УДК 517.929

©2005 р. І.М. Черевко

Чернівецький національний університет ім. Юрія Федьковича, Чернівці

ІНТЕГРАЛЬНІ МНОГОВИДИ ПОВІЛЬНИХ ЗМІННИХ ЛІНІЙНИХ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНИХ ПЕРІОДИЧНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-ФУНКЦІОНАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Установлено умови існування інтегральних многовидів лінійної сингулярно збуреної системи із запізненням. Досліджено властивості періодичності та майже періодичності функцій, що описують інтегральні многовиди.

The conditions for the existence of integral manifolds of linear singularly perturbed system with delay were established. The periodicity and almost periodicity integral manifolds are investigated.

Вступ. Метод інтегральних многовидів є ефективним алгоритмом дослідження сингулярно збурених систем високої розмірності. Він дозволяє здійснити якісне вивчення поведінки як окремих розв'язків, так і цілих їх множин.

У статті досліджуються умови існування інтегральних многовидів повільних змінних лінійних сингулярно збурених диференціально-функціональних рівнянь та вивчаються деякі їх властивості. Для диференціально-різницевих рівнянь такі питання вивчалися в працях [1 – 3], а для диференціально-функціональних рівнянь – в [4 – 5].

1. Існування інтегральних многовидів повільних змінних. Розглянемо систему рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x(t) + L_1(t)y_t,$$

$$\varepsilon\frac{dy}{dt} = B(t)x(t) + L_2(t)y_t, \tag{1}$$

де $x \in R^n$, $y \in R^m$, $y_t = y(t+\theta)$, $t \in R$, $\theta \in [-\varepsilon\Delta, 0]$, $A(t), B(t)$ — матриці розмірностей $n \times n$, $n \times m$, L_1, L_2 — лінійні функціонали зі значеннями в R^n і R^m відповідно, $\Delta > 0$, ε — малий додатний параметр.

Згідно з теоремою Ріса [6], оператори L_1, L_2 можна представити у вигляді інтегралів Стільтьєса

$$L_i(t)\varphi = \int_{-\Delta}^{0} [d\eta_i(t,\theta)]\varphi(\theta),\ i = 1, 2,$$

де $\eta_i(t,\theta)$ — матриці розмірностей $n \times n, n \times m$ відповідно, елементи яких є функціями обмеженої варіації по θ для кожного t і неперервними по t рівномірно відносно θ.

Припустимо, що

$$|L_i(t)\varphi| \le m_i(t)|\varphi|, \quad i = 1, 2 \tag{2}$$

для всіх $t \in R, \varphi \in C$.

Нехай для системи (1) справджуються умови:

I) матриці A, B та функції m_1, m_2 обмежені при $t \in R$ деякою додатною сталою M;

II) усі корені характеристичного рівняння

$$\Phi(\lambda) = \det\left(\lambda E - \int_{-\Delta}^{0} [d\eta_2(t,\theta)]e^{\lambda\theta}\right) = 0$$

лежать у лівій півплощині $\operatorname{Re}\lambda \le -2\mu < 0$ для всіх $t \in R$.

При виконанні умови II для фундаментальної матриці $Y(t,s)$ укороченого рівняння

$$\varepsilon\frac{dy}{dt} = L_2(t)y_t, \tag{3}$$

справджується нерівність [7]

$$|Y(t,s)| \le Ke^{-\frac{\mu}{\varepsilon}(t-s)}, \quad t \ge s, \quad K > 0. \tag{4}$$

Визначимо оператор зсуву за розв'язками рівняння (3)

$$T(t,s): C[-\varepsilon\Delta,0] \to C[-\varepsilon\Delta,0], \quad t \ge s$$

співвідношенням

$$T(t,s)\varphi(\theta) = y(t+\theta,s,\varphi) = y_t(s,\varphi),$$

де $y_t(s,\varphi)$ — розв'язок рівняння (3) з початковою функцією $\varphi(\theta)$ при $t=s$.

