УДК 517.9

©2005 р. В.Ю. Слюсарчук

Національний університет водного господарства та природокористування, Рівне

# НЕОБХІДНІ І ДОСТАТНІ УМОВИ ОДНОСТАЙНОЇ ОБОРОТНОСТІ НЕЛІНІЙНИХ ОПЕРАТОРІВ $(\mathcal{R}_k x)(n) = x(n+1) + (-1)^k f(x(n))$, $n \in \mathbb{Z}$, $k = \overline{1,2}$, У ПРОСТОРІ ОБМЕЖЕНИХ ПОСЛІДОВНОСТЕЙ

Наведено необхідні та достатні умови одностайної оборотності нелінійних різницевих операторів $(\mathcal{R}_k x)(n) = x(n+1) + (-1)^k f(x(n))$, $n \in \mathbb{Z}$, $k = \overline{1,2}$, у просторі двобічних обмежених числових послідовностей. Тут $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ – неперервна функція.

Necessery and sufficient conditions of unanimously reversibility of the nonlinear difference operators $(\mathcal{R}_k x)(n) = x(n+1) + (-1)^k f(x(n))$, $n \in \mathbb{Z}$, $k = \overline{1,2}$, in the space of bounded two-sided number sequences are obtained. Here $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ is a continuous function.

## 1. $c$-Неперервні оператори. Постановка задачі.

Позначимо через $l_\infty = l_\infty(\mathbb{Z}, \mathbb{R})$ банахів простір всіх відображень $x : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R}$, множина значень кожного з яких обмежена, з нормою

$$\|x\|_{l_\infty} = \sup_{n \in \mathbb{Z}} |x(n)|.$$

Послідовність елементів $x_k \in l_\infty$, $k \in \mathbb{N}$, називатимемо *локально збіжною* до елемента $x \in l_\infty$ при $k \to \infty$ і позначатимемо

$$x_k \xrightarrow{\text{лок.},\ l_\infty} x \ \text{ при } k \to \infty,$$

якщо ця послідовність обмежена і для кожного $p \in \mathbb{N}$

$$\lim_{k \to \infty} \max_{|n| \le p} |x_k(n) - x(n)| = 0.$$

Відображення $\mathcal{F} : l_\infty \longrightarrow l_\infty$ називатимемо *c-неперервним*, якщо для довільних $x \in l_\infty$ і $x_k \in l_\infty$, $k \in \mathbb{N}$, для яких

$$x_k \xrightarrow{\text{лок.},\ l_\infty} x \ \text{ при } k \to \infty,$$

випливає, що

$$\mathcal{F}x_k \xrightarrow{\text{лок.},\ l_\infty} \mathcal{F}x \ \text{ при } k \to \infty.$$

Поняття $c$-неперервного оператора введено (на мові "$\varepsilon, \delta$") Е. Мухамадієвим [1] при дослідженні диференціальних операторів і було продовжено його вивчення в [2]–[9] та інших працях. Розглянуте вище означення $c$-неперервного оператора введено автором (див., наприклад, [10], [11]).

Прикладами $c$-неперервних відображень є відображення $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2 : l_\infty \longrightarrow l_\infty$, що визначаються рівностями

$$(\mathcal{R}_1 x)(n) = x(n+1) - f(x(n)), \ n \in \mathbb{Z},$$

$$(\mathcal{R}_2 x)(n) = x(n+1) + f(x(n)), \ n \in \mathbb{Z},$$

де $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ – неперервна функція і $x \in l_\infty$. Ці відображення також є неперервними.

Мета статті – з'ясувати, коли відображення $\mathcal{R}_1$ і $\mathcal{R}_2$ *одностайно оборотні*, тобто одночасно оборотні. Очевидно, що в цьому випадку відображення $\mathcal{R}_1\mathcal{R}_2$ і $\mathcal{R}_2\mathcal{R}_1$ є оборотними.

При дослідженні нелінійних операторів, що діють у просторі $l_\infty$, потрібно мати на увазі, що ні $c$-неперервність не випливає із неперервності, ні неперервність не випливає із $c$-неперервності [12].

## 2. Множини $\mathfrak{F}_1$ і $\mathfrak{F}_2$. Формулювання основного результату.

Нехай $R(\mathcal{A})$ – множина значень відображення $\mathcal{A} : X \longrightarrow X$, де $X$ – один із просторів $\mathbb{R}$ та $l_\infty$ і $I : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ – одиничне (тотожне) відображення.

Позначимо через $\mathfrak{F}_1$ множину всіх відображень $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, кожне з яких задовольняє умови:

1) $|g(x)-g(y)|<|x-y|$, якщо $x,y\in\mathbb{R}$ і $x\neq y$;

2) $R(I-g)=\mathbb{R}$;

3) $R(I+g)=\mathbb{R}$.

