УДК 517.91/943

©2005 р. П.Ф. Самусенко

Національний педагогічний університет ім. М.П. Драгоманова, Київ

АСИМПТОТИЧНІ ВЛАСТИВОСТІ РОЗВ'ЯЗКІВ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНИХ СИСТЕМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ВИРОДЖЕННЯМ

Використовуючи метод примежових функцій, у статті побудовано розв'язок задачі Коші сингулярно збуреної системи диференціальних рівнянь з виродженням.

Using the method of boundary functions, the solution of the initial-value problem of the singularly perturbed systems of differential equations with degeneration is constructed.

Асимптотичні властивості розв'язків сингулярно збурених систем лінійних диференціальних рівнянь

$$\varepsilon B(t,\varepsilon)\frac{dx}{dt} = A(t,\varepsilon)x,\ t \in [0;T], \tag{1}$$

де $A(t,\varepsilon)$, $B(t,\varepsilon)$ – квадратні матриці n-го порядку, причому

$$A(t,\varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s A_s(t),\ B(t,\varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s B_s(t),$$

x – невідома вектор-функція розмірності n, $\varepsilon \in (0;\varepsilon_0]$ – малий параметр, $t \in [0;T]$, досліджувались у працях А.М.Самойленка, М.І.Шкіля, І.І.Старуна, В.П.Яковця та їх учнів [1 – 3]. Зокрема, за умови сталої кронекерової структури граничної в'язки матриць $A_0(t) - \lambda B_0(t)$, побудовано формальну фундаментальну матрицю системи (1) і доведено її асимптотичний характер.

Нелінійні сингулярно збурені системи з виродженою матрицею при похідних

$$\varepsilon B(t)\frac{dx}{dt} = A(t,\varepsilon)\,x + \varepsilon f(x,t,\varepsilon),\ t \in [0;T] \tag{2}$$

розглядались В.П.Яковцем [4]. А саме, використовуючи метод примежових функцій [5], у праці [4] побудовано розв'язок $x(t,\varepsilon)$ системи (2), для якого виконується початкова умова

$$x(0,\varepsilon) = x_0. \tag{3}$$

При цьому розглядався випадок простих елементарних дільників в'язки $A_0(t) - \lambda B(t)$.

Зазначимо, що в наведених вище дослідженнях необхідною умовою є сталість рангу матриці біля похідних на всьому розглядуваному проміжку.

У даній праці наведено алгоритм побудови розв'язку задачі Коші (2), (3) у випадку коли матриця $B(t)$ на відрізку $[0;T]$ змінює свій ранг. Отже, нехай у системі (2) $A(t,\varepsilon)$, $B(t)$, x – такі ж, як і в системі (1), причому

$$A(t,\varepsilon) = A_0(t) + \varepsilon A_1(t),$$

$f(x,t,\varepsilon)$ – вектор-функція розмірності n.

Припустимо, що:
1) елементи матриць $A_0(t)$, $A_1(t)$, $B(t)$ нескінченно диференційовні на відрізку $[0;T]$;
2) вектор-функція $f(x,t,\varepsilon)$ має нескінченну кількість неперервних похідних за всіма змінними на множині $||x|| \le a$, $0 \le t \le T$, $\varepsilon \in [0;\varepsilon_0]$, $||x_0|| < a$;
3) в'язка матриць $A_0(t) - \lambda B(0)$ на відрізку $[0;T]$ регулярна, має один "скінченний" елементарний дільник кратності p, $p \ge 2$ і один "нескінченний" – кратності $n-p$;
4) $Re\lambda_0(t) \ne 0$, $0 \le t \le T$, де $\lambda_0(t)$ – власне значення матриці $A_0(t)$ відносно $B(0)$.

