\lambda_p(\tau,y,\varepsilon)) \geq \frac{1}{2}\overline{c}$$

і, скориставшись умовою 1^0, одержимо

$$\|(W_p^T(\tau,\overline{x}_p^\lambda(\tau,y,\varepsilon))W_p^{-1}(\tau,\overline{x}_p^\lambda(\tau,y,\varepsilon)))\times$$
$$\times W_p(\tau,\overline{x}_p^\lambda(\tau,y,\varepsilon))\| \le \overline{c}_4. \qquad (9)$$

Із (1) і (3) маємо

$$\|x(\tau,y,\psi,\varepsilon)-\overline{x}(\tau,y,\varepsilon)\| \le c_5\varepsilon^{r+1},$$
$$(\tau,\varepsilon)\in[0,L]\times[0,\varepsilon_1],$$

де $c_5 = 2a_1c_2^2$. Оскільки $c_5{\varepsilon_1}^{r+1} \le \rho/2$, то розв'язок системи (1) існує для всіх $(\tau,\varepsilon)\in[0,L]\times(0,\varepsilon_1]$.

Із (1), (3) і (4) одержимо

$$\|z(\tau,y,\psi,\varepsilon)-\overline{z}(\tau,y,\psi,\varepsilon)\| \le 4a_1(n+m)\times$$
$$\times(1+\lambda^{-1})\int_0^\tau \|z(s,y,\psi,\varepsilon)-\overline{z}(s,y,\psi,\varepsilon)\|ds+ \qquad (10)$$
$$+\varepsilon^{r+1}\sum_{\|k\|+\|l\|\ne 0}\|\int_0^\tau f_{kl}(\tau,\varepsilon)\times$$
$$\times\exp\{\frac{i}{\varepsilon}\int_0^s \gamma_{kl}(s_1,\overline{x}(s_1,y,\varepsilon))ds_1\}ds\|,$$

де функція $\gamma_{kl}(\tau,\overline{x})$ визначена в (2), $f_{kl}(\tau,\varepsilon) = Z_{kl}(\tau,\overline{x}(\tau,y,\varepsilon),\overline{x}_\lambda(\tau,y,\varepsilon))\times \times\exp\{i(k,\overline{\varphi})+i(l,\overline{\varphi}_\lambda)-$

$$\frac{i}{\varepsilon}\int_0^\tau \gamma_{kl}(s,\overline{x}(s,y,\varepsilon))ds\}.$$

З умов 1^0 і 2^0 та оцінки (9) випливає виконання всіх умов в теоремі 3 [5] для функцій $f_{kl}(\tau,\varepsilon)$ і $\gamma_{kl}(\tau,\overline{x}(\tau,y,\varepsilon))$, тому справджується оцінка

$$\sum_{\|k\|+\|l\|\ne 0}\|\int_0^\tau f_{kl}(s,\varepsilon)\exp\{\frac{i}{\varepsilon}\times$$
$$\times\int_0^s \gamma_{kl}(s_1,\overline{x}(s_1,y,\varepsilon))ds_1\}ds\| \le c_6\varepsilon^{\frac{1}{p}},$$

для всіх $(\tau,\varepsilon)\in[0,L]\times(0,\varepsilon_2]$, $\varepsilon_2\le\varepsilon_1$.

На підставі цієї оцінки із (10) маємо

$$\|z(\tau,y,\psi,\varepsilon)-\overline{z}(\tau,y,\psi,\varepsilon)\| \le$$
$$\le c_6\exp[4a_1(n+m)(1+\lambda^{-1})L]\varepsilon^\alpha \equiv c_1\varepsilon^\alpha.$$

Якщо $c_1\varepsilon_3^\alpha < \rho$, то одержана оцінка виконується для всіх $\tau\in[0,L]$ і $\varepsilon\in(0,\overline{\varepsilon}_0]$, де $\overline{\varepsilon}_0=\min(\varepsilon_2,\varepsilon_3)$.

Теорему доведено.