Через $\mathfrak{F}_2$ позначимо множину всіх відображень $g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, для кожного з яких:

1) $|g(x)-g(y)|>|x-y|$, якщо $x,y\in\mathbb{R}$ і $x\neq y$;

2) $R(I-g)=\mathbb{R}$;

3) $R(I+g)=\mathbb{R}$.

Основне у статті таке твердження.

**Теорема 1.** *Нехай $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ – неперервна функція. Для того, щоб відображення $\mathcal{R}_1$, $\mathcal{R}_2: l_\infty\longrightarrow l_\infty$ були одностайно оборотними і обернені відображення були неперервними необхідно і достатньо, щоб*

$$f\in\mathfrak{F}_1\cup\mathfrak{F}_2.$$

## 3. Допоміжні твердження.

**Лема 1.** *Нехай функція $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ неперервна і є елементом множини $\mathfrak{F}_1$. Тоді*

$$\lim_{|x|\to+\infty}\left(x^2-(f(x))^2\right)=+\infty. \tag{1}$$

**Доведення.** Завдяки включенню $f\in\mathfrak{F}_1$ функції

$$V(x)=x-f(x) \tag{2}$$

і

$$W(x)=x+f(x) \tag{3}$$

є строго зростаючими на $\mathbb{R}$, існують точки $x^*,x^{**}\in\mathbb{R}$, для яких

$$V(x^*)=0, \tag{4}$$

$$W(x^{**})=0, \tag{5}$$

і

$$R(V)=R(W)=\mathbb{R}. \tag{6}$$

Оскільки

$$V(v)+W(x)=2x \tag{7}$$

для всіх $x\in\mathbb{R}$, то можливий один із випадків:

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}V(x)=+\infty$ і $\lim\limits_{x\to-\infty}W(x)=-\infty$;

2) $\lim\limits_{x\to-\infty}V(x)=-\infty$ і $\lim\limits_{x\to+\infty}W(x)=+\infty$.

У кожному із цих випадків на підставі (4), (5) і строгого зростання на $\mathbb{R}$ функцій $V(x)$ і $W(x)$ справджується співвідношення (1).

Лему 1 доведено.

**Лема 2.** *Нехай функція $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ неперервна і є елементом множини $\mathfrak{F}_2$. Тоді*

$$\lim_{|x|\to+\infty}\left(x^2-(f(x))^2\right)=-\infty. \tag{8}$$

**Доведення.** Завдяки включенню $f\in\mathfrak{F}_2$ для функцій (2) і (3) виконуються співвідношення (4)–(6) і ці функції строго монотонні на $\mathbb{R}$, причому одна з них строго зростаюча, інша – строго спадна. Тоді на підставі (7) можливий один із випадків:

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}V(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}W(x)=+\infty$, $V(x)<0$ для всіх $x<x^*$ і $W(x)<0$ для всіх $x>x^{**}$;

2) $\lim\limits_{x\to-\infty}V(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}W(x)=-\infty$, $V(x)>0$ для всіх $x>x^*$ і $W(x)>0$ для всіх $x<x^{**}$;

3) $\lim\limits_{x\to+\infty}V(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}W(x)=-\infty$, $V(x)>0$ для всіх $x<x^*$ і $W(x)>0$ для всіх $x>x^{**}$;

4) $\lim\limits_{x\to-\infty}V(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}W(x)=+\infty$, $V(x)<0$ для всіх $x>x^*$ і $W(x)<0$ для всіх $x<x^{**}$.

У кожному із цих випадків завдяки строгій монотонності функцій $V(x)$ і $W(x)$ виконується співвідношення (8).

Лему 2 доведено.

Позначимо через $\mathcal{P}_m$, де $m\in\mathbb{N}$, банахів простір усіх $m$-періодичних елементів простору $l_\infty$ з нормою $\|\cdot\|_{\mathcal{P}_m}$, визначеною рівністю

$$\|x\|_{\mathcal{P}_m}=\|x\|_{l_\infty}$$

$(x\in\mathcal{P}_m)$, а через $\mathcal{R}_1^{-1}h$, де $h\in l_\infty$, – повний прообраз елемента $h$ при відображенні $\mathcal{R}_1$.

