УДК 517.98

©2005 р. А.В. Соломко

Прикарпатський університет ім. В. Стефаника, Івано-Франківськ

ОПЕРАТОРНЕ ЧИСЛЕННЯ ДЛЯ ОДНОГО КЛАСУ УЗАГАЛЬНЕНИХ ФУНКЦІЙ

Побудовано операторне числення для n-параметричних (C_o)-груп операторів у згортковій алгебрі розподілів з компактними носіями. Розглянуто застосування цього числення до операторів множення на незалежну змінну та диференціювання.

The operator calculus for n-parametric (C_o)-groups of operators in convolution algebra of distributions with compact supports is constructed. An application of such calculus to multiplication operator by an independent variable and to operator of differentiation is considered.

Вступ. Задачі математичної фізики звичайно зводяться до розв'язування лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними з початковими або крайовими умовами. В цій області здавна використовуються різноманітні символьні методи. Деякі операційні числення були створені з метою розв'язування конкретних задач математичної фізики [1-3], і взагалі всі операторні методи випробовувались саме на таких задачах.

У цій статті будується операторне числення для генераторів n-параметричних (C_o)-груп операторів над деяким комплексним банаховим простором $(\mathfrak{X}, \|\cdot\|)$ у згортковій алгебрі $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ узагальнених функцій з компактними носіями. Наведено конкретні приклади операторів множення на незалежну змінну та диференціювання.

1. Нехай $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ – банаховий простір. Відомо, що $\mathcal{X}^n = \mathcal{X} \times \cdots \times \mathcal{X} = \mathfrak{X}$ також є банаховим. Розглянемо $-iA : \mathfrak{X} \to \mathfrak{X}$ – генератор n-параметричної (C_o)-групи лінійних операторів $\mathbb{R}^n \ni t \to e^{-itA}$, де $A = (A_1, \ldots, A_n)$, які діють в банаховому просторі $\mathfrak{X}$. Усі нескінченно гладкі $\mathfrak{X}$-значні функції $x(t)$ з компактними носіями в $\mathbb{R}^n$ будемо позначати через $D(\mathfrak{X})$. У просторі $\mathfrak{X}$ визначимо підпростір

$$\widehat{D}(\mathfrak{X}) \equiv \left\{ \widehat{x} = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-itA} x(t) dt : x(t) \in D(\mathfrak{X}) \right\}.$$

З теорії тензорних добутків топологічних просторів А. Гротендіка [4] випливає справедливість топологічного ізоморфізму просторів $D(\mathfrak{X})$ і $D\widetilde{\otimes}\mathfrak{X}$, де $\widetilde{\otimes}$ – поповнення тензорного добутку в проективній топології, D – простір нескінченно-диференційованих фінітних функцій, заданих на $\mathbb{R}^n$.

Визначимо простір $D^\nu(\mathbb{R}^n) = \{\varphi \in D(\mathbb{R}^n) : \operatorname{supp} \varphi \subset [-\nu, \nu] \times \cdots \times [-\nu, \nu] = [-\nu, \nu]^n, \nu > 0\}$,

Твердження 1. *Для довільного елемента $x = x(t) \in D(\mathfrak{X})$ знайдеться таке число $\nu > 0$, що $x(t) \in D^\nu(\mathbb{R}^n)\widetilde{\otimes}\mathfrak{X}$ і $x(t)$ можна подати у вигляді абсолютно збіжного ряду в просторі $D^\nu(\mathbb{R}^n)\widetilde{\otimes}\mathfrak{X}$ за формулою*

$$x(t) = \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m x_m \otimes \varphi_m(t), \tag{1}$$

де $\sum_m |\lambda_m| < \infty$ і послідовності $\{\varphi_m(t)\}$ та $\{x_m\}$ прямують до нуля в просторах $D^\nu(\mathbb{R}^n)$ і $\mathfrak{X}$ відповідно.

Доведення. З означення простору $D(\mathfrak{X})$ та виконання топологічних ізоморфізмів $D(\mathfrak{X}) \simeq D(\mathbb{R}^n)\widetilde{\otimes}\mathfrak{X} \simeq \varinjlim_{\nu\to\infty}\operatorname{ind} D^\nu(\mathbb{R}^n)\widetilde{\otimes}\mathfrak{X}$ випливає справедливість першої частини твердження.