Нехай початкова умова $y=y(\varepsilon)$. Зокрема, це матиме місце для задачі з багатоточковими умовами. Припустимо, що

$$\|y(\varepsilon)-y(0)\| \le d\varepsilon^\chi, \chi>0, \varepsilon\in[0,\varepsilon_0]. \qquad (11)$$

Тоді

$$\|\widetilde{x}(\tau,y(\varepsilon))-\widetilde{x}(\tau,y(0))\| \le c_2d\varepsilon^\chi$$

і для $\varepsilon \le (\rho_1/(2c_2d(p+2)))^{1/\chi}$ траєкторія $\widetilde{x}_p(\tau,y(\varepsilon),[0,L]) \in D_{\rho_1/2}(\widetilde{x}_p(\tau,y(0)))$. Крім того,

$$\Delta_p(\tau,\widetilde{x}_p^\lambda(\tau,y(\varepsilon))) \ge \frac{1}{2}\overline{c}>0, (\tau,\varepsilon)\in[0,L]\times[0,\varepsilon^*),$$

в разі виконання умови (7) для $\widetilde{x} = \widetilde{x}(\tau,y(0))$, $\tau\in[0,L]$.

На підставі теореми 1 одержується таке твердження.

Теорема 2. *Нехай: 1) виконуються умови 1^0 і 2^0, $q=1$; 2) для фіксованого $y\in D$ існує розв'язок $\widetilde{x}=\widetilde{x}(\tau,y(\varepsilon))$ системи рівнянь першого наближення (6), який лежить в D разом із ρ-околом для всіх $(\tau,\varepsilon)\in[0,L]\times[0,\varepsilon_0]$ й уздовж цього розв'язку виконується умова (7); 4) виконується нерівність (11). Тоді справджується висновок теореми 1.*

Зауваження 1. Якщо в теоремі 1 умова 2^0 виконується для $q=1$, то правильною є також оцінка для похідних [6]:

$$\|\frac{\partial}{\partial y}(z(\tau,y,\psi,\varepsilon)-\overline{z}(\tau,y,\psi,\varepsilon))\|+ \qquad (10)$$
$$+\|\frac{\partial}{\partial\psi}(z(\tau,\psi,y,\varepsilon)-\overline{z}(\tau,\psi,y,\varepsilon))\| \le c_7\varepsilon^\alpha.$$

Зауваження 2. Нехай $X_0 = X_0(\tau,x)$ і $\omega=\omega(\tau,x)$. Тоді, як і в [1], обчислюючи повні похідні уздовж розв'язку системи (6) можна вимагати виконання умови (7) для $(\tau, x) \in [0, L] \times D$. У цьому випадку оцінка (5) правильна для будь-якого розв'язку усередненої задачі (3), (4), такого, що $y \in D_1 \subset D$ і крива $\overline{x}(\tau, \overline{y})$ лежить в D разом із ρ-околом.

3. Крайова задача. Розглянемо систему із m частотами вигляду

$$\frac{dx}{d\tau} = A(\tau, x, x_\lambda, \varepsilon) + \varepsilon^{r+1} X(\tau, x, x_\lambda, \varphi, \varphi_\lambda, \varepsilon),$$

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{\omega(\tau, x, x_\lambda)}{\varepsilon} + \varepsilon^r Y(\tau, x, x_\lambda, \varphi, \varphi_\lambda, \varepsilon), \tag{13}$$

де $r \geq 0$, $\tau \in [0, L]$. Зокрема, система (12) включає (1), коли $X_0(\tau, x, x_\lambda) = A(\tau, x, x_\lambda, 0)$.