**Лема 3.** *Нехай функція $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ неперервна і є елементом множини $\mathcal{F}_1\cup\mathcal{F}_2$. Тоді для кожного відрізка $[\alpha,\beta]$ існує такий відрізок $[a,b]$, що*

$$(\mathcal{R}_1^{-1}h)\cap\{x\in\mathcal{P}_m: R(x)\subset[a,b]\}\neq\emptyset$$

*для кожного $h\in\{y\in\mathcal{P}_m: R(y)\subset[\alpha,\beta]\}$.*

**Доведення**. Зафіксуємо довільні відрізок $[\alpha,\beta]$ і елемент $h$ множини

$$\{y\in\mathcal{P}_m: R(y)\subset[\alpha,\beta]\}.$$

Нехай $f \in \mathcal{F}_1$. На підставі леми 1 і неперервності функції $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ існує такий відрізок $[a, b]$, що

$$a \leq f(x) + c \leq b$$

для всіх $x \in [a, b]$ і $c \in [\alpha, \beta]$. Тому обмежена замнена й опукла множина

$$\Omega_m = \{y \in \mathcal{P}_m : a \leq y(n) \leq b \ \text{ для всіх}\, n \in \mathbb{Z}\}$$

інваріантна відносно оператора $A$, що діє у просторі $\mathcal{P}_m$ і визначається рівністю

$$(Ax)(n) = f(x(n-1)) + h(n-1),\ n \in \mathbb{Z}.$$

Цей оператор цілком неперервний, оскільки неперервною є функція $f$, а банахів простір $\mathcal{P}_m$ скінченновимірний. Отже, виконані всі умови теореми Шаудера про нерухому точку [13]. На підставі цієї теореми оператор $A$ має нерухому точку $x^* \in \Omega_m$, яка, очевидно, є елементом множини $\mathcal{R}_1^{-1}h$.

Отже, лему 3 доведено у випадку $f \in \mathcal{F}_1$.

Тепер розглянемо випадок $f \in \mathcal{F}_2$. У цьому випадку неперервна функція $f$ є строго монотонною і тому має обернену строго монотонну неперервну функцію $f^{-1}$, для якої $R(f^{-1}) = \mathbb{R}$. Також на підставі леми 2

$$\lim_{|x|\to+\infty} \max_{|c|\leq\gamma} (|f(x)| - |x - |c||) = +\infty,$$

де

$$\gamma = \max\{|\alpha|, |\beta|\}.$$

Тому для всіх $c \in [-\gamma, \gamma]$ і всіх досить великих $x$

$$-|f(x)| \leq x - |c| \leq |f(x)|.$$

Звідси та з властивостей функції $f^{-1}$ випливає, що

$$-|x| \leq f^{-1}(x) - |c| \leq |x|$$

і, отже,

$$-|x - c| + |c| \leq f^{-1}(x - c) \leq |x - c| + |c|$$

для аналогічних $c$ та $x$. Оскільки

$$-|x| \leq -|x - c| + |c|$$

і

$$|x - c| + |c| \leq |x|,$$

то

$$-|x| \leq f^{-1}(x - c) \leq |x|$$

для всіх $c \in [\alpha, \beta]$ і всіх досить великих $x$. Тому завдяки неперервності функції $f^{-1}$ існує такий відрізок $[a, b]$, що

$$a \leq f^{-1}(x - c) \leq b$$

для всіх $c \in [\alpha, \beta]$ і $x \in [a, b]$. На підставі останньої нерівності розглянута раніше обмежена замнена й опукла множина $\Omega_m$ інваріантна відносно оператора $B$, що діє у просторі $\mathcal{P}_m$ і визначається рівністю

$$(Bx)(n) = f^{-1}(x(n+1) - h(n)),\ n \in \mathbb{Z}.$$

Цей оператор цілком неперервний, оскільки неперервною є функція $f^{-1}$, а банахів простір $\mathcal{P}_m$ скінченновимірний. Отже, виконані всі умови теореми Шаудера про нерухому точку. Тому оператор $B$ має нерухому точку $x^* \in \Omega_m$, яка, очевидно, є елементом множини $\mathcal{R}_1^{-1}h$.

Отже, лему 3 доведено й у випадку $f \in \mathcal{F}_2$.

Лему 3 доведено.

**Лема 4.** *Для кожної обмеженої послідовності $(x_k)$ елементів простору $l_\infty$ існують такі строго зростаюча послідовність $(k_l)$ натуральних чисел і елемент $x \in l_\infty$, що*

$$x_{k_l} \xrightarrow{\text{лок.},\ l_\infty} x \ \text{ при } l \to \infty$$

*і*

$$\|x\|_{l_\infty} \leq \sup_{k\geq1} \|x_k\|_{l_\infty}. \tag{9}$$

**Доведення.** Нехай $[t]$ – ціла частина числа $t$. Розглянемо числа

$$n_k = (-1)^k \, [k/2] \, ,\ k \in \mathbb{N}.$$

Очевидно, що $\{n_k : k \in \mathbb{N}\} = \mathbb{Z}$. На підставі обмеженості множини $\{x_k \in l_\infty : k \in \mathbb{N}\}$ існують збіжні числові послідовності

$$x_{k_{1,1}}(n_1), x_{k_{1,2}}(n_1), \ldots, x_{k_{1,m}}(n_1), \ldots,$$

$$x_{k_{2,1}}(n_2), x_{k_{2,2}}(n_2), \ldots, x_{k_{2,m}}(n_2), \ldots,$$

$$\vdots$$
$$x_{k_{m,1}}(n_m), x_{k_{m,2}}(n_m), \dots, x_{k_{m,m}}(n_m), \dots,$$
$$\vdots,$$