Тоді справджується рівність

$$Y_t(\theta,s) = T(t,s)Y_0(\theta),$$

де $Y_0(\theta)=0$ для $-\varepsilon\Delta \le \theta < 0$, $Y_0(0)=E$, а з умови II випливає оцінка [8]

$$|T(t,s)\varphi| \le K_1 e^{-\frac{\mu}{\varepsilon}(t-s)}|\varphi|, \quad K_1>0,$$

$$\varphi \in C. \tag{5}$$

Запишемо систему (1) в еквівалентній інтегро-диференціальній формі [8]

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x(t) + L_1(t)y_t,$$

$$y_t = T(t,t_0)y_{t_0} + \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{t_0}^{t} T(t,s)Y_0B(s)x(s)ds, \tag{6}$$

де інтеграл розуміємо як інтеграл у R^m для кожного $\theta \in [-\varepsilon\Delta,0]$.

Означення 1. *Неперервна рівномірно обмежена матриця P_t , $t\in R$, $\theta \in [-\varepsilon\Delta,0]$ описує інтегральний многовид повільних змінних системи (6), якщо для довільних t_0, x_0 і розв'язку системи*

$$\frac{dx}{dt} = [A(t) + L_1(t)P_t(\theta)]x(t)$$

з початковою умовою $x(t_0)=x_0$ функції $x(t)$, $y_t = P_t(\theta)x(t)$ задовольняють друге рівняння системи (6).

Теорема 1. *Нехай виконуються умови I, II. Тоді існує $\varepsilon_0>0$ таке, що для всіх $0<\varepsilon\le\varepsilon_0$ існує інтегральний многовид системи (6), який можна подати у вигляді*

$$y_t = P_t(\theta)x(t). \tag{7}$$

Доведення. Розглянемо ітераційний процес

$$P_t^0 = 0, \quad P_t^{n+1} = \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{-\infty}^{t} T(t,s)Y_0B(s)X_n(s,t)ds,$$

$$n = 0,1,.... \tag{8}$$

де $X_n(t,s)$ — фундаментальна матриця рівняння

$$\frac{dx}{dt} = [A(t) + L_1(t)P_t^n]x(t). \tag{9}$$

На підставі припущення I маємо, що фундаментальна матриця $X_0(t,s)$ задовольняє нерівність

$$|X_0(t,s)| \le K_0 e^{\alpha|t-s|},\ K_0>0,\ \alpha \ge 0. \tag{10}$$

Тоді із (5), (8), (10) дістаємо

$$|P_t^1| \le \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{-\infty}^{t} K_1 e^{-\frac{\mu}{\varepsilon}(t-s)} M K_0 e^{\alpha(t-s)}ds \le$$

$$\le \frac{2K_0K_1M}{\mu} = K_2,$$

при $\varepsilon < \dfrac{\mu}{2\alpha}$.

Нехай P_t^n визначено і для нього справедлива оцінка

$$|P_t^n| \le K_2.$$

Тоді з (9) одержуємо

$$|X_n(t,s)| \le K_0 e^{(\alpha+\beta K_2)|t-s|}, \quad \beta \ge 0. \tag{11}$$

Враховуючи нерівності (5), (11), дістаємо оцінку

$$|P_t^{n+1}| \le \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{-\infty}^{t} K_1 e^{-\frac{\mu}{\varepsilon}(t-s)} M K_0 e^{(\alpha+\beta K_2)(t-s)}ds \le$$

$$\le \frac{K_0K_1M}{\mu - \varepsilon(\alpha+\beta K_2)} \le K_2, \tag{12}$$

при $\varepsilon < \dfrac{\mu}{2(\alpha+\beta K_2)}$.

Отже, послідовність P_t^n визначена і рівномірно обмежена сталою K_2 для всіх $n = 0,1,...$ при $\varepsilon \le \varepsilon_1 < \dfrac{\mu}{2(\alpha+\beta K_2)}$.

