УДК 517.956.4

©2006 р. Т.М. Балабушенко, С.Д. Івасишен, В.П. Лаврентчук, Л.М. Мельничук

Чернівецький національний університет ім. Ю.Федьковича, Чернівці

ФУНДАМЕНТАЛЬНИЙ РОЗВ'ЯЗОК ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ ДЕЯКИХ ПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ З ОПЕРАТОРОМ БЕССЕЛЯ І ЗРОСТАЮЧИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

Для одного класу параболічних рівнянь другого порядку зі зростаючими за змінною $x \in \mathbb{R}^n$ при $|x| \to \infty$ коефіцієнтами та оператором Бесселя за змінною $y \in \mathbb{R}$ знайдені в явному вигляді фундаментальні розв'язки задачі Коші та вивчені їхні властивості.

Fundamental solutions of the Cauchy problem are found in an explicit form and their properties are investigated for one class of parabolic second-order equations with growing coefficients on a variable $x \in \mathbb{R}^n$ as $|x| \to \infty$ and with Bessel operator on a variable $y \in \mathbb{R}$.

У теорії випадкових процесів і статистичній радіотехніці [1 – 3] виникають параболічні рівняння вигляду

$$\partial_t u(t,x) = \frac{1}{2}\sum_{j,l=1}^{n} \partial_{x_j}\partial_{x_l}(a_{jl}u(t,x)) + \tag{1}$$

$$+\sum_{j=1}^{n} \partial_{x_j}\Big(\sum_{l=1}^{n} b_{jl}x_l u(t,x)\Big),\ t>0, x\in\mathbb{R}^n,$$

коефіцієнти a_{jl} і b_{jl} яких сталі, причому матриця

$$A \equiv (a_{jl})_{j,l=1}^{n}$$

симетрична і додатно визначена. (2)

Рівняння (1) є рівнянням Фоккера-Планка-Колмогорова n-вимірного нормального марковського процесу. Якщо матриця $B \equiv (b_{jl})_{j,l=1}^{n}$ також симетрична і додатно визначена, то за допомогою відповідної лінійної заміни змінних рівняння (1) можна звести до рівняння вигляду

$$\partial_t u(t,x) = \frac{1}{2}\sum_{j,l=1}^{n} \partial_{x_j}\partial_{x_l}(a_{jl}u(t,x)) +$$

$$+\sum_{j=1}^{n} \partial_{x_j}(x_j u(t,x)),\ t>0, x\in\mathbb{R}^n, \tag{3}$$

для якого також виконується умова (2).

З точки зору теорії рівнянь із частинними похідними рівняння (1) і (3) цікаві тим, що в них коефіцієнти при перших похідних необмежено зростають при $|x| \to \infty$ і для них знаходиться в явному вигляді фундаментальний розв'язок задачі Коші (ФРЗК). Якщо $n=1$, то формула для ФРЗК в праці [2] одержана за допомогою досить складних обчислень, а в праці [4] – з використанням методу перетворення Фур'є і методу характеристик розв'язування задачі Коші для рівнянь із частинними похідними першого порядку. У випадку, коли $n>1$, $a_{jl}=\delta_{jl}$ і $b_{jl}=2\delta_{jl}$ (δ_{jl} – символ Кронекера), явна формула для ФРЗК може бути одержана аналогічним способом.

У праці [5] розглянута задачі Коші для рівнянь

$$\partial_t u(t,x,y) = \partial_x^2 u(t,x,y) + \partial_x(xu(t,x,y)) +$$
$$+B_y u(t,x,y),$$
$$\partial_t u(t,x,y) = \partial_x^2 u(t,x,y) + 2b(x)\partial_x u(t,x,y) +$$
$$+\Big(\frac{1}{2} - \frac{x^2}{4} + b^2(x) + b'(x)\Big)u(t,x,y) + B_y u(t,x,y),$$
$$t>0, x\in\mathbb{R}, y>0, \tag{4}$$

де $B_y \equiv \partial_y^2 + ((2\nu+1)/y)\partial_y$ – оператор Бесселя порядку $\nu \geq 0$, b – неперервно диференційовна функція в $\mathbb{R}$ і b' – її похідна. Рівняння (4) містять виродження, що спричинені, по-перше, наявністю в них оператора

Бесселя за змінною y, коефіцієнт якого необмежений в околі точки $y = 0$, і, по-друге, коефіцієнти рівнянь необмежені на нескінченності. Для таких рівнянь у [5] знайдено в явному вигляді ФРЗК, встановлено коректну розв'язність задачі Коші в спеціальних вагових L_p-просторах, знайдено необхідні та достатні умови зображення розв'язків інтегралами Пуассона, при цьому описано множини початкових значень розв'язків.