Тоді існують неособливі матриці $P(t)$ та $Q(t)$ такі, що

$$P(t)A_0(t)Q(t) = \Omega(t),\ P(t)B(0)Q(t) = H,$$

де

$$\Omega(t) = \begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & W(t) \end{pmatrix},\ H = \begin{pmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & E_2 \end{pmatrix},$$

$W(t)=\lambda_0(t)E_2+J_2$, E_1, E_2 – одиничні матриці $(n-p)$-го та p-го порядку відповідно,

$$J_i=||\gamma_{ij}||_1^{r_i},\ \gamma_{ij}=\begin{cases}1,\ j=i+1,\\ 0,\ j\neq i+1,\end{cases}$$

$r_1=n-p$, $r_2=p$ [1, с. 32].

Зробимо в системі (2) заміну $x=Q(t)y$ і помножимо її зліва на $P(t)$. Дістанемо

$$\varepsilon D(t)\frac{dy}{dt}=C(t,\varepsilon)\,y+\varepsilon g(y,t,\varepsilon), \qquad (4)$$

де

$$C(t,\varepsilon)=\Omega(t)+\varepsilon(P(t)A_1(t)Q(t)-$$
$$-HQ^{-1}(t)Q'(t))\equiv C_0(t)+\varepsilon C_1(t),$$
$$D(t)=P(t)B(t)Q(t),$$
$$g(y,t,\varepsilon)=P(t)f(Q(t)y,t,\varepsilon).$$

Умова (3) при цьому набуде вигляду

$$y(0,\varepsilon)=Q^{-1}(0)x_0\equiv y_0. \qquad (5)$$

Розв'язок задачі (4), (5) шукатимемо у вигляді

$$y(t,\varepsilon)=\overline{y}(t,\varepsilon)+\Pi y(\tau,\varepsilon), \qquad (6)$$

де $\overline{y}(t,\varepsilon)=\sum\limits_{i=0}^{\infty}\varepsilon^i\overline{y}_i(t)$ – регулярний ряд, а $\Pi y(\tau,\varepsilon)=\sum\limits_{i=0}^{\infty}\varepsilon^i\Pi_i y(\tau)$ – примежовий ряд, у якому $\tau=\dfrac{t}{\varepsilon}$, [5].

У такому ж вигляді запишемо вектор $g(y,t,\varepsilon)$:

$$g(y,t,\varepsilon)=\overline{g}(t,\varepsilon)+\Pi g(\tau,\varepsilon),$$

де

$$g(t,\varepsilon)=g(\overline{y}(t,\varepsilon),t,\varepsilon),$$
$$\Pi g(\tau,\varepsilon)=g(\overline{y}(\varepsilon\tau,\varepsilon)+\Pi y(\tau,\varepsilon),\varepsilon\tau,\varepsilon)-$$
$$-g(\overline{y}(\varepsilon\tau,\varepsilon),\varepsilon\tau,\varepsilon).$$

Розкладаючи вектор-функції $\overline{g}(t,\varepsilon)$ та $\Pi g(\tau,\varepsilon)$ у формальні ряди за степенями ε, дістаємо

$$\overline{g}(t,\varepsilon)=\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^i\overline{g}_i(t),\ \Pi g(\tau,\varepsilon)=\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^i\Pi_i g(\tau).$$

Аналогічним чином запишемо матриці $C(t,\varepsilon)$ та $D(t)$:

$$\Pi C(\tau,\varepsilon)=C(\varepsilon\tau,\varepsilon)=\sum_{s=0}^{\infty}\varepsilon^s\sum_{i=0}^{s}\frac{1}{i!}\frac{d^iC_{s-i}(0)}{dt^i}\tau^i,$$

$$\Pi D(\tau,\varepsilon)=D(\varepsilon\tau)=\sum_{s=0}^{\infty}\varepsilon^s\frac{1}{s!}\frac{d^sD(0)}{dt^s}\tau^s.$$