Розглянемо різницю

$$P_t^{n+1} - P_t^n = \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{-\infty}^{t} T(t,s)Y_0B(s)\times$$
$$\times[X_n(s,t) - X_{n-1}(s,t)]ds. \qquad (13)$$

Для різниці $X_n(t,s) - X_{n-1}(t,s)$ запишемо рівняння

$$\frac{d}{dt}[X_n(t,s) - X_{n-1}(t,s)] =$$
$$= [A(t) + L_1(t)P_t^n][X_n(t,s) - X_{n-1}(t,s)] +$$
$$+ L_1(t)(P_t^n - P_t^{n-1})X_{n-1}(t,s).$$

Враховуючи, що $X_n(s,s) = X_{n-1}(s,s) = E$, маємо

$$X_n(t,t_0) - X_{n-1}(t,t_0) = \int\limits_{t_0}^{t} X_n(t,s)L_1(s)\times$$
$$\times(P_s^n - P_s^{n-1})X_{n-1}(s,t_0)ds.$$

При $t \le t_0$ дістаємо оцінку

$$|X_n(t,t_0) - X_{n-1}(t,t_0)| \le \int\limits_{t}^{t_0} K_0 e^{(\alpha+\beta K_2)(s-t)}\times$$
$$\times M\sup_{s,\theta}|P_s^n - P_s^{n-1}|K_0 e^{(\alpha+\beta K_2)(t_0-s)}ds =$$
$$= K_0^2 M \sup_{s,\theta}|P_s^n - P_s^{n-1}|e^{(\alpha+\beta K_2)(t_0-t)}(t_0 - t). \qquad (14)$$

Позначимо

$$\delta_{n+1} = \sup_{t,\theta}|P_t^{n+1}(\theta) - P_t^n(\theta)|.$$

Тоді з (13), враховуючи нерівність (14), одержимо

$$\delta_{n+1} \le \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{-\infty}^{t} K e^{-\frac{\mu}{\varepsilon}(t-s)} M K_0^2 \delta_n\times$$
$$\times e^{(\alpha+\beta K_2)(t-s)}(t-s)ds.$$

Після інтегрування остання нерівність набуває вигляду

$$\delta_{n+1} \le \frac{\varepsilon M^2 K_0^2 K}{[\mu - \varepsilon(\alpha+\beta K_2)]}\delta_n.$$

Вибираючи $0 < \varepsilon \le \varepsilon_0 = \min\left\{\varepsilon_1, \dfrac{\mu^2}{8M^2K_0^2K}\right\}$, дістаємо

$$\delta_{n+1} \le \frac{1}{2}\delta_n.$$

Отже, послідовність P_t^n рівномірно збіжна при $n \to \infty$ для всіх $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$.

Покладемо

$$P_t(\theta) = \lim_{n\to\infty} P_t^n(\theta).$$

На основі нерівності (12) маємо

$$|P_t(\theta)| \le K_2.$$

Покажемо, що співвідношення (7) визначає інтегральний многовид системи (6). Нехай $X(t,t_0)$ — фундаментальна матриця системи

$$\frac{dx}{dt} = [A(t) + L_1(t)P_t]x(t). \qquad (15)$$

Тоді дістаємо

$$X(t,t_0) = \lim_{n\to\infty} X_n(t,t_0),$$

$$P_t(\theta) = \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{-\infty}^{t} T(t,s)Y_0B(s)X(s,t)ds. \qquad (16)$$

Нехай $x(t) = \varphi(t,t_0,x_0)$ розв'язок рівняння (15) такий, що $\varphi(t_0,t_0,x_0) = x_0$. Подамо його у вигляді

$$x(t) = X(t,t_0)x_0.$$

Позначаючи $y_t = P_t(\theta)x(t)$, одержимо

$$y_t = \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{-\infty}^{t} T(t,s)Y_0B(s)X(s,t)ds \cdot x(t) =$$
$$= \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{-\infty}^{t} T(t,s)Y_0B(s)x(s)ds. \qquad (17)$$

Враховуючи півгрупову властивість оператора T

$$T(t,s) = T(t,t_0)T(t_0,s),$$

перепишемо рівність (17) у вигляді

$$y_t = T(t,t_0)\frac{1}{\varepsilon}\int_{-\infty}^{t_0} T(t_0,s)Y_0B(s)x(s)ds +$$

$$+\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t} T(t,s)Y_0B(s)x(s)ds.$$

Зі співвідношення (17) маємо

$$y_t = T(t,t_0)y_{t_0} + \frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t} T(t,s)Y_0B(s)x(s)ds.$$

Отже, функції $x(t), y_t = P_t(\theta)x(t)$ задовольняють друге рівняння системи (6), а це означає, що співвідношення (7) визначає інтегральний многовид системи (6). Теорема 1 доведена.