У даній статті аналогічні результати одержані для рівняння вигляду

$$(Lu)(t,x,y) \equiv \partial_t u(t,x,y) - \\ - \sum_{j,l=1}^{n} \partial_{x_j} \partial_{x_l} (a_{jl} u(t,x,y)) - \\ - \sum_{j=1}^{n} \partial_{x_j} (x_j u(t,x,y)) - B_y u(t,x,y), \quad (5)$$

$$\partial_t w(t,x,y) - \sum_{j=1}^{n} \Big(\partial_{x_j}^2 + 2 b_j(x_j) \partial_{x_j} + \\ + \big(\frac{1}{2} - \frac{x_j^2}{4} + b_j^2(x_j) + b_j'(x_j) \big) \Big) w(t,x,y) - \\ - B_y w(t,x,y) = 0, \quad t > 0, (x,y) \in \mathbb{R}_+^{n+1}, \quad (6)$$

де a_{jl}, $\{j,l\} \subset \{1,\ldots,n\}$, задовольняють умову (2), b_j, $j \in \{1,\ldots,n\}$ – неперервно диференційовні функції в $\mathbb{R}$, а $\mathbb{R}_+^{n+1} \equiv \{(x,y) \in \mathbb{R}^{n+1} |\ y > 0\}$.

1. Розглянемо задачу Коші для рівняння (5) з початковою умовою в точці $t = \tau$, тобто задачу про знаходження розв'язку u рівняння (5) при $t > \tau$, який задовольняє умови

$$u(t,x,y)|_{t=\tau} = \varphi(x,y), \quad (x,y) \in \mathbb{R}_+^{n+1}, \quad (7)$$

$$\partial_y u(t,x,y)|_{y=0} = 0, \quad t > \tau, x \in \mathbb{R}^n. \quad (8)$$

Розв'язок цієї задачі шукаємо у вигляді оберненого перетворення Фур'є-Бесселя невідомої функції v [6, 7], тобто у вигляді

$$u(t,x,y) = F_{\sigma\to x}^{-1} F_{B,\eta\to y}^{-1} [v(t,\sigma,\eta)] = \\ = 2^{-2\nu} (2\pi)^{-n} (\Gamma(\nu+1))^{-2} \int\limits_{\mathbb{R}_+^{n+1}} e^{i(x,\sigma)} v(t,\sigma,\eta) \times \\ \times j_\nu(\eta y) \eta^{2\nu+1} d\sigma d\eta,\ t > \tau, (x,y) \in \mathbb{R}_+^{n+1}, \quad (9)$$

де

$$j_\nu(y) \equiv 2^\nu \Gamma(\nu+1) y^{-\nu} J_\nu(y), \quad y > 0, \quad (10)$$

J_ν – функція Бесселя першого роду порядку ν, Γ – гамма-функція Ейлера, $(x,\sigma) \equiv \sum\limits_{j=1}^{n} x_j \sigma_j$.

Підставимо (9) у (5) і (7). Припустивши, що диференціювання можна здійснювати під знаком інтеграла і що $\sigma_j v(t,\sigma,\eta) \to 0$ при $|\sigma| \to \infty$, та скориставшись рівностями

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} i x_j e^{i(x,\sigma)} \sigma_j v(t,\sigma,\eta) d\sigma = \\ = - \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{i(x,\sigma)} \partial_{\sigma_j} (\sigma_j v(t,\sigma,\eta)) d\sigma,$$

$$B_y j_\nu(\eta y) = -\eta^2 j_\nu(\eta y),$$

одержимо для функції v рівняння

$$\Big(\partial_t + \sum_{j=1}^{n} \sigma_j \partial_{\sigma_j} \Big) v(t,\sigma,\eta) = \\ = - \Big(\sum_{j,l=1}^{n} a_{jl} \sigma_j \sigma_l + \eta^2 \Big) v(t,\sigma,\eta), \\ t > \tau,\ (\sigma,\eta) \in \mathbb{R}_+^{n+1}. \quad (11)$$

Якщо припустити, що для функції φ існує перетворення Фур'є-Бесселя

$$\psi(\sigma,\eta) \equiv F_{x\to\sigma} F_{B,y\to\eta} [\varphi(x,y)] \equiv \\ \equiv \int\limits_{\mathbb{R}_+^{n+1}} e^{-i(x,\sigma)} \varphi(x,y) j_\nu(\eta y) y^{2\nu+1} dx dy, \\ (\sigma,\eta) \in \mathbb{R}_+^{n+1}, \quad (12)$$

