УДК 519.718

©2005 р. Є.Ф. Сопронюк

Чернівецький національний університет ім. Юрія Федьковича, Чернівці

ПРАКТИЧНА СТІЙКІСТЬ ЛІНІЙНИХ СИСТЕМ ЗІ ЗМІНОЮ ВИМІРНОСТІ ФАЗОВОГО ПРОСТОРУ

Встановлено достатні умови практичної стійкості лінійних систем, вимірність фазового простору яких змінюється в задані моменти часу. На основі доведених теорем одержано критерії практичної стійкості й розроблено алгоритми для комп'ютерної реалізації критеріїв

It was obtained the sufficient conditions of the practical stability of linear systems the phase space measurability of linear which are changing in the indicated moments of the time. On the basis of proved theorem it was obtained the criteria of the practical stability and it was developed the algorithms for the computer criteria realization

У даній роботі досліджується практична стійкість [1] лінійних систем зі зміною вимірності фазового простору [2]. Тут доведені теореми про практичну стійкість, а також установлені критерії, які придатні для безпосереднього використання як алгоритми числового визначення областей стійкості. Одержані результати обґрунтовані на основі загальної теорії стійкості А.М. Ляпунова та проблемах дослідження стійкості на скінченному інтервалі часу Н.Г. Четаєвим. Розглянуті проблеми практичної стійкості динамічних систем зі зміною вимірності фазового простору при постійно діючих збуреннях.

Постановка задачі. Нехай $\tau_1, \tau_2, ..., \tau_N$ деяке розбиття відрізка $[T_0, T_1]$, де $\tau_j = \{t : t \in [t_{j-1}, t_j)\}$, $j = 1, 2, ..., N-1$, $\tau_N = \{t : t \in [t_{N-1}, t_N]\}$, $t_0 = T_0 < t_1 < ... < t_{N-1} < t_N = T_1$. Припустимо, що на цьому відрізку динаміка системи задана у вигляді

$$\frac{dx^{(j)}}{dt} = A_j(t)x^{(j)}(t), t \in \tau_j, \qquad (1)$$

за умов зміни вимірності фазового простору

$$x^{(j)}(t_{j-1}) = C_j x^{(j-1)}(t_{j-1}-), \qquad (2)$$

де $A_j(t)$ - квадратні матриці порядку n_j з такими елементами, що розв'язок системи (1) існує та єдиний при $t \in \tau_j$, $x^{(j)}(t)$ - n_j-вимірний вектор фазового стану, C_j - прямокутні сталі матриці розмірності $n_j \times n_{j-1}$, $j = \overline{1, N}$, причому при $j = 1$ вважатимемо, що $C_1 = E_1$ - одинична матриця порядку n_1, $x^{(0)}(t_0-) = x_0^{(1)}$ - початковий стан системи (1).

Означення 1. Незбурений рух $x^{(j)}(t) = 0$, $t \in \tau_j$, $j = \overline{1, N}$, системи (1) за умов (2) назвемо $\{\lambda, \Gamma_t^{(1)}, \Gamma_t^{(2)}, ..., \Gamma_t^{(N)}, T_0, T_1\}$-стійким, якщо $x^{(j)}(t) \in \Gamma_t^{(j)}$ для всіх $t \in \tau_j$, $j = \overline{1, N}$, як тільки $x^{(1)}(t_0) \in G_0 = \{x^{(1)} : x^{(1)T}x^{(1)} < \lambda^2\}$, де $\Gamma_t^{(j)} = \{x^{(j)} : |l_{s_j}^{(j)T}(t)x^{(j)}| \leq 1, s_j = 1, 2, ..., M_j\}$, де $l_{s_j}^{(j)}(t)$ - неперервні вектор-функції розмірності n_j, $t \in \tau_j$, $j = \overline{1, N}$.

Означення 2. Незбурений рух $x^{(j)}(t) = 0$, $t \in \tau_j$, $j = \overline{1, N}$, системи (1) за умов (2) назвемо $\{c, B, \Gamma_t^{(1)}, \Gamma_t^{(2)}, ..., \Gamma_t^{(N)}, T_0, T_1\}$-стійким, якщо $x^{(j)}(t) \in \Gamma_t^{(j)}$ для всіх $t \in \tau_j$, $j = \overline{1, N}$, як тільки $x^{(1)}(t_0) \in G_{10} = \{x^{(1)} : x^{(1)T}Bx^{(1)} < c^2\}$, де c - стала величина, B - відома додатно визначена матриця, $\Gamma_t^{(j)} = \{x^{(j)} : |l_{s_j}^{(j)T}(t)x^{(j)}| \leq 1, s_j = 1, 2, ..., M_j\}$, $l_{s_j}^{(j)}(t)$ - задані неперервні вектор-функції розмірності n_j, $t \in \tau_j$, $j = \overline{1, N}$.