Задамо багатоточкові умови

$$\sum_{\nu=0}^{N} A_\nu(\varepsilon) x|_{\tau=\tau_\nu} = d, \tag{14}$$

$$\sum_{\nu=0}^{N} B_\nu(\varepsilon)(\varepsilon\varphi)|_{\tau=\tau_\nu} = f(x|_{\tau=\tau_0}, \ldots, x|_{\tau=\tau_N}, \varepsilon), \tag{15}$$

де $0 \leq \tau_0 < \tau_1 < \cdots < \tau_N \leq L$, A_ν і B_ν – задані n і m-матриці відповідно, елементи яких - неперервні на $[0, \varepsilon_0]$ функції, d – n-вектор, $f(\cdot, \varepsilon)$ – деякий функціонал для кожного $\varepsilon \in (0, \overline{\varepsilon}_0]$.

Багаточастотні системи без запізнення, коли $r = 0$, а умова (14), – нелінійна, досліджені методом усереднення в [1].

Побудуємо відповідну (13) усереднену систему

$$\frac{d\overline{x}}{d\tau} = A(\tau, \overline{x}, \overline{x}_\lambda, \varepsilon) + \varepsilon^{r+1} \overline{X}(\tau, \overline{x}, \overline{x}_\lambda, \varepsilon),$$

$$\frac{d\overline{\varphi}}{d\tau} = \frac{\omega(\tau, \overline{x}, \overline{x}_\lambda)}{\varepsilon} + \varepsilon^r \overline{Y}(\tau, \overline{x}, \overline{x}_\lambda, \varepsilon). \tag{16}$$

Багатоточкові умови для системи (16) мають вигляд (14), (15). Нехай $\widetilde{x} = \widetilde{x}(\tau, \overline{y})$, де $\overline{y} = \overline{y}(\varepsilon)$, – розв'язок системи рівнянь

$$\frac{d\widetilde{x}}{d\tau} = A(\tau, \widetilde{x}, \widetilde{x}_\lambda, 0), \tau \in [0, L], \tag{17}$$

який задовольняє багатоточкові умови

$$\sum_{\nu=0}^{N} A_\nu(\varepsilon) \widetilde{x}|_{\tau=\tau_\nu} = d. \tag{18}$$

Введемо позначення:

$$Q_1(\varepsilon) = \sum_{\nu=0}^{N} A_\nu(\varepsilon) \frac{\partial \widetilde{x}(\tau_\nu, \overline{y}(\varepsilon))}{\partial \overline{y}},$$

$$Q_2(\varepsilon) = \sum_{\nu=0}^{N} B_\nu(\varepsilon).$$

Теорема 3. *Нехай:*

1) виконуються умови 1^0, 2^0 *для* $q = 1$*;*

2) існує єдиний розв'язок задачі (16), (17), який лежить в D *разом із* ρ*-околом для всіх* $(\tau, \varepsilon) \in [0, L] \times [0, \varepsilon_0]$*;*

3) виконується умова (7) уздовж розв'язку $\widetilde{x} = \widetilde{x}(\tau, \overline{y}(\varepsilon))$*, коли* $(\tau, \varepsilon) \in [0, L] \times [0, \varepsilon_0]$*, і нерівність (11);*

4) $\|Q_\nu^{-1}(\varepsilon)\| \leq d_\nu \varepsilon^{-\chi_\nu}$, $d_\nu = const$,
$\chi_\nu \geq 0$, $2\chi_1 < \alpha$, $\chi_1 + \chi_2 < \alpha$, $\nu = 1, 2$*;*

5) f*:* $D^{N+1} \times (0, \varepsilon_0] \to R^m$ *і для всіх* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ $f \in C_u^2(D^{N+1}, a_2)$*;*

6) рівномірно відносно $(\tau, x, x_\lambda) \in G_1$

$$\|A(\tau, x, x_\lambda, \varepsilon) - A(\tau, x, x_\lambda, 0)\| \leq a_3 \varepsilon.$$