то із (7) і (9) дістанемо початкову умову

$$v(t,\sigma,\eta)|_{t=\tau} = \psi(\sigma,\eta), \quad (\sigma,\eta) \in \mathbb{R}_+^{n+1}. \quad (13)$$

Розв'яжемо задачу (11), (13) методом характеристик. Відповідна система характеристичних рівнянь має вигляд

$$\frac{dt}{1} = \frac{d\sigma_1}{\sigma_1} = \cdots = \frac{d\sigma_n}{\sigma_n} = - \frac{dv}{\Big(\sum\limits_{j,l=1}^{n} a_{jl} \sigma_j \sigma_l + \eta^2 \Big) v}.$$

Її $n+1$ незалежними першими інтегралами є

$$\sigma_j e^{-t} = C_j, \quad j \in \{1, \dots, n\},$$

або

$$\sigma e^{-t} = C \equiv (C_1, \dots, C_n), \tag{14}$$

$$v \exp\Big\{ \int\limits_\tau^t \Big(\sum_{j,l=1}^n a_{jl} \sigma_j \sigma_l + \eta^2 \Big) d\theta \Big\} = C'. \tag{15}$$

З (14) і (15) маємо

$$v = C' \exp\Big\{ - \int\limits_\tau^t \Big(\sum_{j,l=1}^n a_{jl} C_j C_l e^{2\theta} + \eta^2 \Big) d\theta \Big\} =$$

$$= C' \exp\Big\{ -\frac{1}{2} \sum_{j,l=1}^n a_{jl} C_j C_l (e^{2t} - e^{2\tau}) - \eta^2 (t-\tau) \Big\}. \tag{16}$$

Нехай $\widehat{\sigma}$ і $\widehat{v}$ – значення при $t = \tau$ відповідно σ і v. Тоді $\widehat{\sigma} = Ce^\tau$ і $\widehat{v} = C'$. Оскільки з (13) випливає, що $\widehat{v} = \psi(\widehat{\sigma}, \eta)$, то $C' = \psi(Ce^\tau, \eta)$ і на підставі (14) і (16) одержуємо розв'язок задачі (11), (13)

$$v(t, \sigma, \eta) = \exp\Big\{ -\frac{1}{2} \sum_{j,l=1}^n a_{jl} \sigma_j \sigma_l (1 - e^{-2(t-\tau)}) -$$

$$-\eta^2 (t - \tau) \Big\} \psi(\sigma e^{-(t-\tau)}, \eta),$$

$$t \geq \tau, (\sigma, \eta) \in \mathbb{R}^{n+1}_+. \tag{17}$$

Підставивши вираз (17) у (9), отримаємо, що

$$u(t, x, y) = W(t - \tau, x, y) \otimes$$

$$\otimes F^{-1}_{\sigma \to x} F^{-1}_{B, \eta \to y} [\psi(\sigma e^{-(t-\tau)}, \eta)],$$

$$t > \tau, (x, y) \in \mathbb{R}^{n+1}_+, \tag{18}$$

де

$$W(t, x, y) \equiv F^{-1}_{\sigma \to x} F^{-1}_{B, \eta \to y} \Big[\exp\Big\{ -\frac{1}{2} \times$$

$$\times \sum_{j,l=1}^n a_{jl} \sigma_j \sigma_l (1 - e^{-2t}) - \eta^2 t \Big\} \Big],$$

$$t > 0, (x, y) \in \mathbb{R}^{n+1}_+, \tag{19}$$

$\otimes$ – операція згортки, тобто

$$(f \otimes g)(x, y) \equiv \int\limits_{\mathbb{R}^{n+1}_+} T^\eta_y [f(x - \xi, y)] g(\xi, \eta) \times$$

$$\times \eta^{2\nu+1} d\xi d\eta. \tag{20}$$

Тут T^η_y – оператор узагальненого зсуву, який визначається формулою

$$T^\eta_y [f(y)] \equiv \Gamma(\nu + 1)(\sqrt{\pi}\Gamma(\nu + 1/2))^{-1} \times$$

$$\times \int\limits_0^\pi f(\sqrt{y^2 + \eta^2 - 2y\eta \cos \varphi}) \sin^{2\nu} \varphi \, d\varphi,$$

$$y > 0, \quad \eta > 0, \tag{21}$$

і властивості якого досліджені в [6].