Очевидно, що простори $\mathfrak{X}$ і $D^\nu(\mathbb{R}^n)$ – метризовні. Тому для довільного елемента $x \in D^\nu(\mathbb{R}^n)\widetilde{\otimes}\mathfrak{X}$ можна застосувати теорему [4] про зображення елементів поповнення проективного тензорного добутку метризовних просторів, яка забезпечує нам розклад $x(t)$ у ряд (1).

Відзначимо, ще одне важливе твердження для введеного простору $\widehat{D}(\mathfrak{X})$.

Твердження 2. *Якщо $\{e^{-itA} : t \in \mathbb{R}^n\}$ – n-параметрична група класу (C_o), то підпростір $\widehat{D}(\mathfrak{X})$ щільний в $\mathfrak{X}$.*

Доведення. Для довільного $m \in \mathbb{N}$ можна визначити гладку фінітну функцію $\varphi_m = \varphi_m(t)$, яка має такі властивості $\varphi_m(t) \geq 0$, $\operatorname{supp}\varphi_m \subset [-\frac{1}{m}, \frac{1}{m}] \times \cdots \times [-\frac{1}{m}, \frac{1}{m}] = [-\frac{1}{m}, \frac{1}{m}]^n$, $\int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi_m(t)dt = 1$ [5, п.1.1, с.16]. Далі в просторі $D(\mathfrak{X})$ для довільного $y \in \mathfrak{X}$ побудуємо послідовність $y_m = y \otimes \varphi_m$. Тоді

$$\|\widehat{y}_m - y\| = \|\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_m(t)e^{-itA}ydt -$$

$$- \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_m(t)ydt\| \leq$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}^n} \|e^{-itA}y - y\|\varphi_m(t)dt \leq$$

$$\leq \sup_{t\in[-\frac{1}{m},\frac{1}{m}]^n} \|e^{-itA}y - y\|.$$

Оскільки $\{e^{-itA} : t \in \mathbb{R}^n\}$ – n-параметрична (C_o)-група, то для всіх $y \in \mathfrak{X}$ з означення (C_o)-групи в [6, п.2.15, с.39] буде випливати збіжність $\sup\limits_{t\in[-\frac{1}{m},\frac{1}{m}]^n} \|e^{-itA}y - y\| \to 0$, при $m \to \infty$. Отже, $\lim\limits_{m\to\infty} \widehat{y}_m = y$ для всіх $y \in \mathfrak{X}$.

2. Розглянемо $\mathcal{E}' = \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ – алгебру узагальнених функцій з компактними носіями з операцією згортки "$*$" замість множення. Для кожного розподілу $f \in \mathcal{E}'$ і кожної функції $x(t) \in D(\mathfrak{X})$, користуючись розкладом останньої в абсолютно збіжний ряд (1), визначимо згортку за формулою

$$(f * x)(t) = \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m x_m (f * \varphi_m)(t).$$

Для довільних $f \in \mathcal{E}'$ і $\varphi \in D(\mathbb{R}^n)$ маємо $(f * \varphi)(t) \in D(\mathbb{R}^n)$, тому і $(f * x)(t) \in D(\mathfrak{X})$. Тепер кожному розподілу $f \in \mathcal{E}'$ поставимо у відповідність оператор $f(A)$, визначений на просторі $\widehat{D}(\mathfrak{X})$, що діє за формулою

$$f(A)\widehat{x} = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-itA}(f * x)(t)dt. \qquad (2)$$

Відображення

$$\mathcal{E}' \ni f \to f(A) \in L(\widehat{D}(\mathfrak{X}))$$

назвемо функціональним численням в алгебрі $\mathcal{E}'$.

Теорема 1. *Нехай e^{-itA} – (C_o)-група. Тоді відображення*

$$\mathcal{E}' \ni f \to f(A)\widehat{x} \in \widehat{D}(\mathfrak{X}) \qquad (3)$$

лінійне і неперервне для кожного $\widehat{x} \in \widehat{D}(\mathfrak{X})$.

Доведення. Лінійність відображення (3) очевидна, тому нам достатньо довести його неперервність. Для n-параметричної (C_o)-групи e^{-itA} відома оцінка

$$\|e^{-itA}\| \leq Me^{\beta|t|},\ t \in \mathbb{R}^n,$$

де числа $M \geq 0$, $\beta \in \mathbb{R}$ не залежать від t. Використовуючи цю оцінку, доведемо, що відображення (3) неперервне для кожного $\widehat{x} \in \widehat{D}(\mathfrak{X})$, де $x(t) = y \otimes \varphi(t)$, $y \in \mathfrak{X}$, $\varphi(t) \in D(\mathbb{R}^n)$. Отже,