Тоді знайдуться $\overline{\overline{\varepsilon}}_0 > 0$ *і* $c_\nu > 0$, $\nu = 8, 9, 10$ *такі, що для всіх* $(\tau, \varepsilon) \in [0, L] \times (0, \overline{\overline{\varepsilon}}_0]$ *задача (13) – (15) має єдиний розв'язок* $x = x(\tau, \overline{y} + \mu, \overline{\psi} + \xi, \varepsilon), \varepsilon\varphi = \theta(\tau, \overline{y} + \mu, \overline{\psi} + \xi, \varepsilon)$ *і виконується нерівність*

$$\varepsilon^{\chi_1} \|x(\tau, \overline{y} + \mu, \overline{\psi} + \xi, \varepsilon) - \overline{x}(\tau, \overline{y})\| +$$

$$\varepsilon^{\chi_1 + \chi_2} \|\theta(\tau, \overline{y} + \mu, \overline{\psi} + \xi, \varepsilon) - \overline{\theta}(\tau, \overline{y} + \mu, \overline{\psi} + \xi, \varepsilon)\|$$

$$\leq c_8 \varepsilon^\alpha,$$

$$\|\mu\| \leq c_9 \varepsilon^{\alpha - \chi_1}, \quad \|\xi\| \leq c_{10} \varepsilon^{\alpha - \chi_1 - \chi_2}.$$

Доведення. Із (17) та першого з рівнянь (16) маємо

$$\|\overline{x}(\tau, \overline{y}, \varepsilon) - \widetilde{x}(\tau, \overline{y})\| \leq (a_1 + a_3) c_2 n L \varepsilon \equiv$$

$$c_{11} \varepsilon \leq \rho/4,$$

якщо $\varepsilon \le \rho/(4c_{11})$. Також із (16) випливає

$$\|\overline{x}(\tau,\overline{y}+\mu,\varepsilon)-\overline{x}(\tau,\overline{y},\varepsilon)\| \le c_2^2\|\mu\| \le \rho/4,$$

як тільки $\|\mu\| \le \rho/(4c_2^2)$.

Отже, для $(\tau,\varepsilon) \in [0,L]\times(0,\overline{\varepsilon}_1]$, $\varepsilon_1 = \min(\varepsilon_0, \rho/(4c_{11}))$ маємо

$$\|\overline{x}(\tau,\overline{y}+\mu,\varepsilon)-\widetilde{x}(\tau,\overline{y})\| \le \rho/2$$

і $\overline{x}(\tau,\overline{y}+\mu,\varepsilon)$ залишається в $\rho/2$-околі кривої $\widetilde{x}(\tau,\overline{y})$. На підставі теорем 1 і 2 правильними є оцінки (5) і (10).

Розв'язок задачі (13), (14) шукаємо у вигляді $z = z(\tau,\overline{y}+\mu,\overline{\psi}+\xi,\varepsilon)$. Із першого з рівнянь (13) та умови (14) для x і відповідної умови для $\overline{x}$ знаходимо

$$\mu = M_1(\mu,\varepsilon),$$

де $M_1(\mu,\varepsilon) = -Q_1^{-1}(\varepsilon)\sum\limits_{\nu=0}^{N}A_\nu(\varepsilon)[(x(\tau_\nu,\overline{y}+\nu,\overline{\psi}++\xi,\varepsilon)-\overline{x}(\tau_\nu,\overline{y}+\mu,\varepsilon))+R_\nu(\mu,\varepsilon)]$,

$$R_\nu(\mu,\varepsilon)=\overline{x}(\tau_\nu,\overline{y}+\mu,\varepsilon)-\overline{x}(\tau_\nu,\overline{y},\varepsilon)+ +\frac{\partial\overline{x}}{\partial\overline{y}}(\tau_\nu,\overline{y},\varepsilon)\mu.$$

На підставі умови 1^0 одержимо

$$\|R_\nu(\mu,\varepsilon)\| \le c_{12}\|\mu\|^2, c_{12}=const, \nu=0,\ldots,N.$$

Далі скористаємось оцінкою (5) та умовою 4 теореми 3. Матимемо

$$\|M_1(\mu,\varepsilon)\| \le (c_1\varepsilon^\alpha + c_{12}\|\mu\|^2)d_1d_3\varepsilon^{-\chi_1},$$

де $\sum\limits_{\nu=0}^{N}(\|A_\nu(\varepsilon)\|+\|B_\nu(\varepsilon)\|) \le d_3$.