Підставимо ряд (6) у систему (4) і розглянемо окремо вирази, що залежать від t і τ:

$$\varepsilon D(t)\frac{d\overline{y}}{dt}=C(t,\varepsilon)\overline{y}+\varepsilon\overline{g}(t,\varepsilon), \qquad (7)$$

$$D(\varepsilon\tau)\frac{d\Pi y}{d\tau}=C(\varepsilon\tau,\varepsilon)\Pi y+\varepsilon\Pi g(\tau,\varepsilon). \qquad (8)$$

Можна показати, що прирівнюючи коефіцієнти біля однакових степенів ε, системи (7), (8) відносно $\overline{y}_0(t)$, $\Pi_0 y(\tau)$, $\overline{y}_1(t)$, $\Pi_1 y(\tau)$, ... розв'язні [5, с. 57; 6, с. 348], причому

$$\Pi_i y(\tau)\to 0,\ \tau\to\infty,\ i=1,2,...$$

Зауважимо, що для виконання умови (5) достатньо, щоб

$$\overline{y}_0(0)+\Pi_0 y(0)=y_0, \qquad (9^0)$$

$$\overline{y}_i(0)+\Pi_i y(0)=0,\ i=1,2,... \qquad (9^i)$$

Покажемо, що побудований формальний розв'язок є рівномірним асимптотичним розвиненням точного розв'язку задачі (4), (5) на відрізку $[0;t_0]$, $t_0\leq T$ за параметром ε.

Для цього систему (4) запишемо так:

$$\varepsilon H\frac{dy}{dt}=C(t,\varepsilon)y+\varepsilon(H-D(t))\frac{dy}{dt}+\varepsilon g(y,t,\varepsilon).$$

Як відомо, матриця $\Omega(t)$ має H-жорданів ланцюжок векторів довжини p, що складається з власного вектора $\varphi(t)$, який відповідає власному значенню $\lambda_0(t)$ та $p-1$ H-приєднаних векторів $\varphi_1(t)$, ..., $\varphi_{p-1}(t)$ [1, с. 32].

Матриця H має Ω-жорданів ланцюжок векторів довжини $n-p$, що складається з власного вектора $\widetilde{\varphi}(t)$, який відповідає нульовому власному значенню та $n-p-1$ Ω-приєднаних векторів $\widetilde{\varphi}_1(t)$, ..., $\widetilde{\varphi}_{p-1}(t)$.

Нехай $\psi(t)$ та $\widetilde{\psi}(t)$ – елементи нуль-простору матриць $(\Omega(t)-\lambda_0(t)H)^*$ та H^* відповідно.

При цьому вектори $\psi(t)$ та $\widetilde{\psi}(t)$ можна визначити так, щоб

$$(H((\Omega(t)-\lambda_0(t)H)^- H)^{i-1}\varphi(t),\psi(t))=\delta_{pi},$$

$i=\overline{1,p}$,

$$(\Omega(t)((H^-\Omega(t))^{i-1}\widetilde{\varphi}(t),\widetilde{\psi}(t))=\delta_{n-p,i},$$

$i=\overline{1,n-p}$, δ_{ij} – символ Кронекера.

Зазначимо, що вектори $\varphi(t)$, $\varphi_1(t)$, ..., $\varphi_{p-1}(t)$, $\widetilde{\varphi}(t)$, $\widetilde{\varphi}_1(t)$, ..., $\widetilde{\varphi}_{n-p-1}(t)$, $\psi(t)$ та $\widetilde{\psi}(t)$ можна побудувати так, щоб вони були лінійно незалежними на відрізку $[0;T]$ [2, с. 31].

Надалі припускатимемо, що:

5) $Re\sqrt[p]{(C_1(t)\varphi(t)-H\varphi'(t),\psi(t))}\neq 0$, $Re\sqrt[q-1]{(C_1(t)\widetilde{\varphi}(t),\widetilde{\psi}(t))}\neq 0,\ t\in[0;T]$.