2. Інтегральні многовиди періодичних і майже періодичних систем.

Теорема 2. *Якщо в системі (1) матриці $A(t), B(t), \eta_i(t,\theta), i = 1,2$ періодичні по t з періодом ω, тоді матриця $P_t(\theta)$, що визначає інтегральний многовид (7), періодична по t з періодом ω. Якщо матриці $A(t), B(t)$ майже періодичні по t, а матриці $\eta_i(t,\theta), i = 1,2$ майже періодичні по t рівномірно відносно $\theta \in [-\varepsilon\Delta, 0]$, тоді матриця $P_t(\theta)$ — майже періодична по t рівномірно відносно $\theta \in [-\varepsilon\Delta, 0]$.*

Доведення. Якщо матриці $A(t)$ і $\eta_2(t,\theta)$ періодичні по t з періодом ω, тоді справджуються рівності

$$T(t+\omega, s+\omega) = T(t,s),$$

$$X_0(t+\omega, t_0+\omega) = X_0(t,t_0).$$

Нехай матриця $B(t)$ — періодична по t з періодом ω. У цьому випадку одержуємо

$$P^1_{t+\omega}(\theta) = \frac{1}{\varepsilon}\int_{-\infty}^{t+\omega} T(t+\omega,s)Y_0B(s)X_0(s,t+\omega)ds =$$

$$= \frac{1}{\varepsilon}\int_{-\infty}^{t} T(t+\omega,s+\omega)Y_0B(s+\omega)\times$$

$$\times X_0(s+\omega,t+\omega)ds = P^1_t(\theta).$$

Значить, матриця $P^1_t(\theta)$ періодична по t з періодом ω. Припустимо, що $P^n_t(\theta)$ періодична по t з періодом ω, тоді з періодичності $A(t), \eta_1(t,\theta)$ по t дістаємо

$$X_n(t+\omega, t_0+\omega) = X_n(t,t_0).$$

Періодичність матриці $P^{n+1}_t(\theta)$ доводиться як і для $P^1_t(\theta)$, а періодичність матриці $P_t(\theta)$ випливає з рівномірної збіжності послідовності $P^n_t(\theta)$.

Нехай тепер матриці $A(t), B(t)$ майже періодичні по t, а матриці $\eta_1(t,\theta), \eta_2(t,\theta)$ майже періодичні по t рівномірно відносно $\theta \in [-\Delta, 0]$. Позначимо через τ їх спільний майже-період.

Для різниці $X_0(t+\tau, s+\tau) - X_0(t,s)$ при $s < t$ із рівняння (9) маємо оцінку

$$|X_0(t+\tau,s+\tau) - X_0(t,s)| \le \frac{K_0^2}{2\alpha}\sup_t |A(t+\tau) -$$

$$-A(t)|e^{2\alpha(s-t)}. \qquad (18)$$

Враховуючи означення оператора $T(t,s)$ і рівності

$$T(s+\tau, s+\tau) = T(s,s) = E,$$

маємо рівняння

$$[T(t+\tau,\sigma+\tau) - T(t,\sigma)]E =$$

$$= \frac{1}{\varepsilon}\int_{\sigma}^{t} T(t+\tau,s+\tau)[L_2(s+\tau)-L_2(s)]T(s,\sigma)Eds.$$

Із останньої рівності та оцінки (5) дістаємо

$$|[T(t+\tau,\sigma+\tau) - T(t,\sigma)]E| \le$$

$$\le \frac{1}{\varepsilon}\int_{\sigma}^{t} K_1 e^{-\frac{\mu}{\varepsilon}(t-s)} \operatorname*{Var}_{\theta\in[-\Delta,0]}[\eta_2(s+\tau,\theta)-\eta_2(s,\theta)]\times$$

$$\times e^{-\frac{\mu}{\varepsilon}(s-\sigma)}ds \le$$

$$\le \frac{K_1^2}{\varepsilon}\sup_t \operatorname*{Var}_{\theta\in[-\Delta,0]}[\eta_2(t+\tau,\theta) - \eta_2(t,\theta)]\times$$

$$\times e^{-\frac{\mu}{\varepsilon}(t-\sigma)}(t-\sigma), \quad t \ge \sigma. \qquad (19)$$