Займемось дослідженням функції (19), яку перепишемо у вигляді

$$W(t, x, y) = W_1(t, x) W_2(t, y),$$

$$t > 0, (x, y) \in \mathbb{R}^{n+1}_+, \tag{22}$$

де

$$W_1(t, x) \equiv F^{-1}_{\sigma \to x} \Big[\exp\Big\{ -\frac{1}{2} \times$$

$$\times \sum_{j,l=1}^n a_{jl} \sigma_j \sigma_l (1 - e^{-2t}) \Big\} \Big],$$

$$W_2(t, y) \equiv F^{-1}_{B, \eta \to y} [\exp\{-\eta^2 t\}].$$

Обчислимо $W_1(t, x)$. Якщо зробити заміну $\xi_j = \sqrt{\alpha(t)/2}\sigma_j$, $j \in \{1, \dots, n\}$, де $\alpha(t) \equiv 1 - e^{-2t}$, то тоді матимемо

$$W_1(t, x) = (2\pi\sqrt{\alpha(t)/2})^{-n} \times$$

$$\times \int\limits_{\mathbb{R}^n} \exp\Big\{ i(x/\sqrt{\alpha(t)/2}, \xi) - \sum_{j,l=1}^n a_{jl} \xi_j \xi_l \} d\xi.$$

Використавши формулу (38) із [9, с. 172], одержимо

$$W_1(t, x) = (2\pi\alpha(t))^{-n/2} (\det A)^{-1/2} \times$$

$$\times \exp\Big\{ -(2\alpha(t))^{-1} \sum_{j,l=1}^n a'_{jl} x_j x_l \Big\}, \tag{23}$$

де a'_{jl}, $\{j, l\} \subset \{1, \dots, n\}$, – елементи матриці, оберненої до A.

За допомогою рівності (10) і формули Вебера [8, с. 100]

$$\int_0^\infty \exp\{-\eta^2 t\} J_\nu(\eta y)\eta^{\nu+1} d\eta =$$

$$= (2t)^{-\nu-1} y^\nu \exp\{-y^2/(4t)\}$$

отримуємо, що

$$W_2(t,y) = 2^{-2\nu}(\Gamma(\nu+1))^{-2} \int_0^\infty \exp\{-\eta^2 t\}\times$$

$$\times j_\nu(\eta y)\eta^{2\nu+1} d\eta = 2^{-\nu}(\Gamma(\nu+1))^{-1} y^{-\nu}\times$$

$$\times \int_0^\infty \exp\{-\eta^2 t\} J_\nu(\eta y)\eta^{\nu+1} d\eta =$$

$$= 2^{-2\nu-1}(\Gamma(\nu+1))^{-1} t^{-\nu-1} \exp\{-y^2/(4t)\},$$

$$t > 0, y > 0. \qquad (24)$$

З (22) – (24) випливає формула

$$W(t,x,y) = (2\pi)^{-n/2} 2^{-2\nu-1}(\Gamma(\nu+1))^{-1}\times$$

$$\times(\det A)^{-1/2} t^{-\nu-1}(\alpha(t))^{-n/2} \exp\{-(2\alpha(t))^{-1}\times$$

$$\times \sum_{j,l=1}^n a'_{jl} x_j x_l - y^2/(4t)\}. \qquad (25)$$

Оскільки

$$F^{-1}_{\sigma\to x} F^{-1}_{B,\eta\to y}[\psi(\sigma e^{-t},\eta)] = 2^{-2\nu}(2\pi)^{-n}\times$$

$$\times(\Gamma(\nu+1))^{-2} \int_{\mathbb{R}^{n+1}_+} e^{i(x,\sigma)}\psi(\sigma e^{-t},\eta) j_\nu(\eta y)\times$$

$$\times\eta^{2\nu+1} d\sigma d\eta,$$

то після заміни змінної інтегрування за формулою $\sigma e^{-t} = \beta$ та використання формули (12) одержимо

$$F^{-1}_{\sigma\to x} F^{-1}_{B,\eta\to y}[\psi(e^{-t}\sigma,\eta)] =$$

$$= e^{nt} F^{-1}_{\beta\to xe^t} F^{-1}_{B,\eta\to y}[\psi(\beta,\eta)] =$$

$$= e^{nt} F^{-1}_{B,\eta\to y} F^{-1}_{\beta\to xe^t}[F_{x\to\beta} F_{B,y\to\eta}[\varphi(x,y)]] =$$

$$= e^{nt}\varphi(xe^t, y). \qquad (26)$$

З формул (18) – (20), (25) і (26) випливає рівність

$$u(t,x,y) = (2\pi)^{-n/2} 2^{-2\nu-1}(\Gamma(\nu+1))^{-1}\times$$

$$\times(\det A)^{-1/2}(t-\tau)^{-\nu-1}(\alpha(t-\tau))^{-n/2} e^{n(t-\tau)}\times$$

$$\times\int_{\mathbb{R}^{n+1}_+} \exp\{-(2\alpha(t-\tau))^{-1}\sum_{j,l=1}^n a'_{jl}(x_j-\xi_j)(x_l-\xi_l)\}\times$$

$$\times T^\eta_y[\exp\{-y^2/(4(t-\tau))\}]\varphi(e^{t-\tau}\xi,\eta)\eta^{2\nu+1} d\xi d\eta.$$