Задача 1. Знайти умови, при яких розв'язок системи (1) за умов зміни вимірності фазового простору (2) $\{\lambda, \Gamma_t^{(1)}, \Gamma_t^{(2)}, ..., \Gamma_t^{(N)}, T_0, T_1\}$-стійкий.

Задача 1. Знайти умови, при яких розв'язок системи (1) за умов зміни вимірності фазового простору (2)

$\{c, B, \Gamma_t^{(1)}, \Gamma_t^{(2)}, ..., \Gamma_t^{(N)}, T_0, T_1\}$-стійкий.

Запровадимо позначення: $X_j(t,\tau)$ матричний розв'язок задачі Коші

$$\frac{dX^{(j)}(t,\tau)}{dt} = A_j(t)X^{(j)}(t,\tau), \qquad (3)$$

$X^{(j)}(\tau,\tau) = E_j$, $t < \tau_j$, $\tau \in \tau_j$, $t \in \tau_j$, де E_j - одиничні матриці порядку n_j; $\bar{l}_{s_j}^{(j)}(t) = C_2^T X_2^T(t_2-, t_1)C_3^T X_3^T(t_3-, t_2)...$ $...C_j^T X_j^T(t_j-, t_{j-1})l_{s_j}^{(j)}(t)$; $\mu_1^2 = \rho_{1max}\lambda^2$, $\mu_2^2 = \rho_{2max}\lambda^2$, ..., $\mu_N^2 = \rho_{Nmax}\lambda^2$, де ρ_{jmax} - найбільше власне значення матриці $\psi_j^T\psi_j$, $\psi_j = C_jX_{j-1}(t_{j-1}-, t_{j-2})C_{j-1}...X_1(t_1-, t_0)C_1$; $\overline{\mu}_1^2 = \overline{\rho}_{1max}c^2$, $\overline{\mu}_2^2 = \overline{\rho}_{2max}c^2$, ..., $\overline{\mu}_N^2 = \overline{\rho}_{Nmax}c^2$, де $\overline{\rho}_{jmax}$ - найбільше власне значення матриці $\psi_{1j}^T\psi_{1j}$, $\psi_{1j} = \psi_j B^{-\frac{1}{2}}$, $Q_j(t_{j-1}, t) = X_j^T(t_{j-1}, t)X_j(t_{j-1}, t)$, $t \in \tau_j$, $j = \overline{1,N}$, $\overline{Q}_1(t_0, t) = X_1^T(t_0, t)BX_1(t_0, t)$, $t \in \tau$.

Теорема 1. Для $\{\lambda, \Gamma_t^{(1)}, \Gamma_t^{(2)}, ..., \Gamma_t^{(N)}, T_0, T_1\}$-стійкості системи (1) за умов (2) достатньо, щоб справджувалися умови:

$$\lambda^2 \le \min(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_N), \qquad (4)$$

$$x^{(j-1)}(t_{j-1}-)(E_{j-1} - C_j^T C_j)x^{(j-1)}(t_{j-1}) \ge 0, \qquad (5)$$

де

$$\lambda_j = \min_{1 \le s_j \le M_j}(\inf_{t \in \tau_j}(\bar{l}_{s_j}^{(j)T}(t)Q_1^{-1}(t_0, t_1-)\bar{l}_{s_j}^{(j)}(t))^{-1}), \qquad (6)$$

$x^{(j-1)}(t)$, $t \in \tau_j$, $j = \overline{1,N}$ розв'язок (1) за умов (2), який задовольняє початкову умову $x^{(1)}(t_0) = x_0^{(1)} \in G_0$.

Доведення проведемо за допомогою методу функцій Ляпунова. Виберемо функції Ляпунова $V_j(x^{(j)}, t)$, $t \in \tau_j$, $j = \overline{1,N}$ у вигляді

$V_j(x^{(j)}, t) = \frac{1}{\mu^2}x^{(j)T}Q_j(t_{j-1}, t)x^{(j)}$,

де $\mu^2 = \max(\mu_1^2, \mu_2^2, ..., \mu_N^2)$.