Нехай $c_9 = 2c_1d_1d_3$ і

$$\|\mu\| \le c_9\varepsilon^{\alpha-\chi_1}, \tag{19}$$

$$\overline{\varepsilon}_2 = \min\left(\overline{\varepsilon}_1, \left(\frac{{c_9}^2c_{12}}{c_1}\right)^{\frac{1}{2\chi_1-\alpha}}, \left(\frac{\rho_1}{4c_2^2c_3}\right)^{\frac{1}{\alpha-\chi_1}}\right).$$

Тоді для всіх $\varepsilon \in (0,\overline{\varepsilon}_2]$ $\|M_1(\mu,\varepsilon)\| \le c_9\varepsilon^{\alpha-\chi_1}$. Отже, $M_1: S_1 \to S_1, S_1 = \{\mu : \|\mu\| \le c_9\varepsilon^{\alpha-\chi_1}, \varepsilon\in[0,\overline{\varepsilon}_2]\}$. Далі маємо

$$\frac{\partial M_1(\mu,\varepsilon)}{\partial\mu} = -Q_1^{-1}(\varepsilon)\sum_{\nu=0}^{N}A_\nu(\varepsilon)\times$$

$$\times\left[\frac{\partial}{\partial\mu}(x(\tau_\nu,\overline{y}+\mu,\overline{\psi}+\xi,\varepsilon)-\overline{x}(\tau_\nu,\overline{y}+\mu,\varepsilon))+ +\Big(\frac{\partial\overline{x}(\tau_\nu,\overline{y}+\mu,\varepsilon)}{\partial\overline{y}}-\frac{\partial\overline{x}(\tau_\nu,\overline{y},\varepsilon)}{\partial\overline{y}}\Big)\right].$$

Із (10) умов 1^0 і 4 теореми 2 випливає

$$\left\|\frac{\partial M_1(\mu,\varepsilon)}{\partial\mu}\right\| \le d_1\varepsilon^{\alpha-\chi_1}(c_7\varepsilon^\alpha + c_{13}\|\mu\|) \le \frac{1}{2},$$

$c_{13} = const$, якщо

$$\varepsilon \le \overline{\varepsilon}_3 = \min\Big(\varepsilon_2, (4c_7d_1)^{\frac{1}{\chi_1-\alpha}}, (4c_{13}d_1)^{\frac{1}{2\chi_1-\alpha}}\Big).$$

Отже, відображення M_1 – стискаюче, тому для кожного $\varepsilon \in (0,\overline{\varepsilon}_3]$ існує єдиний розв'язок $\mu = \mu(\varepsilon)$, який задовольняє нерівність (19).

Тепер із умови (15) знаходимо

$$\xi = -Q_2^{-1}(\varepsilon)\Big[\sum_{\nu=0}^{N}B_\nu(\varepsilon)((\theta(\tau_\nu,\overline{y}+\mu,\overline{\psi}+\xi,\varepsilon)- -\overline{\theta}(\tau_\nu,\overline{y}+\mu,\overline{\psi}+\xi,\varepsilon))+ +(\overline{\theta}(\tau_\nu,\overline{y}+\mu,0,\varepsilon)-\overline{\theta}(\tau_\nu,\overline{y},0,\varepsilon)))+ +f(x|_{\tau=\tau_0},\ldots,x|_{\tau=\tau_N},\varepsilon)- -f(\overline{x}|_{\tau=\tau_0},\ldots,\overline{x}|_{\tau=\tau_N},\varepsilon)\Big] \equiv M_2(\mu,\xi,\varepsilon).$$

Із другого рівняння системи (16) та оцінки (19) одержимо

$$\|\overline{\theta}(\tau,\overline{y}+\mu,\overline{\psi}+\xi,\varepsilon)-\overline{\theta}(\tau,\overline{y},\overline{\psi},\varepsilon)\| \le c_{14}\tau_\nu\varepsilon^{\alpha-\chi_1}, \tag{20}$$