Здійснивши в ній заміну $e^{t-\tau}\xi = \beta$ і замість β написавши ξ, матимемо

$$u(t,x,y) = \int_{\mathbb{R}^{n+1}_+} G(t,x,y;\tau,\xi,\eta)\varphi(\xi,\eta)\times$$

$$\times\eta^{2\nu+1} d\xi d\eta, \quad t > \tau, (x,y) \in \mathbb{R}^{n+1}_+, \qquad (27)$$

де

$$G(t,x,y;\tau,\xi,\eta) \equiv G_1(t-\tau,x,\xi) G_2(t-\tau,y,\eta), \qquad (28)$$

$$G_1(t,x,\xi) \equiv (2\pi\alpha(t))^{-n/2}(\det A)^{-1/2}\times$$

$$\times\exp\{-\sum_{j,l=1}^n a'_{jl}(x_j - e^{-t}\xi_j)(x_l - e^{-t}\xi_l)\times$$

$$\times(2\alpha(t))^{-1}\}, \qquad (29)$$

$$G_2(t,y,\eta) \equiv 2^{-2\nu-1}(\Gamma(\nu+1))^{-1} t^{-\nu-1}\times$$

$$\times T^\eta_y[\exp\{-y^2/(4t)\}],$$

$$t > 0, \{(x,y),(\xi,\eta)\} \subset \mathbb{R}^{n+1}_+. \qquad (30)$$

За допомогою рівності [7]

$$T^\eta_y[\exp\{-y^2/(4t)\}] = (-1)^{-3\nu/2} 2^{2\nu} t^\nu \Gamma(\nu+1)\times$$

$$\times(y\eta)^{-\nu}\exp\{-(y^2+\eta^2)/(4t)\} J_\nu(-iy\eta/(2t))$$

формула (30) набуває вигляду

$$G_2(t,y,\eta) = (-1)^{-3\nu/2}(2t)^{-1}(y\eta)^{-\nu}\times$$

$$\times J_\nu(-iy\eta/(2t))\exp\{-(y^2+\eta^2)/(4t)\},$$

$$t > 0, y > 0, \eta > 0.$$

Отже, для розв'язку задачі (5), (7), (8) одержана формула (27). Якщо припускати, що φ – неперервна й обмежена в $\mathbb{R}^{n+1}_+$ функція, то можна безпосередньо переконатися, що формула (27) справді визначає розв'язок задачі (5), (7), (8), тобто що функція G є ФРЗК для рівняння (5). Це також випливає з того, що функції G_1 і G_2 є ФРЗК відповідно для рівнянь

$$\partial_t u(t,x) - \sum_{j,l=1}^{n} a_{jl}\partial_{x_j}\partial_{x_l} u(t,x) -$$

$$-\sum_{j=1}^{n}\partial_{x_j}(x_j u(t,x)) = 0, \quad t>0, x\in\mathbb{R}^n,$$

і

$$\partial_t u(t,y) - B_y u(t,y) = 0, \quad t>0, y>0.$$

Для функції G_2 це доведено в [7], а доведення для G_1 аналогічне доведенню для випадку параболічного рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами [10, 11].

2. З формул (28) – (30) легко одержуємо такі оцінки для ФРЗК G:

$$|\partial_x^k \partial_\xi^m G(t,x,y;\tau,\xi,\eta)| \le$$

$$\le C_{km}(\alpha(t-\tau))^{-(n+|k|+|m|)/2}(t-\tau)^{-\nu-1}\times$$

$$\times \exp\{-|m|(t-\tau) - c|x-e^{-(t-\tau)}\xi|^2/\alpha(t-\tau)\}\times$$

$$\times T_y^\eta[\exp\{-\frac{1}{4}y^2/(t-\tau)\}], \quad t>\tau,$$

$$\{(x,y),(\xi,\eta)\}\subset\mathbb{R}_+^{n+1}, \{k,m\}\subset\mathbb{Z}_+^n, \quad (31)$$

де C_{km} і c – додатні сталі.