Розглянемо різницю $P^1_{t+\tau}(\theta) - P^1_t(\theta)$. Із (8), враховуючи (18), (19), маємо, що при $0 < \varepsilon \le \varepsilon_0 < \dfrac{\mu}{2\alpha}$

$$|P^1_{t+\tau}(\theta) - P^1_t(\theta)| = \frac{1}{\varepsilon}\Bigg|\int\limits_{-\infty}^{t+\tau} T(t+\tau,s)B(s)\times$$

$$\times Y_0X_0(s,t+\tau)ds - \int\limits_{-\infty}^{t} T(t,s)Y_0B(s)X_0(s,t)ds\Bigg| =$$

$$= \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{-\infty}^{t}[T(t+\tau,s+\tau)Y_0B(s+\tau)X_0(s+\tau,t+\tau) -$$

$$-T(t,s)Y_0B(s)X_0(s,t)]ds =$$

$$= \frac{1}{\varepsilon}\Bigg|\int\limits_{-\infty}^{t}\Bigg\{T(t+\tau,s+\tau)Y_0[B(s+\tau)-B(s)]\times$$

$$\times X_0(s+\tau,t+\tau) + [T(t+\tau,s+\tau)-T(t,s)]\times$$

$$\times Y_0B(s)X_0(s+\tau,t+\tau) + T(t,s)Y_0B(s)\times$$

$$\times[X_0(s+\tau,t+\tau) - X_0(s,t)]\Bigg\}ds\Bigg| \le$$

$$\le \frac{K_1K_0}{\mu-\varepsilon\alpha}\sup_t|B(t+\tau)-B(t)| + \frac{K_1^2K_0M}{(\mu-\varepsilon\alpha)^2}\times$$

$$\times \sup_t \operatorname*{Var}_{\theta\in[-\Delta,0]}[\eta_2(t+\tau,\theta)-\eta_2(t,\theta)] +$$

$$+\frac{K_1MK_0^2}{2(\mu-2\varepsilon\alpha)\alpha}\sup_t|A(t+\tau)-A(t)|.$$

Отже, матриця $P^1_t(\theta)$ майже періодична по t рівномірно відносно $\theta \in [-\varepsilon\Delta, 0]$.

Якщо матриця $P^n_t(\theta)$ майже періодична по t рівномірно відносно $\theta \in [-\varepsilon\Delta, 0]$, тоді за допомогою аналогічних міркувань нескладно показати, що $P^{n+1}_t(\theta)$ майже періодична по t рівномірно відносно $\theta \in [-\varepsilon\Delta, 0]$. На підставі рівномірної збіжності послідовності $P^n_t(\theta)$ дістаємо, що гранична матриця $P_t(\theta)$ майже періодична по t рівномірно відносно $\theta \in [-\varepsilon\Delta, 0]$. Теорема 2 доведена.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Halanay A.* An invariant surface for some linear singularly perturbed systems with time lag // J. Diff. Eqs.— 1966.— **2**, N 1. – P.33 – 46.

2. *Фодчук В.И., Черевко И.М.* К теории интегральных многообразий сингулярно возмущенных дифференциально-разностных уравнений // Укр. мат. журн. – 1982. – **34**, N6. – C.725 – 731.

3. *Черевко І.М.* Розщеплення лінійних сингулярно збурених диференціально-різницевих систем // Доп. НАН України. – 1997. – N 6. – С.42 – 45.

4. *Клевчук І.І.* Розщеплення лінійних сингулярно збурених систем із запізненням // Нелінійні крайові задачі математичної фізики та їх застосування. – К.: Ін-т математики НАН України, 1996. – С. 41 – 43.

5. *Черевко І.М.* Розщеплення лінійних сингулярно збурених диференціально-функціональних рівнянь // Доп. НАН України. – 2002. – N 6. – С.32 – 36.

6. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1981. – 544 с.

7. *Черевко И.М.* Оценка фундаментальной матрицы сингулярно возмущенных дифференциально-функциональных уравнений и некоторые ее применения // Дифференц. уравнения. – 1997. – **33**, N2. – С.281 – 283.

8. *Хейл Дж.* Теория функционально-дифференциальных уравнений. – М.: Мир, 1984. – 421 с.

Стаття надійшла до редколегії 10.10.2005