Нехай $x^{(j)}(t)$, $t \in \tau_j$, $j = \overline{1,N}$, розв'язок системи (1) за умов (2), який задовольняє початкову умову $x^{(1)}(t_0) = x_0^{(1)}$, $x_0^{(1)} \in G_0$. Якщо виконуються умови (4), (5), то для функцій $V_j(x^{(j)}(t), t)$ на розв'язках системи (1) справджуються нерівності

$V_j(x^{(j)}(t), t) < 1$, $t \in \tau_j$, $j = \overline{1,N}$

Крім цього, легко перевірити, що $\{x^{(j)}(t) : V_j(x^{(j)}(t), t) < 1\} \subset \Gamma_t^{(j)}$. Дійсно,

$$|l_{s_j}^{(j)T}(t)x^{(j)}(t)|^2 \le$$
$$(\bar{l}_{s_j}^{(j)T}(t)Q_1^{-1}(t_0, t_1-)\bar{l}_{s_j}^{(j)}(t))x_0^{(1)T}x_0^{(1)} \le$$
$$(\bar{l}_{s_j}^{(j)T}(t)Q_1^{-1}(t_0, t_1-)\bar{l}_{s_j}^{(j)}(t))\lambda^2$$

Звідси, враховуючи умову (4), одержуємо $|l_{s_j}^{(j)T}(t)x^{(j)}(t)|^2 \le 1$, $t \in \tau_j$, $s_j = 1, 2, ..., M_j$, $j = \overline{1,N}$. Оскільки $\frac{dV_j(x^{(j)}(t),t)}{dt} = 0$ при $x^{(j)}(t) \in \{x^{(j)}(t) : V_j(x^{(j)}(t), t) < 1\}$, $t \in \tau_j$, $j = \overline{1,N}$, то справджуються усі умови теореми 1 [3], що завершує доведення теореми.

Зауваження 1. Матрицю $Q_1^{-1}(t_0, t_1-)$ можна знайти за формулою $Q_1^{-1}(t_0, t_1-) = X_1(t_1-, t_0)X_1^T(t_1-, t_0)$.

Зауваження 2. Якщо в системі диференціальних рівнянь (1) матриця A_j стала, то в умові стійкості (4) λ_j можна знайти за формулою

$$\lambda_j = \min_{1 \le s_j \le M_j} \inf_{t \in \tau_j}(\bar{l}_{s_j}^{(j)T}(t)e^{(A_j + A_j^T)(t_1 - t_0)}\bar{l}_{s_j}^{(j)}(t))^{-1}. \qquad (7)$$

Теорема 2. Для $\{c, B, \Gamma_t^{(1)}, \Gamma_t^{(2)}, ..., \Gamma_t^{(N)}, T_0, T_1\}$-стійкості системи (1) за умов (2) достатньо, щоб справджувалася умова

$$c^2 \le \min(\overline{\lambda}_1, \overline{\lambda}_2, ..., \overline{\lambda}_N), \qquad (8)$$

та умова (4), де

$$\overline{\lambda}_j = \min_{1 \le s_j \le M_j}(\inf_{t \in \tau_j}(\bar{l}_{s_j}^{(j)T}(t)\overline{Q}_1^{-1}(t_0, t_1-)\bar{l}_{s_j}^{(j)}(t))^{-1}), \qquad (9)$$

$x^{(j-1)}(t)$, $t \in \tau_j$, $j = \overline{1,N}$ розв'язок (1) за умов (2), який задовольняє початкову умову $x^{(1)}(t_0) = x_0^{(1)} \in G_{10}$.

Доведення. Функції Ляпунова виберемо у вигляді

$$V_1(x^{(1)}, t) = 1/\overline{\mu}^2 x^{(1)T}\overline{Q}_1(t_0, t)x^{(1)},$$
$$V_j(x^{(j)}, t) = 1/\overline{\mu}^2 x^{(j)T}Q_1(t_{j-1}, t)x^{(j)}, \ j = \overline{2,N},$$

де $\overline{\mu}^2 = \max(\overline{\mu}_1^2, \overline{\mu}_2^2, ..., \overline{\mu}_N^2)$.