для яких послідовності $(k_{l,p})_{p\geq 1}$, $l \in \mathbb{N}$, є строго зростаючими і для $l \in \mathbb{N}$

$$\{k_{l,p} : p \in \mathbb{N}\} \supset \{k_{l+1,p} : p \in \mathbb{N}\}. \qquad (10)$$

Позначимо через $a_m$ границю $\lim\limits_{p\to\infty} x_{k_{m,p}}(n_m)$, а через $x$ – елемент простору $l_\infty$, для якого $x(n_m) = a_m$ для всіх $m \in \mathbb{N}$. Із (10) випливає, що

$$k_{q,q} \in \{k_{m,p} : p \in \mathbb{N}\}$$

для $q \geq m$ и $m \in \mathbb{N}$. Тому послідовність

$$x_{k_{1,1}}(n), x_{k_{2,2}}(n), \dots, x_{k_{q,q}}(n), \dots$$

є збіжною для кожного $n \in \mathbb{N}$ і, отже,

$$x_{k_{q,q}} \xrightarrow{\text{лок.},\ l_\infty} x \ \text{ при } q \to \infty.$$

Нерівність (9) випливає з того, що

$$x(n_m) = \lim_{p\to\infty} x_{k_{m,p}}(n_m)$$

і

$$|x(n_m)| \leq \sup_{p\geq 1} |x_{k_{m,p}}(n_m)|$$

для всіх $m \in \mathbb{N}$.

Лему 4 доведено.

*Теорема 2. Нехай функція $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ неперервна і є елементом множини $\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$. Тоді*

$$R(\mathcal{R}_1) = l_\infty.$$

**Доведення.** Зафіксуємо довільний елемент $h \in l_\infty$. Розглянемо числа

$$\alpha = \inf_{n\in\mathbb{Z}} h(n)$$

і

$$\beta = \sup_{n\in\mathbb{Z}} h(n).$$

Кожному натуральному числу $m$ поставимо у відповідність елемент $h_m$ простору $\mathcal{P}_m$, для якого

$$h_m(n) = h(n),\ n \in \big[[(1-m)/2], [(m-1)/2]\big] \cap \mathbb{Z}.$$

Зауважимо, що множина

$$\big[[(1-m)/2], [(m-1)/2]\big] \cap \mathbb{Z}$$

містить $m$ елементів,

$$R(h_m) \subset [\alpha, \beta]$$

для всіх $m \in \mathbb{N}$ і

$$h_m \xrightarrow{\text{лок.},\ l_\infty} h \ \text{ при } m \to \infty. \qquad (11)$$

На підставі леми 3 існує відрізок $[a, b]$ та елементи $y_m \in \mathcal{P}_m$, $m \geq 1$, для яких

$$R(y_m) \subset [a, b]$$

для всіх $m \in \mathbb{N}$ і

$$y_m(n+1) - f(y_m(n)) = h_m(n) \qquad (12)$$

для всіх $(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$. Завдяки лемі 4 існують такі строго зростаюча послідовність $(m_k)_{k\geq 1}$ натуральних чисел і елемент $y \in l_\infty$, що

$$y_{m_k} \xrightarrow{\text{лок.},\ l_\infty} y \ \text{ при } k \to \infty.$$

Звідси, із співвідношень (11), (12) і неперервності функції $f$ випливає, що

$$y(n+1) - f(y(n)) = h(n)$$

для всіх $n \in \mathbb{Z}$. З довільності вибору елемента $h \in l_\infty$ випливає твердження теореми.

Теорему 2 доведено.