де стала $c_{14} = 3a_1{c_2}^2c_9m$. Скориставшись нерівностями (5) і (20) та умовою 5 теореми 3 дістанемо

$$\|M_2(\mu,\xi,\varepsilon)\| \le d_2\varepsilon^{\alpha-\chi_1-\chi_2}\left(\sum_{\nu=0}^{N}\|B_\nu\|(c_1\varepsilon^{\chi_1}+c_{14}\tau_\nu)\varepsilon^{\chi_2})+ a_2m(N+1)(c_1\varepsilon^{\chi_1}+{c_2}^2c_9)\varepsilon^{\chi_2})\right) \le$$

$c_{10}\varepsilon^{\alpha-\chi_1-\chi_2}$, де $c_{10} = d_2((c_1d_3+c_{14}L)d_3 + a_2m(N+1)\times\ (c_11+{c_2}^2c_9)$.

Таким чином, $M_2 : S_2 \to S_2, S_2 = \{\xi : \|\xi\| \le c_{10}\varepsilon^{\alpha-\chi_1-\chi_2}, \varepsilon \in (0, \overline{\varepsilon}_3.\}$

Враховуючи (5), умови 5 і 6 теореми 3 одержимо

$$\left\|\frac{\partial M_2}{\partial \xi}\right\| \le d_2\varepsilon^{-\chi_2}\left\|\sum_{\nu=0}^{N} B_\nu(\varepsilon)\frac{\partial}{\partial \xi}(\varphi(\tau_\nu, \overline{y}+\right.$$

$$+\mu, \overline{\psi}+\xi, \varepsilon) - \overline{\varphi}(\tau_\nu, \overline{y}+\mu, \overline{\psi}+\xi, \varepsilon))-$$

$$-\Big(\frac{\partial f}{\partial \xi}(x|_{\tau=\tau_0}, \ldots, x|_{\tau=\tau_N}, \varepsilon)-$$

$$\left.-\frac{\partial f}{\partial \xi}(\overline{x}|_{\tau=\tau_0}, \ldots, \overline{x}|_{\tau=\tau_N}, \varepsilon)\Big)\right\| \le$$

$$\le d_2(c_7d_3 + a_2m(c_1 + {c_2}^2c_9)(N+1))\times$$

$$\times\varepsilon^{\alpha-\chi_1-\chi_2} \equiv c_{16}\varepsilon^{\alpha-\chi_1-\chi_2} \le \frac{1}{2},$$

якщо $\varepsilon \le \overline{\varepsilon}_4 = \min(\overline{\varepsilon}_3, (2c_{16})^{1/(\chi_1+\chi_2-\alpha)})$.

Отже, існує єдиний розв'язок $(\mu(\varepsilon), \xi(\mu, \varepsilon))$, для якого $\|\mu\| \le c_9\varepsilon^{\alpha-\chi_1}$, $\|\xi\| \le c_{10}\varepsilon^{\alpha-\chi_1-\chi_2}$, $c_9 = 2c_1d_1d_2$.

На деякому проміжку $[0, \tau]$, $\tau \in (0, L]$, на підставі (5), умови 1^0 та оцінок для $\|\mu\|$ і $\|\xi\|$ одержимо

$$\varepsilon^{\chi_1}\|x(\tau, \overline{y}+\mu, \overline{\psi}+\xi, \varepsilon) - \overline{x}(\tau, \overline{y}, \varepsilon)\|+$$

$$+\varepsilon^{\chi_1+\chi_2}\|\theta(\tau, \overline{y}+\mu, \overline{\psi}+\xi, \varepsilon) - \overline{\theta}(\tau, \overline{y}, \overline{\psi}, \varepsilon)\| \le$$

$$\le \varepsilon^{\chi_1}(\|x(\tau, \overline{y}+\mu, \overline{\psi}+\xi, \varepsilon) - \overline{x}(\tau, \overline{y}+\mu, \varepsilon)\|+$$