Тепер доведення теореми 2 можна провести за схемою доведення теореми 1. Теорема доведена.

Зауваження 3. Додатно-визначену симетричну матрицю $\overline{Q}_1(t_0,t)$ розмірності $n_1\times n_1$ можна знайти як матричний розв'язок диференціального рівняння $d\overline{Q}_1(t_0,t)/dt = -A_1^T(t)\overline{Q}_1(t_0,t) - \overline{Q}_1(t_0,t)A_1(t)$, $\overline{Q}_1(t_0,t_0) = B$, $t\in\tau_1$.

Зауваження 4. Для обчислення $\overline{\lambda}_j$ за формулою (9) обернену матрицю $\overline{Q}_1^{-1}(t_0,t)$, $t \in \tau_1$, можна знайти розв'язуючи матричну задачу Коші $d\overline{Q}_1^{-1}(t_0,t)/dt = \overline{Q}_1^{-1}(t_0,t)A_1^T(t) + A_1(t)\overline{Q}_1^{-1}(t_0,t) = B^{-1}$

Далі розглянемо на відрізку $[T_0,T_1]$ з розбиттям $\tau_1,\tau_2,...,\tau_N$ систему з постійно діючими збуреннями

$$\frac{dx^{(j)}}{dt} = A_j(t)x^{(j)}(t) + f^{(j)}(t), t\in\tau_j, \qquad (10)$$

за умов зміни вимірності фазового простору (2), де $A_j(t)$ - квадратні матриці, які задовольняють вищевказані умови, $f^{(j)}(t)$ - деяка n_j -вимірна функція, яка задовольняє умови теореми про існування та єдиність розв'язку системи (10) при $t\in\tau_j$. Припустимо, що функції $f^{(j)}(t)$, $t\in\tau_j$, або відомі вектор функції часу, або вони невідомі, але задовольняють умову

$$\| f^{(j)}(t) \| = (\int\limits_{t_{j-1}}^{t_j} \sum_{i=1}^{n_j} (|f^{(j)}(\tau)|^{q_j})^{q_{1j}/q_j} d\tau)^{1/q_{1j}} \le \qquad (11)$$

$$\le \overline{R}^{(j)},$$

$1\le q_j\le\infty$, $1\le q_{1j}\le\infty$, $\overline{R}^{(j)}$ - деякі додатні сталі, $j=\overline{1,N}$

Означення 3. Систему (10) за умов (2) називатимемо внутрішньо $\{c,B,\Gamma_t^{(1)},\Gamma_t^{(2)},...,\Gamma_t^{(N)},T_0,T_1\}$ -стійкою при стало діючих збуреннях, які можуть бути відомими або ж невідомими і задовольняти умову (11), якщо $x^{(j)}(t) \in \Gamma_t^{(j)}$ при всіх $t\in\tau_j$, $j=\overline{1,N}$, як тільки $x^{(1)}(t_0)\in\{x^{(1)} : x^{(1)T}Bx^{(1)} < c^2\}$.

Для системи (10) за умов (2) розглянемо також зовнішню $\{c,B,\Gamma_t^{(1)},\Gamma_t^{(2)},...,\Gamma_t^{(N)},T_0,T_1\}$-стійкість як узагальнення відповідної задачі про практичну стійкість [4] для систем без зміни вимірності фазового простору. Припустимо, що область початкових умов і множина $\Gamma_{t_0}^{(1)}$ задовольняють умову

$$\{x^{(1)} : x^{(1)T}Bx^{(1)} < c^2\} \cap \overline{\Gamma}_{t_0}^{(1)} \ne \emptyset, \qquad (12)$$

де $\overline{\Gamma}_{t_0}^{(1)}$ - доповнення до множини $\Gamma_{t_0}^{(1)}$, $\emptyset$ - порожня множина.

Означення 4. Систему (10) за умов (2) називатимемо зовнішньо $\{c,B,\Gamma_t^{(1)},\Gamma_t^{(2)},...,\Gamma_t^{(N)},T_0,T_1\}$-стійкою при постійно діючих збуреннях, які можуть бути відомими або ж невідомими і задовольняти умову (11), якщо для будь яких початкових умов $x^{(1)}(t_0) = x_0^{(1)}$ з області $x^{(1)} \in \{x^{(1)} : x^{(1)T}Bx^{(1)} < c^2\}$ знайдеться такий індекс $j_0\in\{1,2,...,N\}$ і значення $\overline{t}\in\tau_{j_0}$, що $x^{(j_0)}(\overline{t})\in\Gamma_{\overline{t}}^{(j_0)}$.