Зауважимо, що для будь-якого $c_2 \in (0,1/4)$ правильна оцінка

$$T_y^\eta[\exp\{-\frac{1}{4}y^2/t\}] \le \exp\{-c_2(y-\eta)^2/t\}\times$$

$$\times T_y^\eta[\exp\{-(\frac{1}{4}-c_2)y^2/t\}],$$

$$t>0, y>0, \eta>0. \quad (32)$$

Справді, за допомогою (21) отримуємо, що

$$T_y^\eta[\exp\{-\frac{1}{4}y^2/t\}] = \Gamma(\nu+1)(\sqrt{\pi}\Gamma(\nu+1/2))^{-1}\times$$

$$\times\int_0^\pi \exp\{-c_2(y^2+\eta^2-2y\eta\cos\varphi)/t\}\times$$

$$\times\exp\{-(\frac{1}{4}-c_2)(y^2+\eta^2-2y\eta\cos\varphi)/t\}\times$$

$$\times\sin^{2\nu}\varphi d\varphi \le$$

$$\le \exp\{-c_2(y-\eta)^2/t\}T_y^\eta[\exp\{-(\frac{1}{4}-c_2)y^2/t\}].$$

З (31) і (32) випливають оцінки

$$|\partial_x^k\partial_\xi^m G(t,x,y;\tau,\xi,\eta)| \le$$

$$\le C_{km}(\alpha(t-\tau))^{-(n+|k|+|m|)/2}(t-\tau)^{-\nu-1}\times$$

$$\times\exp\{-|m|(t-\tau)-c|x-e^{-(t-\tau)}\xi|^2/\alpha(t-\tau)-$$

$$-c_2(y-\eta)^2/(t-\tau)\}T_y^\eta[\exp\{-(\frac{1}{4}-c_2)y^2/(t-\tau)\}],$$

$$t>\tau, \{(x,y),(\xi,\eta)\}\subset\mathbb{R}_+^{n+1}, \{k,m\}\subset\mathbb{Z}_+^n. \quad (33)$$

Доведемо правильність рівності

$$I \equiv \int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} G(t,x,y;\tau,\xi,\eta)\eta^{2\nu+1}d\xi d\eta = e^{n(t-\tau)}. \quad (34)$$

Якщо використати формули (28) – (30), то матимемо

$$I = (2\pi\alpha(t-\tau))^{-n/2}(\det A)^{-1/2}2^{-2\nu-1}\times$$

$$\times(\Gamma(\nu+1))^{-1}(t-\tau)^{-\nu-1}I_1 I_2, \quad (35)$$

де

$$I_1 \equiv \int_{\mathbb{R}^n}\exp\{-\sum_{j,l=1}^{n} a'_{jl}(x_j - e^{-(t-\tau)}\xi_j)\times$$

$$\times(x_l - e^{-(t-\tau)}\xi_l)(2\alpha(t-\tau))^{-1}\}d\xi,$$

$$I_2 \equiv \int_0^\infty T_y^\eta[\exp\{-y^2/(4(t-\tau))\}\eta^{2\nu+1}]d\eta.$$

В інтегралі I_1 зробимо заміну $z = (e^{-(t-\tau)}\xi - x)(2\alpha(t-\tau))^{-1/2}$ і скористаємося формулою (38) із [9, с. 172]. Тоді одержимо

$$I_1 = (2\alpha(t-\tau))^{n/2}e^{n(t-\tau)}\times$$

$$\times\int_{\mathbb{R}^n}\exp\{-\sum_{j,l=1}^{n} a'_{jl}z_j z_l\}dz = (2\alpha(t-\tau))^{n/2}\times$$

$$\times e^{n(t-\tau)}F_{z\to 0}[\exp\{-(A^{-1}z,z)\}] =$$

$$= (2\pi\alpha(t-\tau))^{n/2}(\det A^{-1})^{-1/2} =$$
$$= (2\pi\alpha(t-\tau))^{n/2}(\det A)^{1/2}. \qquad (36)$$

Згідно з властивостями оператора узагальненого зсуву маємо

$$I_2 = 2^{\nu+1}(t-\tau)^{\nu+1}\Gamma(\nu+1). \qquad (37)$$

Із (35) – (37) випливає рівність (34).

3. Нетрудно переконатися, що спряженою до операції L із (5) є операція

$$L^* \equiv -\partial_\tau - \sum_{j,l=1}^{n} a_{jl}\partial_{\xi_j}\partial_{\xi_l} + \sum_{j=1}^{n}\xi_j\partial_{\xi_j} - B_\eta$$

і що правильна формула

$$(vLu - uL^*v)(\beta,\sigma,\zeta) = (\partial_\beta(vu) -$$
$$-\sum_{j=1}^{n}\partial_{\sigma_j}(\sum_{l=1}^{n} a_{jl}(v\partial_{\sigma_l}u - u\partial_{\sigma_l}v) +$$
$$+\sigma_j vu) - \zeta^{-2\nu-1}\partial_\zeta(\zeta^{2\nu+1}v\partial_\zeta u -$$
$$-\zeta^{2\nu+1}u\partial_\zeta v))(\beta,\sigma,\zeta). \qquad (38)$$