**Лема 5.** *Нехай функція $g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ неперервна і*

$$|g(x) - g(y)| < |x - y| \qquad (13)$$

*якщо $x, y \in [a, b]$ і $x \neq y$. Тоді для довільного $\varepsilon \in (0, b-a)$ існує $q \in (0, 1)$ таке, що*

$$|g(x) - g(y)| \leq q|x - y| \qquad (14)$$

*для всіх $x, y \in [a, b]$, для яких $|x - y| \geq \varepsilon$.*

**Доведення**. Зафіксуємо довільне число $\varepsilon \in (0, b-a)$. Припустимо, що нерівність (14) не виконується ні для якого $q \in (0, 1)$. Існують послідовності $x_n, y_n \in [a, b]$, $n \in \mathbb{N}$, для яких $|x_n - y_n| \geq \varepsilon$, $n \in \mathbb{N}$, і

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{g(x_n) - g(y_n)}{x_n - y_n} \right| = 1.$$

Звідси випливає, що на підставі неперервності функції $g$ існують точки $x_0, y_0 \in [a, b]$, для яких

$$|x_0 - y_0| \geq \varepsilon$$

і

$$|g(x_0) - g(y_0)| = |x_0 - y_0|.$$

Останнє співвідношення суперечить нерівності (13).

Тому припущення, що нерівність (14) не виконується ні для якого $q \in (0, 1)$, хибне.

Лему 5 доведено.

**Лема** 6. *Нехай функція $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ неперервна і*

$$|g(x) - g(y)| > |x - y|$$

*якщо $x, y \in [a, b]$ і $x \neq y$. Тоді для довільного $\varepsilon \in (0, b - a)$ існує $Q > 1$ таке, що*

$$|g(x) - g(y)| \geq Q|x - y|$$

*для всіх $x, y \in [a, b]$, для яких $|x - y| \geq \varepsilon$.*

Ця лема доводиться подібно до леми 6.

**4. Доведення теореми 1.**

**Достатність**. Нехай $f \in \mathfrak{F}_1 \cup \mathfrak{F}_2$. Тоді, згідно з теоремою 2,

$$R(\mathcal{R}_1) = l_\infty.$$

Розглянемо довільний элемент $h \in l_\infty$. Покажемо, що різницеве рівняння

$$x(n + 1) = f(x(n)) - h(n), \ n \in \mathbb{Z}, \qquad (15)$$

має єдиний в $l_\infty$ розв'язок (тоді з довільності $h \in l_\infty$ випливатиме, що відображення $\mathcal{R}_1$ має обернене відображення).

Нехай $u \in l_\infty$ і $y \in l_\infty$ – розв'язки рівняння (15). Тоді

$$|u(n + 1) - y(n + 1)| =$$

$$= |f(u(n)) - f(y(n))|, \ n \in \mathbb{Z}. \qquad (16)$$

Припустимо, що $u(n^*) \neq y(n^*)$ для деякого $n^* \in \mathbb{Z}$. Тоді, згідно з (16),

$$|u(n) - y(n)| >$$

$$> |u(n + 1) - y(n + 1)|, \ n \leq n^* - 1, \qquad (17)$$

якщо $f \in \mathfrak{F}_1$, і

$$|u(n) - y(n)| <$$

$$< |u(n + 1) - y(n + 1)|, \ n \geq n^*, \qquad (18)$$

якщо $f \in \mathfrak{F}_2$. У випадку виконання співвідношення (17) на підставі леми 5, співвідношення (16) і обмеженості множин $R(u)$, $R(y)$ існує $q \in (0, 1)$ таке, що

$$q|u(n) - y(n)| \geq$$

$$\geq |u(n + 1) - y(n + 1)|, \ n \leq n^* - 1.$$

Аналогічно у випадку виконання співвідношення (18) на підставі леми 6 існує $Q > 1$ таке, що

$$Q|u(n) - y(n)| \leq$$

$$\leq |u(n + 1) - y(n + 1)|, \ n \geq n^*.$$

Кожне з останніх двох співвідношень суперечить співвідношенню

$$|u(n) - y(n)| \leq \|u - y\|_{l_\infty} < +\infty, \ n \in \mathbb{Z}.$$

Отже, припущення, що $u(n^*) \neq y(n^*)$ для деякого $n^* \in \mathbb{N}$, хибне. Тому виконується рівність $u = y$ (рівняння (15) має єдиний обмежений розв'язок) і відображення $\mathcal{R}_1$ є оборотним.

Покажемо неперервність $\mathcal{R}_1^{-1}$.