$$\|f_m(A)\widehat{x} - f(A)\widehat{x}\| =$$

$$= \|\int_{\mathbb{R}^n} ((f_m - f) * \varphi)(t)e^{-itA}ydt\| \leq$$

$$\leq M\|y\| \int_{\mathbb{R}^n} |((f_m - f) * \varphi)(t)|e^{\beta|t|}dt.$$

Відомо [5, п.4.2, с.70], що операція згортки неперервна в $\mathcal{E}'$, тому вираз справа прямує до нуля при $f_m \xrightarrow{\mathcal{E}'} f$. Тепер, вибираючи в представленні $x(t) = y \otimes \varphi(t)$ замість y і $\varphi(t)$ елементи базисів у просторах $\mathfrak{X}$ і $D(\mathbb{R}^n)$ відповідно, робимо висновок, що $\|f_m(A)\widehat{x} - f(A)\widehat{x}\| \to 0$ для всіх $\widehat{x} \in \widehat{D}(\mathfrak{X})$.

Теорема 2. *Функціональне числення в алгебрі $\mathcal{E}'$ володіє такими властивостями:*

1) справедливі співвідношення

$$\partial_j^m \delta(A)\widehat{x} = (-iA_j)^m \widehat{x}, \qquad (4)$$

$$\partial_j^m f(A)\widehat{x} = (-iA_j)^m f(A)\widehat{x} = f(A)(-iA_j)^m \widehat{x}, \tag{5}$$

для всіх $f \in \mathcal{E}'$, $\widehat{x} \in \widehat{D}(\mathfrak{X})$, $j = 1, \dots, n,$;

2) оператор $\delta(A)$ *діє як одиничний над* $\widehat{D}(\mathfrak{X})$ *і допускає розширення до одиничного оператора простору* $\mathfrak{X}$, *тобто*

$$\delta(A)x = \lim_{m \to \infty} \delta(A)\widehat{x}_m = x, \ \ \forall x \in \mathfrak{X},$$

де $x_m(t) = x \otimes \varphi_m(t)$, *а послідовність* $\{\varphi_m(t)\}$ *взята з доведення твердження 2;*

3) виконується формула

$$(f * h)(A)\widehat{x} = h(A)f(A)\widehat{x} = f(A)h(A)\widehat{x},$$

для всіх $f, h \in \mathcal{E}', \widehat{x} \in \widehat{D}(\mathfrak{X})$.

Доведення. Із рядка рівностей

$$(\partial_j^m \delta * x)(t) = \langle \partial_j^m \delta(\xi), x(t - \xi) \rangle =$$

$$= (-1)^m \langle \delta(\xi), \partial_j^m x(t - \xi) \rangle = (-1)^m \partial_j^m x(t)$$

буде випливати, що

$$\partial_j^m \delta(A)\widehat{x} = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-itA} (\partial_j^m \delta * x)(t) dt =$$

$$= (-1)^m \int_{\mathbb{R}^n} e^{-itA} \partial_j^m x(t) dt,$$

де $j = 1, \dots, m$.

Використовуючи інтегрування частинами m разів, отримаємо формулу (4).

Формула (5) випливає з (4) та з таких рівностей

$$\partial_j^m f(A)\widehat{x} = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-itA} ((\partial_j^m \delta * f) * x)(t) dt =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-itA} (\partial_j^m \delta * (f * x))(t) dt =$$

$$= \partial_j^m \delta(A) f(A)\widehat{x} =$$

$$= f(A)\partial_j^m \delta(A)\widehat{x}, \ \ j = 1, \dots, n.$$

Друга властивість випливає безпосередньо з твердження 2. Використовуючи асоціативність операції згортки в просторі $\mathcal{E}'$, досить легко довести третю властивість.

3. Розглянемо конкретні приклади генераторів n-параметричних (C_o)-груп.

1) Нехай $\mathfrak{X} = C \cup B(\mathbb{R}^n)$ – банахів простір неперервних обмежених функцій $x(\xi)$ з нормою $\|x\| = \sup\limits_{\xi \in \mathbb{R}^n} |x(\xi)|$. Візьмемо $Ax(\xi) = \xi x(\xi)$.