Аналогічно можна ввести [4] поняття зовнішньої і внутрішньої $\{\lambda,\Gamma_t^{(1)},\Gamma_t^{(2)},...,\Gamma_t^{(N)},T_0,T_1\}$-стійкості.

Нехай $f^{(j)}(t)$ - відомі функції параметра t, $t\in\tau_j$, $j=\overline{1,N}$. Розв'язок (10) за умов (2), який задовольняє початкову умову $x^{(1)}(t_0) = x_0^{(1)}$, має вигляд

$$x^{(1)}(t) = W_j(t,t_0)x_0^{(1)} +$$

$$+\sum_{k=1}^{j-1}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} W_{jk}(t,\tau)f^{(k)}(\tau)d\tau + \qquad (13)$$

$$+\int_{t_{j-1}}^{t} X_j(t,\tau)f^{(j)}(\tau)d\tau,$$

де $W_j(t,t_0) = X_j(t,t_{j-1})C_j...X_1(t_1,t_0)C_1$, $W_{jk}(t,\tau) = X_j(t,t_{j-1})C_j...C_{k+1}X_k(t_k,\tau)$.

Запишемо умову того, що траєкторії системи (10) за умов (2) належать множині $\Gamma_t^{(j)}$, $t\in\tau_j$, в наступному вигляді:

$$z^{(j)}(t) \in \{z^{(j)} : -1 - l_{s_j}^{(j)T}(t)a^{(j)}(t) \le$$

$$\le l_{s_j}^{(j)T}(t)z^{(j)}(t) \le \qquad (14)$$

$$\le 1 - l_{s_j}^{(j)T}(t)a^{(j)}(t), s_j = 1,2,...,M_j, t\in\tau_j\},$$

де

$$z^{(j)}(t) = W_j(t,t_0)x^{(1)}(t_0),$$
$$a^{(j)} = \sum_{k=1}^{j-1} \int_{t_{k-1}}^{t_k} W_{jk}(t,\tau)f^{(k)}(\tau)d\tau +$$
$$+ \int_{t_{j-1}}^{t} X_j(t,\tau)f^{(j)}(\tau)d\tau,$$

$t \in \tau_j$, $j = \overline{1,N}$

Позначимо:

$$\overline{\overline{\mu_1}} = \inf_{t\in\tau_1} \min_{s_1=1,\dots,M_1} \frac{(1-|l_{s_1}^{(1)T}(t)a^{(1)}(t)|)^2}{l_{s_1}^{(1)T}(t)\overline{Q}_1^{-1}(t_0,t)l_{s_1}^{(1)}(t)}, \tag{15}$$

$$\overline{\overline{\mu_j}} = \inf_{t\in\tau_j} \min_{s_1=1,\dots,M_j} \frac{(1-|l_{s_j}^{(j)T}(t)a^{(j)}(t)|)^2}{\overline{l}_{s_j}^{(j)T}(t)\overline{Q}_1^{-1}(t_0,t_1-)\overline{l}_{s_j}^{(j)}(t)}, \tag{16}$$

$$V_1(z^{(1)},t) = \tfrac{1}{c^2} z^{(1)T} X_1^T(t_0,t) z^{(1)},\ t\in\tau_1,$$
$$V_j(z^{(j)},t) = \tfrac{1}{c^2} z^{(j)T} X_j^T(t_{j-1},t) z^{(j)},\ j = \overline{2,N},$$

Теорема 3. Для того, щоб система (10) за умов (2) була внутрішньо $\{c, B, \Gamma_t^{(1)}, \Gamma_t^{(2)}, ..., \Gamma_t^{(N)}, T_0, T_1\}$-стійкою при відомих постійно діючих збуреннях достатньо, щоб справджувалися умови:

$$c^2 \le \min\{\overline{\overline{\mu}}_1, \overline{\overline{\mu}}_2, ..., \overline{\overline{\mu}}_N\}, \quad |l_{s_j}^{(j)T}(t)a^{(j)}(t)| < 1,$$

$$t\in\tau_j, \quad s_j = 1,2,...,M_j, \quad j = \overline{1,N},$$

власні значення матриць $X_j^T(t_j-, t_{j-1})C_{j+1}^T C_{j+1} X_j(t_j-, t_{j-1})$, $j = 1,...,N-1$, менші ніж одиниця.