Припустимо, що відображення $\mathcal{R}_1^{-1}$ не є неперервним. Існують $h, h_k \in l_\infty$, $k \in \mathbb{N}$, і $\mu \in (0, +\infty)$ такі, що

$$\lim_{k \to \infty} \|h - h_k\|_{l_\infty} = 0 \qquad (19)$$

і для $x = \mathcal{R}_1^{-1}h, \ x_k = \mathcal{R}_1^{-1}h_k, \ k \in \mathbb{N}$, виконуватиметься співвідношення

$$\mu \leq \|x - x_k\|_{l_\infty} < +\infty, \ k \in \mathbb{N}. \qquad (20)$$

Згідно з (19) та лемою 3 існує відрізок $[a, b]$, для якого

$$R(x) \bigcup \left( \bigcup_{k \in \mathbb{N}} R(x_k) \right) \subset [a, b]. \qquad (21)$$

Розглянемо випадок, коли $f \in \mathfrak{F}_1$. На підставі леми 5 існує $q \in (0, 1)$ таке, що

$$|f(x) - f(y)| \leq q|x - y| \qquad (22)$$

для всіх $x, y \in [a, b]$, для яких $|x - y| \geq \mu/4$. Виберемо таке число $\delta \in (0, 1/4)$, щоб

$$1 - \delta > q. \tag{23}$$

З (19) випливає, що існує $k_1 \in \mathbb{N}$, для якого

$$\|h - h_{k_1}\|_{l_\infty} \leq \frac{\delta\mu}{2}. \tag{24}$$

Тоді згідно з (20)

$$\frac{\mu}{2} < |x(n^*) - x_{k_1}(n^*)| \tag{25}$$

для деякого $n^* \in \mathbb{N}$.

Очевидно, що

$$|x(n+1) - x_{k_1}(n+1)| \leq$$
$$\leq |f(x(n)) - f(x_{k_1}(n))| +$$
$$+ |h(n) - h_{k_1}(n)|, \ n \in \mathbb{Z}. \tag{26}$$

Тому на підставі включення $f \in \mathfrak{F}_1$ та співвідношень (24), (25)

$$\frac{\mu}{2} < |x(n^*) - x_{k_1}(n^*)| \leq$$
$$\leq |x(n^* - 1) - x_{k_1}(n^* - 1)| + \frac{\delta\mu}{2}.$$

Звідси отримуємо

$$\frac{\mu}{4} < |x(n^* - 1) - x_{k_1}(n^* - 1)|.$$

Тому згідно з (22) і (26)

$$|x(n^*) - x_{k_1}(n^*)| \leq$$
$$\leq q|x(n^* - 1) - x_{k_1}(n^* - 1)| + \frac{\delta\mu}{2}.$$

Тоді на підставі (25)

$$(1 - \delta)\frac{\mu}{2} \leq q|x(n^* - 1) - x_{k_1}(n^* - 1)|$$

і, отже, з урахуванням (23)

$$\frac{\mu}{2} < |x(n^* - 1) - x_{k_1}(n^* - 1)|. \tag{27}$$

Отже, якщо для деякого $n^* \in \mathbb{Z}$ виконується співвідношення (25), то також виконується співвідношення (27). Звідси

$$\frac{\mu}{2} < |x(n) - x_{k_1}(n)|, \ n \leq n^*.$$

На підставі останньої нерівності, а також співвідношень (22) і (26) отримуємо

$$|x(n) - x_{k_1}(n)| \leq$$
$$\leq q|x(n-1) - x_{k_1}(n-1)| + \frac{\delta\mu}{2}, \ n \leq n^*.$$

Отже,

$$|x(n-1) - x_{k_1}(n-1)| \geq$$
$$\geq q^{-1}\left(|x(n) - x_{k_1}(n)| - \frac{\delta\mu}{2}\right), \ n \leq n^*,$$

і тому

$$b - a \geq |x(n^* - m) - x_{k_1}(n^* - m)| \geq$$
$$\geq q^{-m}|x(n^*) - x_{k_1}(n^*)| -$$
$$-\frac{\delta\mu}{2}(q^{-1} + q^{-2} + \ldots + q^{-m}), \ m \in \mathbb{N},$$

якщо врахувати співвідношення (21), тобто

$$b - a \geq |x(n^* - m) - x_{k_1}(n^* - m)| \geq$$
$$\geq \frac{\mu\delta q}{2(1-q)} + \frac{\mu(1 - q - \delta)}{2(1-q)}q^{-m}, \ m \in \mathbb{N}. \tag{28}$$

Однако співвідношення (28) не може виконуватися, оскільки

$$\frac{1 - q - \delta}{1 - q} > 0$$

(на підставі (23)) і

$$\lim_{m \to +\infty} q^{-m} = +\infty.$$

Отже, припущення про те, що відображення $\mathcal{R}_1^{-1}$ не є неперервним (у випадку $f \in \mathfrak{F}_2$), хибне.

Тепер розглянемо випадок, коли $f \in \mathfrak{F}_2$.