Скористаємось відомим [7, гл.4, п.3, теор. 6] співвідношенням для перетворення Фур'є $\widehat{f * \varphi} = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \widehat{\varphi} \cdot \widehat{f}$, де $f \in \mathcal{E}'$, $\varphi \in D(\mathbb{R}^n)$. Звідси, користуючись тим, що абсолютно збіжний ряд можна почленно інтегрувати, одержимо

$$f(A)\widehat{x} = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(t,\xi)} (f * x)(t) dt =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(t,\xi)} \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m x_m (f * \varphi_m)(t) dt =$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m x_m \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(t,\xi)} (f * \varphi_m)(t) dt =$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m x_m \widehat{f * \varphi_m} =$$

$$= (2\pi)^{\frac{n}{2}} \widehat{f}(\xi) \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(t,\xi)} \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m (x_m \otimes \varphi_m)(t) dt =$$

$$= (2\pi)^{\frac{n}{2}} \widehat{f}(\xi) \cdot \widehat{x}(\xi),$$

тобто, коли A – оператор множення на незалежну змінну, ми одержимо, що

$$f(A)\widehat{x} = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \widehat{f} \cdot \widehat{x}.$$

2) Нехай $A = (A_1, \dots, A_n) = \left(\frac{\partial}{\partial \xi_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial \xi_n}\right)$ – оператор частинного диференціювання. З того факту, що $A_j = \frac{\partial}{\partial \xi_j}$ є генератором групи зсуву по кожній змінній ξ_j, $j = 1, \dots, n$ [7, гл.9, п.5], та із теореми про представлення оператора n-параметричної групи у вигляді добутку операторів однопараметричних груп [8, п.9.7, с.243] буде випливати, що

$$e^{-i\left(t_1 \frac{\partial}{\partial \xi_1} + \dots + t_n \frac{\partial}{\partial \xi_n}\right)} x(\xi) =$$

$$= x(\xi_1 - t_1, \dots, \xi_n - t_n) = x(\xi - t),$$

де $x(\xi) \in C \cup B(\mathbb{R}^n)$.

Тоді

$$f(A)\widehat{x} = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\left(t_1\frac{\partial}{\partial \xi_1}+\cdots+t_n\frac{\partial}{\partial \xi_n}\right)}(f*x)(t)dt =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\left(t_1\frac{\partial}{\partial \xi_1}+\cdots+t_n\frac{\partial}{\partial \xi_n}\right)}\times$$

$$\times \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m (f*\varphi_m)(t) x_m(\xi)dt =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m (f*\varphi_m)(t)\times$$

$$\times e^{-i\left(t_1\frac{\partial}{\partial \xi_1}+\cdots+t_n\frac{\partial}{\partial \xi_n}\right)} x_m(\xi)dt =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m (f*\varphi_m)(t) x_m(\xi - t)dt =$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m (f*\varphi_m * x_m)(t).$$

З того, що

$$\widehat{x} = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\left(t_1\frac{\partial}{\partial \xi_1}+\cdots+t_n\frac{\partial}{\partial \xi_n}\right)} x(t)dt =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m e^{-i\left(t_1\frac{\partial}{\partial \xi_1}+\cdots+t_n\frac{\partial}{\partial \xi_n}\right)} x_m \otimes \varphi_m(t)dt =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m x_m(\xi - t)\varphi_m(t)dt =$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m \int_{\mathbb{R}^n} x_m(\xi - t)\varphi_m(t)dt =$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m (x_m * \varphi_m)(t),$$

одержимо

$$f(A)\widehat{x} = f*\widehat{x}, \text{ де } A = \left(\frac{\partial}{\partial t_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial t_n}\right).$$

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Mikusinsky J.* Operational calculus.— New York: Pergamon Press, 1959.

2. *Yosida K.* Operational calculus. A theory of Hyperfunctions.— New York: Springer-Verlag, 1984.

3. *Sharyn S.V., Lopushansky O.V.* Operator calculus for convolution algebra of Schwartz distributions on semiaxis // Праці Львівського мат. товариства. Математичні студії.— 1997.— **7**, № 1.— C.61—72.

4. *Grotendieck A.* Produits tensoriel topologiques et espaces nucleaire // Mem. Amer. Math. Soc.— 1955.— V.16— № 11.— P.1—140.

5. *Владимиров В.С.* Обобщенные функции в математической физике.— М.: Наука, 1979.— 318 с.

6. *Голдстейн Дж.* Полугруппы линейных операторов и их приложения.— Киев: Вища школа.— 1989.— 348 с.

7. *Иосида К.* Функциональный анализ.— Москва: Мир.— 1967.— 624 с.

8. *Хилл Э.* Функциональный анализ и полугруппы.— Москва: Из-во иностр. л-ры.— 1951.— 636 с.

Стаття надійшла до редколегії 14.10.2005