Тоді [2, с. 81] система

$$\varepsilon H\frac{dy}{dt}=C(t,\varepsilon)y$$

має p формальних лінійно незалежних розв'язків вигляду

$$y_i(t,\varepsilon)=u_i(t,\varepsilon)\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^t\lambda_i(t,\varepsilon)dt\right),$$

$i=\overline{1,p}$, де $u_i(t,\varepsilon)$ – n-вимірні вектори, а $\lambda_i(t,\varepsilon)$ – скалярні функції, причому

$$u_i(t,\varepsilon)=\varphi(t)+\sum_{k=1}^{\infty}\mu^k u_k^{(i)}(t), \qquad (10)$$

$$\lambda_i(t,\varepsilon)=\lambda_0(t)+\sum_{k=1}^{\infty}\mu^k\lambda_k^{(i)}(t),$$

$i=\overline{1,p}$ та $n-p-1$ формальних лінійно незалежних розв'язків

$$\widetilde{y}_j(t,\varepsilon)=\widetilde{u}_j(t,\varepsilon)\exp\left(\nu^{p-n}\int\limits_0^t\frac{dt}{\xi_j(t,\varepsilon)}\right),$$

$j=\overline{1,n-p-1}$, де

$$\widetilde{u}_j(t,\varepsilon)=\widetilde{\varphi}(t)+\sum_{k=1}^{\infty}\nu^k\widetilde{u}_k^{(j)}(t), \qquad (11)$$

$$\xi_j(t,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{\infty}\nu^k\xi_k^{(j)}(t),$$

$j=\overline{1,n-p-1}$, $\mu=\sqrt[p]{\varepsilon}$, $\nu=\sqrt[n-p-1]{\varepsilon}$.

Спряжена система

$$\varepsilon\frac{dB^*(t)z}{dt}=-A^*(t,\varepsilon)z$$

також має p формальних лінійно незалежних розв'язків вигляду

$$z_i(t,\varepsilon)=v_i(t,\varepsilon)\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^t\eta_i(t,\varepsilon)dt\right),\ i=\overline{1,p}$$

та $n-p-1$ формальних лінійно незалежних розв'язків

$$\widetilde{z}_j(t,\varepsilon)=\widetilde{v}_j(t,\varepsilon)\exp\left(\nu^{p-n}\int\limits_0^t\frac{dt}{\kappa_j(t,\varepsilon)}\right),$$

$j=\overline{1,n-p-1}$, де

$$v_i(t,\varepsilon)=\psi(t)+\sum_{k=1}^{\infty}\mu^k v_k^{(i)}(t), \qquad (12)$$

$$\eta_i(t,\varepsilon)=-\overline{\lambda}_0(t)+\sum_{k=1}^{\infty}\mu^k\eta_k^{(i)}(t),$$

$i=\overline{1,p}$,

$$\widetilde{v}_j(t,\varepsilon)=\widetilde{\psi}(t)+\sum_{k=1}^{\infty}\nu^k\widetilde{v}_k^{(j)}(t), \qquad (13)$$

$$\kappa_j(t,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{\infty}\nu^k\kappa_k^{(j)}(t),$$

$j=\overline{1,n-p-1}$.

Зробимо в системі (4) заміну

$$y(t,\varepsilon)=z(t,\varepsilon)+y_m(t,\varepsilon), \qquad (14)$$

де

$$y_m(t,\varepsilon)=\sum_{i=0}^{m}\varepsilon^i(\overline{y}_i(t)+\Pi_i y(\tau)),$$

а $z(t,\varepsilon)$ – нова невідома вектор-функція. Дістанемо

$$\varepsilon H\frac{dz}{dt}=C(t,\varepsilon)\,z+h(z,t,\varepsilon), \qquad (15)$$

$$h(z,t,\varepsilon) = C(t,\varepsilon)y_m + \varepsilon(H - D(t))\frac{dz}{dt} -$$
$$-\varepsilon D(t)\frac{dy_m}{dt} + \varepsilon g(z + y_m, t, \varepsilon).$$