На підставі леми 6 існує $Q > 1$ таке, що

$$|f(x) - f(y)| \geq Q|x - y| \tag{29}$$

для всіх $x, y \in [a, b]$, для яких $|x - y| \geq \mu/4$. Виберемо довільне $\delta \in (0, Q - 1)$. Згідно з (19) і (20) існують $k_2 \in \mathbb{N}$ і $n^* \in \mathbb{Z}$ такі, що

$$\|h - h_{k_2}\|_{l_\infty} \leq \frac{\delta\mu}{2}, \tag{30}$$

і
$$|x(n^*) - x_{k_2}(n^*)| > \frac{\mu}{2}. \qquad (31)$$
Оскільки
$$|x(n+1) - x_{k_2}(n+1)| \geq$$
$$\geq |f(x(n)) - f(x_{k_2}(n))| -$$
$$-|h(n) - h_{k_2}(n)|, \ n \in \mathbb{Z}, \qquad (32)$$
і
$$Q - \delta > 1,$$
то на підставі (29),(30) і (31)
$$|x(n^*+1) - x_{k_2}(n^*+1)| \geq$$
$$\geq Q|x(n^*) - x_{k_2}(n^*)| - \frac{\delta\mu}{2} >$$
$$> \frac{Q\mu}{2} - \frac{\delta\mu}{2} = \frac{\mu}{2}(Q - \delta) > \frac{\mu}{2}.$$
Отже, якщо для $n^* \in \mathbb{Z}$ виконується співвідношення (31), то справедливим є співвідношення
$$|x(n^*+1) - x_{k_2}(n^*+1)| > \frac{\mu}{2}.$$
Звідси
$$|x(n) - x_{k_2}(n)| > \frac{\mu}{2}, \ n \geq n^*.$$

На підставі останньої нерівності і співвідношень (29),(30) і (32) отримуємо
$$|x(n+1) - x_{k_2}(n+1)| \geq$$
$$\geq Q|x(n) - x_{k_2}(n)| - \frac{\delta\mu}{2}, \ n \geq n^*.$$
Тому
$$b - a \geq |x(n^*+m) - x_{k_2}(n^*+m)| \geq$$
$$\geq Q^m|x(n^*) - x_{k_2}(n^*)| -$$
$$-\frac{\delta\mu}{2}(1 + Q + Q^2 + \ldots + Q^{m-1}), \ m \in \mathbb{N},$$
якщо врахувати співвідношення (21), тобто
$$b - a \geq |x(n^*+m) - x_{k_2}(n^*+m)| \geq$$
$$\geq \frac{\delta\mu}{2(Q-1)} + \frac{\mu(Q-1-\delta)}{2(Q-1)}Q^m, \ m \in \mathbb{N}.$$
А це неможливо, оскільки
$$\frac{1 - Q - \delta}{1 - Q} > 0$$
і
$$\lim_{m \to +\infty} Q^m = +\infty.$$

Отже, припущення про те, що відображення $\mathcal{R}_1^{-1}$ не є неперервним, хибне й у випадку $f \in \mathfrak{F}_2$.

Отже, відображення $\mathcal{R}_1^{-1} : l_\infty \longrightarrow l_\infty$ є неперервним.

Зауважимо, що якщо $f \in \mathfrak{F}_1 \cup \mathfrak{F}_2$, то $-f \in \mathfrak{F}_1 \cup \mathfrak{F}_2$, і навпаки. Тому включення $f \in \mathfrak{F}_1 \cup \mathfrak{F}_2$ достатньо також для того, щоб і відображення $\mathcal{R}_2 : l_\infty \longrightarrow l_\infty$ мало обернене неперервне відображення.

Отже, достатність доведено.

**Необхідність**. Нехай $\mathcal{R}_1$ має обернене неперервне відображення. Розглянемо рівняння
$$y(n+1) = f(y(n)) - c, \ n \in \mathbb{R}, \qquad (33)$$
і
$$f(x(n)) - x(n) - c = 0, \ n \in \mathbb{R}, \qquad (34)$$
в яких $c \in \mathbb{R}$. Кожний сталий розв'язок рівняння (34) є розв'язком рівняння (33).

А оскільки згідно з оборотністю $\mathcal{R}_1$ рівняння (33) має єдиний розв'язок $y \in l_\infty$, то рівняння (34) також матиме єдиний сталий розв'язок. На підставі цього та довільності $c \in \mathbb{R}$ справджується рівність
$$R(I - f) = \mathbb{R},$$
а відображення $I - f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ є оборотним. З неперервності відображення $(I - f)^{-1}$ (за неперервністю відображення $\mathcal{R}_1^{-1}$) випливає, що функція $x - f(x)$ є строго монотонною на $\mathbb{R}$.

Доведемо, що виконується нерівність
$$|f(x) - f(y)| < |x - y|, \qquad (35)$$
або
$$|f(x) - f(y)| > |x - y| \qquad (36)$$
якщо $x, y \in \mathbb{R}$ і $x \neq y$.