$$\|\overline{x}(\tau, \overline{y}+\mu, \varepsilon) - \overline{x}(\tau, \overline{y}, \varepsilon)\|) + \varepsilon^{\chi_1+\chi_2}\times$$

$$(\|\theta(\tau, \overline{y}+\mu, \overline{\psi}++\xi, \varepsilon) - \overline{\theta}(\tau, \overline{y}+\mu, \overline{\psi}+\xi, \varepsilon)\|+$$

$$\|\overline{\theta}(\tau, \overline{y}+\mu, \overline{\psi}+\xi, \varepsilon) - -\overline{\theta}(\tau, \overline{y}, \overline{\psi}, \varepsilon)\|) \le$$

$$(2c_1 + c_2^2c_9 + c_{14} + c_{15})\varepsilon^\alpha = c_8\varepsilon^\alpha$$

Якщо $\varepsilon \le \min(\overline{\varepsilon}_4, (\rho/(2c_8)))^{\frac{1}{\alpha-\chi_1-\chi_2}} = \overline{\overline{\varepsilon}}_0$, то оцінка похибки методу усерднення виконується на $[0, L]$. Теорему 3 доведено.

4. Розглянемо випадок, коли в умові (13) матриці A_ν не залежать від ε. Тоді $\widetilde{x} = \widetilde{x}(\tau, \overline{y})$ і, як і в теоремі 1, можна вимагати виконання умови (7) уздовж розв'язку $\widetilde{x}_p(\tau, y)$ системи (16). Аналогічно, як теорема 3, доводиться наступне твердження.

Теорема 4. *Нехай:*

1) виконуються умови 1^0, 2^0 для $q = 1$ і нерівність (7) уздовж розв'язку $\widetilde{x}(\tau, y)$ системи (16) в припущенні, що він існує та задовольняє умову (17);

2) існують матриці Q_1^{-1} і $Q_2^{-1}(\varepsilon)$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, крім того, $\|Q_2^{-1}(\varepsilon)\| \le d_2\varepsilon^{-\chi_2}$, $0 \le \chi_2 < \alpha$;

4) $\forall\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ $f(\cdot, \varepsilon)$: $D_{\rho_1}^{N+1} \times (0, \varepsilon_0] \to R^m$ і $f(\cdot, \varepsilon) \in C_u^2(D_{\rho_1}(\widetilde{x}_{N+1}), a_2)$.

Тоді існує $\varepsilon^* > 0$ таке, що для всіх $(\tau, \varepsilon) \in [0, L] \times (0, \varepsilon^*)$ задача (12) – (14) має єдиний розв'зок і справджуються оцінки в твердженні теореми 3 із $\chi_1 = 0$.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Самойленко А.М., Петришин Р.І.* Математичні аспекти теорії нелінійних коливань.— К.: Наукова думка, 2004.— 475 с.
2. *Попова Н.И.* Об усреднении по быстрым переменным в многочастотных системах, допускающих резонансы.— М.: ИТЭФ, 1997.— 35 с.
3. *Гребеников Е.А., Митропольский Ю.А., Рябов Ю.А.* Введение в резонансную аналитическую динамику.— М.: Янус-К, 1999.— 320 с.
4. *Бігун Я.Й.* Усереднення в коливних резонансних системах вищого наближення із запізненням // Наук. вісн. Чернів. ун-ту. Зб. наук. пр. Вип. 76.— С.11—16.
5. *Бигун Я.И., Самойленко А.М.* Обоснование принципа усреднения для многочастотных систем дифференциальных уравнений с запаздыванием // Дифференц. уравнения.— 1999.— **35**, № 1.— С.8—14.
6. *Бігун Я.Й.* Усереднення багаточастотної крайової задачі з лінійно перетвореним аргументом // Укр. мат. журн.— 2000.— **52**, № 3.— С. 291—299.

Стаття надійшла до редколегії 16.03.2006