Доведення. Очевидно, що умови (12) досягаються, якщо справджуються співвідношення:

$$\max_{z^{(j)}\in\{z^{(j)}:z^{(j)T}Q_j(t_{j-1},t)z^{(j)}<c^2\}} l_{s_j}^{(j)T}(t)z^{(j)} \le \tag{17}$$

$$\le 1 - l_{s_j}^{(j)T}(t)a^{(j)}(t),$$

$$\min_{z^{(j)}\in\{z^{(j)}:z^{(j)T}Q_j(t_{j-1},t)z^{(j)}<c^2\}} l_{s_j}^{(j)T}(t)z^{(j)} \ge \tag{18}$$

$$\ge -1 - l_{s_j}^{(j)T}(t)a^{(j)}(t),$$

$t\in\tau_j$, $s_j = 1,2,...,M_j$, $j = \overline{1,N}$, які легко одержати за умов теореми 3. Теорема доведена.

Теорема 4. Для того, щоб система (8) за умов (2) була внутрішньо $\{\lambda, \Gamma_t^{(1)}, \Gamma_t^{(2)}, ..., \Gamma_t^{(N)}, T_0, T_1\}$-стійка при відомих стало діючих збуреннях достатньо, щоб справджувалися умови:

$$\lambda^2 \le \min\{\overline{\overline{\mu}}_1\rho_{1max}, \overline{\overline{\mu}}_2\rho_{2max} ..., \overline{\overline{\mu}}_N\rho_{Nmax}\}$$
$$|l_{s_j}^{(j)T}(t)a^{(j)}(t)| < 1,\ t\in\tau_j,\ s_j = 1,2,...,M_j,$$
$$j = \overline{1,N},$$

$Q_1^{-1}(t_0,t) = X_1(t,t_0)X_1^T(t,t_0)$, $Q_1^{-1}(t_0,t_1-) = X_1(t_1-,t_0)X_1^T(t_1-,t_0)$, власні значення матриць $X_j^T(t_j-,t_{j-1})C_{j+1}^T C_{j+1}X_j(t_j-,t_{j-1})$, $j = 1,...,N-1$, менші одиниці.

Враховуючи результати та методи доведення теореми 3 і теореми 4 можна одержати також умови зовнішньої $\{\lambda, \Gamma_t^{(1)}, \Gamma_t^{(2)}, ..., \Gamma_t^{(N)}, T_0, T_1\}$-стійкості і зовнішньої $\{c, B, \Gamma_t^{(1)}, \Gamma_t^{(2)}, ..., \Gamma_t^{(N)}, T_0, T_1\}$-стійкості.

Якщо зовнішні стало діючі збурення $f^{(j)}(t)$, $j = \overline{1,N}$ невідомі, але належать деякій області виду (9), то використовуючи конструктивні доведення наведених вище теорем, можна побудувати оцінки областей $\{\lambda, \Gamma_t^{(1)}, \Gamma_t^{(2)}, ..., \Gamma_t^{(N)}, T_0, T_1\}$-стійкості та $\{c, B, \Gamma_t^{(1)}, \Gamma_t^{(2)}, ..., \Gamma_t^{(N)}, T_0, T_1\}$-стійкості, що дозволяє розробити ефективні числові алгоритми і процедури дослідження практичної стійкості систем зі зміною вимірності фазового простору.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Кириченко Н.Ф.* Введение в теорию стабилизации движения. — К.: Вища школа, 1978. — 184 с.

2. *Сопронюк Ф.О.* Моделювання та оптимізація систем управління з розгалуженням структур. — Чернівці: Рута, 1995. — 155 с.

3. *Гаращенко Ф.Г. Сопронюк Є.Ф.* Теореми про практичну стійкість систем зі зміною вимірності фазового простору // Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки. — 2003. — Вип. № 4 — С.171—177.

4. *Бублик Б.Н., Гаращенко Ф.Г., Кириченко Н.Ф.* Структурно-параметрическая оптимизация и устойчивость динамики пучков. — К.: Наук. думка, 1985. — 304 с.

Стаття надійшла до редколегії 31.10.2005