Припустимо, що жодна з цих нерівностей не виконується. У цьому випадку на підставі неперервності відображення $f$ існують такі точки $x^*,\ y^* \in \mathbb{R}$ $(x^* \neq y^*)$, що

$$|f(x^*) - f(y^*)| = |x^* - y^*|.$$

З цієї рівності випливає, що

$$f(x^*) - x^* = f(y^*) - y^* \tag{37}$$

або

$$f(x^*) - y^* = f(y^*) - x^*. \tag{38}$$

Рівність (37), очевидно, суперечить оборотності відображення $I - f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

Рівність (38) суперечить оборотності різницевого відображення $\mathcal{R}_1 : l_\infty \longrightarrow l_\infty$. Справді, за (38)

$$x^* = f(y^*) + d$$

і

$$y^* = f(x^*) + d,$$

де $d = x^* - f(y^*) = y^* - f(x^*)$. Тому різницеве рівняння

$$x(n+1) = f(x(n)) + d$$

має розв'язки

$$x_1(n) = \begin{cases} x^*, & \text{якщо } n - \text{парне число}, \\ y^*, & \text{якщо } n - \text{непарне число}, \end{cases}$$

$$x_2(n) = \begin{cases} y^*, & \text{якщо } n - \text{парне число}, \\ x^*, & \text{якщо } n - \text{непарне число}, \end{cases}$$

Отже, нерівність (35) або (36) виконується.

Замінюючи в попередніх міркуваннях $f$ на $-f$, отримаємо, що неперервної оборотності відображення $\mathcal{R}_2$ достатньо для виконання співвідношення

$$R(I + f) = \mathbb{R}$$

та нерівності (35) або (36).

Отже, якщо відображення $\mathcal{R}_1,\ \mathcal{R}_2$ мають обернені неперервні відображення, то

$$f \in \mathfrak{F}_1 \cup \mathfrak{F}_2,$$

і необхідність доведено.

Теорему 1 доведено.

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ


1. *Мухамадиев Э.* Об обратимости функциональных операторов в пространстве ограниченных на оси функций // Мат. заметки.— 1972.— **11**, № 3.— С. 269–274.

2. *Мухамадиев Э.* Исследования по теории периодических и ограниченных решений дифференциальных уравнений: Дис. ... докт. физ.-мат. наук.— Душанбе. 1978.— 289 с.

3. *Слюсарчук В.Е.* Обратимость почти периодических $c$-непрерывных функциональных операторов // Мат. сб.— 1981.— **116**(158), № 4(12).— С. 483–501.

4. *Слюсарчук В.Е.* Интегральное представление $c$-непрерывных линейных операторов // Докл. АН УССР.— 1981.— сер.А, № 8.— С. 34–37.

5. *Слюсарчук В.Е.* Обратимость неавтономных дифференциально- функциональных операторов // Мат. сб.— 1986.— **130**(172), № 1(5).— С. 86–104.

6. *Слюсарчук В.Е.* Необходимые и достаточные условия обратимости неавтономных функционально-дифференциальных операторов // Мат. заметки.— 1987.— **42**, № 2.— С. 262–267.

7. *Слюсарчук В.Е.* Необходимые и достаточные условия обратимости равномерно $c$-непрерывных функционально-дифференциальных операторов // Укр. мат. журн.— 1989.— **41**, № 2.— С. 201–205.

8. *Курбатов В.Г.* Линейные дифференциально-разностные уравнения.— Воронеж: Изд-во Воронеж. ун-та, 1990.— 168 с.

9. *Чан Хыу Бонг.* Почти периодические и ограниченные решения линейных функционально-дифференциальных уравнений: Дис. ... докт. физ.-мат. наук.— Киев. 1993.— 255 с.

10. *Слюсарчук В.Е.* Метод $c$-непрерывных операторов в теории импульсных систем // Тезисы докладов Всесоюзной конференции по теории и приложениям функционально-дифференциальных уравнений.— Душанбе. 1987.— С. 102–103.

11. *Слюсарчук В.Е.* Слабо нелинейные возмущения импульсных систем // Математическая физика и нелинейная механика.— 1991.— Вып. 15(49).— С. 32–35.

12. *Слюсарчук В.Е.* Теорема про нерухому точку для $c$-неперервних операторів у просторах обмежених послідовностей // Наук. вісн. Чернівецького ун-ту: Зб. наук. праць. Математика. — Чернівці: ЧДУ, 2002.— Вип. 150.— С. 87–93.

13. *Ниренберг Л.* Лекции по нелинейному функциональному анализу.— М.: Мир, 1977.— 232 с.


Стаття надійшла до редколегії 19.06.2005