Розглянемо спряжену задачу Коші

$$(L^*v)(\tau,\xi,\eta) = 0, \quad \tau < t, (\xi,\eta) \in \mathbb{R}_+^{n+1},$$
$$v(\tau,\xi,\eta)|_{\tau=t} = \varphi(\xi,\eta), (\xi,\eta) \in \mathbb{R}_+^{n+1},$$
$$\partial_\eta v(\tau,\xi,\eta)|_{\eta=0} = 0, \tau < t, \xi \in \mathbb{R}^n. \qquad (39)$$

Ця задача розв'язується за допомогою перетворення Фур'є-Бесселя і методу характеристик так само, як і задача (5), (7), (8). Для розв'язку v задачі (3) одержується формула

$$v(\tau,\xi,\eta) = \int\limits_{\mathbb{R}_+^{n+1}} G^*(\tau,\xi,\eta;t,x,y)\varphi(x,y)\times$$
$$\times y^{2\nu+1}dxdy, \quad \tau < t, (\xi,\eta) \in \mathbb{R}_+^{n+1},$$

де

$$G^*(\tau,\xi,\eta;t,x,y) \equiv (2\pi\alpha(t-\tau))^{-n/2}2^{-2\nu-1}\times$$
$$\times(\Gamma(\nu+1))^{-1}(\det A)^{-1/2}(t-\tau)^{-\nu-1}\times$$
$$\times\exp\{-\sum_{j,l=1}^{n} a'_{jl}(x_j - e^{-(t-\tau)}\xi_j)(x_l - e^{-(t-\tau)}\xi_l)\times$$
$$\times(2\alpha(t-\tau))^{-1}\}T_y^\eta[\exp\{-y^2/(4(t-\tau))\}],$$
$$\tau < t, \{(\xi,\eta),(x,y)\} \subset \mathbb{R}_+^{n+1}. \qquad (40)$$

Порівнявши формули (28) – (30) і (40) бачимо, що

$$G(t,x,y;\tau,\xi,\eta) = G^*(\tau,\xi,\eta;t,x,y),$$
$$t > \tau, \{(x,y),(\xi,\eta)\} \subset \mathbb{R}_+^{n+1}, \qquad (41)$$

тобто ФРЗК G має властивість нормальності.

Для функції G правильна також формула згортки

$$G(t,x,y;\tau,\xi,\eta) = \int\limits_{\mathbb{R}_+^{n+1}} G(t,x,y;\beta,\sigma,\zeta)\times$$
$$\times G(\beta,\sigma,\zeta;\tau,\xi,\eta)\zeta^{2\nu+1}d\sigma d\zeta,$$
$$\tau < \beta < t, \{(x,y),(\xi,\eta)\} \subset \mathbb{R}_+^{n+1}. \qquad (42)$$

Щоб довести цю формулу, скористаємося формулою Гріна-Остроградського

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} d\beta \int\limits_{K_R} d\sigma \int\limits_0^R (vLu - uL^*v)(\beta,\sigma,\zeta)\zeta^{2\nu+1}d\zeta =$$
$$= \int\limits_{K_R} d\sigma \int\limits_0^R (vu)(\beta,\sigma,\zeta)\zeta^{2\nu+1}d\zeta|_{\beta=t_0}^{t_1} -$$
$$-\sum_{j=1}^{n}\int\limits_{t_0}^{t_1} d\beta \int\limits_{S_R}\int\limits_0^R (\sum_{l=1}^{n} a_{jl}(v\partial_{\sigma_l}u - u\partial_{\sigma_l}v) +$$
$$+\sigma_j vu)(\beta,\sigma,\zeta)\zeta^{2\nu+1}\mu_j ds_\sigma d\zeta -$$
$$-\int\limits_{t_0}^{t_1} d\beta \int\limits_{K_R} \zeta^{2\nu+1}(v\partial_\zeta u - u\partial_\zeta v)(\beta,\sigma,\zeta)d\sigma|_{\zeta=0}^{R}, \qquad (43)$$

де $K_R \equiv \{\sigma \in \mathbb{R}^n | \ |\sigma| \le R\}$ – куля, S_R – її межа, $(\mu_1,...,\mu_n)$ – орт зовнішньої нормалі до S_R, $t_0 < t_1$.

Формула (43) одержується, якщо тотожність (38) зінтегрувати по множині $[t_0,t_1]\times$

$K_R \times (0,R)$ відносно міри λ, пов'язаної з мірою Лебега рівністю

$$\lambda(A) = \int\limits_A \zeta^{2\nu+1} d\beta d\sigma d\zeta,$$

та скористатися формулою Гаусса-Остроградського.