Доведемо існування розв'язку системи (15) такого, що

$$z(0,\varepsilon) = 0.$$

Нехай

$$Q_1(t,\varepsilon) = [U_m(t,\varepsilon), \widetilde{\varphi}(t)],$$
$$P_1(t,\varepsilon) = [V_m(t,\varepsilon), \widetilde{\psi}(t)]^*,$$

де $U_m(t,\varepsilon)$ та $V_m(t,\varepsilon)$ – прямокутні $n\times(n-1)$-матриці, складені з виразів (10), (11) та (12), (13) відповідно, шляхом їх обривання на m-му члені:

$$U_m(t,\varepsilon) = [u_1^{(m)}(t,\varepsilon), ..., u_p^{(m)}(t,\varepsilon),$$
$$\widetilde{u}_1^{(m)}(t,\varepsilon), ..., \widetilde{u}_{n-p-1}^{(m)}(t,\varepsilon)],$$
$$V_m(t,\varepsilon) = [v_1^{(m)}(t,\varepsilon), ..., v_p^{(m)}(t,\varepsilon),$$
$$\widetilde{v}_1^{(m)}(t,\varepsilon), ..., \widetilde{v}_{n-p-1}^{(m)}(t,\varepsilon)].$$

Виконавши в системі (15) заміну

$$z(t,\varepsilon) = Q_1(t,\varepsilon)\, v(t,\varepsilon)$$

та помноживши обидві її частини зліва на $P_1(t,\varepsilon)$, матимемо

$$\varepsilon P_1\, H\, Q_1\frac{dv}{dt} = P_1\, L\, Q_1\, v + P_1\, h(Q_1 v, t, \varepsilon),$$

де

$$L(t,\varepsilon) = C(t,\varepsilon) - \varepsilon H\frac{d}{dt}.$$

Тобто

$$\varepsilon\begin{pmatrix} V_m^* H U_m & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\frac{dv}{dt} = \begin{pmatrix} V_m^* L U_m & V_m^* L\widetilde{\varphi} \\ \widetilde{\psi}^* L U_m & (L\widetilde{\varphi}, \widetilde{\psi}) \end{pmatrix} v +$$
$$+ P_1 h(Q_1 v, t, \varepsilon). \qquad (16)$$

Зазначимо, що

$$L(t,\varepsilon)\, U_m(t,\varepsilon) = H\, U_m(t,\varepsilon)\, S_m(t,\varepsilon) +$$
$$+ \varepsilon^{\frac{m+1}{p(n-p-1)}} C_1(t,\varepsilon),$$

де

$$S_m(t,\varepsilon) = diag\{\Lambda_m(t,\varepsilon), \Psi_m(t,\varepsilon)\} \equiv$$
$$\equiv diag\{s_{m1}(t,\varepsilon), ..., s_{m,n-1}(t,\varepsilon)\},$$
$$\Lambda_m(t,\varepsilon) = diag\{\lambda_1^{(m)}(t,\varepsilon), ..., \lambda_p^{(m)}(t,\varepsilon)\},$$
$$\Psi_m(t,\varepsilon) =$$
$$= diag\{(\nu\xi_1^{(m)}(t,\varepsilon))^{-1}, ..., (\nu\xi_{n-p-1}^{(m)}(t,\varepsilon))^{-1}\},$$

а $C_1(t,\varepsilon)$ – $n\times(n-1)$-вимірна матриця, рівномірно обмежена на $[0;T]$.