Якщо в (43) взяти $t_0 = \beta$, $t_1 = t - \varepsilon$, де $\varepsilon > 0$ таке, що $\beta < t - \varepsilon$, $u(\beta,\sigma,\zeta) = G(\beta,\sigma,\zeta;\tau,\xi,\eta)$, $v(\beta,\sigma,\zeta) = G^*(\beta,\sigma,\zeta;t,x,y)$, скористатися рівністю (41) і перейти до границі спочатку при $R \to \infty$, а потім при $\varepsilon \to 0$, то одержимо формулу (42).

4. Розглянемо тепер задачу Коші для рівняння (6) з умовами

$$w(t,x,y)|_{t=\tau} = \psi(x,y), \quad (x,y) \in \mathbb{R}_+^{n+1}, \quad (44)$$

$$\partial_y w(t,x,y)|_{y=0} = 0, \quad t > \tau, x \in \mathbb{R}^n. \quad (45)$$

Перейдемо в ній від функції w до нової функції u за допомогою заміни

$$w(t,x,y) = \exp\{-\sum_{j=1}^n (P_j(x_j) - x_j^2/4)\} u(t,x,y),$$

$$t > \tau, (x,y) \in \mathbb{R}_+^{n+1}, \quad (46)$$

де P_j – первісна функції b_j. Для функції u одержимо задачу (5), (7), (8), в якій $a_{jl} = \delta_{jl}$, $\{j,l\} \subset \{1,\ldots,n\}$, а

$$\varphi(x,y) \equiv \psi(x,y) \exp\{\sum_{j=1}^n (P_j(x_j) - x_j^2/4)\},$$

$$(x,y) \subset \mathbb{R}_+^{n+1}. \quad (47)$$

Використовуючи формулу (27) для розв'язку задачі (5), (7), (8) та рівності (46) і (47), для розв'язку задачі (6), (44), (45) одержуємо формулу

$$w(t,x,y) = \int\limits_{\mathbb{R}_+^{n+1}} Z(t,x,y;\tau,\xi,\eta)\psi(\xi,\eta) \times$$

$$\times \eta^{2\nu+1} d\xi d\eta, \quad t > \tau, (x,y) \in \mathbb{R}_+^{n+1},$$

в якій

$$Z(t,x,y;\tau,\xi,\eta) \equiv \exp\{\sum_{j=1}^n (-P_j(x_j) + P_j(\xi_j) +$$

$$+(x_j^2 - \xi_j^2)/4)\} G(t,x,y;\tau,\xi,\eta),$$

$$t > \tau, \{(x,y),(\xi,\eta)\} \subset \mathbb{R}_+^{n+1}.$$

Ця функція є ФРЗК для рівняння (6).

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Баруча-Рид А.Т.* Элементы теории марковских процессов и их приложения.— М.: Наука, 1969.— 511 с.

2. *Тихонов В.И., Кульман Н.К.* Нелинейная фильтрация и квазикогерентный прием сигналов.— М.: Сов. радио, 1975.— 704 с.

3. *Тихонов В.И., Миронов М.А.* Марковские процессы.— М.: Сов. радио, 1977.— 488 с.

4. *Эйдельман С.Д.* Параболические уравнения // Итоги науки и техники. ВИНИТИ. Соврем. пробл. мат. Фунд. напр.— 1990.— **63**.— С.201—313.

5. *Ивасишин Л.М.* Интегральное представление и множества начальных значений решений параболических уравнений с оператором Бесселя и растущими коэффициентами.— Черновцы, 1992.— 62 с.— Деп. в УкрИНТЭИ 26.10.92, № 1731.— Ук92.

6. *Левитан Б.М.* Разложение по функциям Бесселя в ряды и интегралы Фурье // Успехи мат. наук.— 1951.— **6**, № 2.— С.102—143.

7. *Житомирский Я.И.* Задача Коши для систем линейных уравнений в частных производных с дифференциальными операторами типа Бесселя // Мат. сб.— 1955.— **36**, № 2.— С.299—310.

8. *Коренев Б.Г.* Введение в теорию бесселевых функций.— М.: Наука, 1971.— 287 с.

9. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики.— М.: Наука, 1988.— 512 с.

10. *Эйдельман С.Д.* Параболические системы.— М.: Наука, 1964.— 443 с.

11. *Ивасишен С.Д., Эйдельман С.Д.* Параболические уравнения: примеры, задача Коши, свойства решений // Математика сегодня'87: Науч.-метод. сб.— К.: Выща шк., 1987.— С.74—108.

Стаття надійшла до редколегії 10.01.2006