Тоді система (16) набуде вигляду

$$\varepsilon R(t,\varepsilon)\frac{dv}{dt} = F(t,\varepsilon)v + l(v,t,\varepsilon), \qquad (17),$$

де

$$R(t,\varepsilon) = R_0(t,\varepsilon) + R_1(t,\varepsilon),$$
$$R_0(t,\varepsilon) = \begin{pmatrix} V_m^* H U_m & 0 \\ 0 & (D\widetilde{\varphi}, \widetilde{\psi}) \end{pmatrix},$$
$$R_1(t,\varepsilon) = \begin{pmatrix} -V_m^*(H-D)U_m & V_m^* D\widetilde{\varphi} \\ \widetilde{\psi}^* D U_m & 0 \end{pmatrix},$$
$$F(t,\varepsilon) = F_0(t,\varepsilon) + F_1(t,\varepsilon),$$
$$F_0(t,\varepsilon) = \begin{pmatrix} V^* H U_m S_m & 0 \\ 0 & (L\widetilde{\varphi}, \widetilde{\psi}) \end{pmatrix},$$
$$F_1(t,\varepsilon) =$$
$$= \begin{pmatrix} \varepsilon^{\frac{m+1}{p(n-p-1)}} V_m^* C_1 + \varepsilon V_m^*(H-D)U_m' & V_m^* L\widetilde{\varphi} \\ \varepsilon^{\frac{m+1}{p(n-p-1)}} \widetilde{\psi}^* C_1 + \varepsilon\widetilde{\psi}^*(H-D)U_m' & 0 \end{pmatrix},$$
$$l(v,t,\varepsilon) =$$
$$= P_1\left(C y_m - \varepsilon D\frac{dy_m}{dt} + \varepsilon g(Q_1 v + y_m, t, \varepsilon)\right).$$

Надалі припускатимемо виконання умов:
6)

$$d_{n-p,1}(t) = kt,\ k \in \mathbb{R},$$
$$|d_{n-p,i}(t)| + |d_{j1}(t)| = O(t^\alpha),\ \alpha > 1,$$
$$i = \overline{2,n};\ j = 1, 2, ..., n-p-1, n-p+1, ..., n,$$
$$||D^{-1}(t)\Big(C_1(t)\overline{y}_m(t) + C_1(0)\Pi_m y(t/\varepsilon) +$$
$$+ tC_1'(0)(\Pi_{m-1}y(t/\varepsilon) + \varepsilon\Pi_m y(t/\varepsilon)) -$$
$$-\varepsilon t D'(0)\Pi_m' y(t/\varepsilon) + r_m(\overline{y}_m(t,\varepsilon), t, \varepsilon) +$$
$$+ r_m(\Pi_m y(t,\varepsilon), t, \varepsilon)\Big) - \overline{y}\,'_m(t)|| = O(t),$$

$t \in [0; \varepsilon^4]$, де $d_{ij}(t)$ – компоненти матриці $D(t)$, $r_m(\overline{y}_m(t,\varepsilon),t,\varepsilon)$ та $r_m(\Pi_m y(t,\varepsilon),t,\varepsilon)$ – додаткові члени формул Тейлора за степенями ε для функцій

$$g(\overline{y}_m(t,\varepsilon),t,\varepsilon)$$

та

$$g(\overline{y}_m(\varepsilon\tau,\varepsilon)+\Pi_m y(\tau,\varepsilon),\varepsilon\tau,\varepsilon)- \\ -g(\overline{y}_m(\varepsilon\tau,\varepsilon),\varepsilon\tau,\varepsilon);$$

7) існує неперервна функція

$$\eta(t,\varepsilon),\ 0\le t\le T,\ 0\le\varepsilon\le\varepsilon_0$$

така, що

$$||f(\overline{z},t,\varepsilon)-f(\overline{\overline{z}},t,\varepsilon)|| \le \eta(t,\varepsilon)\,||\overline{z}-\overline{\overline{z}}||,$$

причому

$$\frac{\eta(t,\varepsilon)}{t\varepsilon^{5+\gamma}}=O(1)$$

для всіх $||\overline{z}|| \le a$, $||\overline{\overline{z}}|| \le a$ (число γ буде визначене пізніше);

8) $Re\,\dfrac{a_{n-p,1}(0)}{k\lambda_0(0)}<0$.

Нехай S – множина всіх неперервних n-вимірних вектор-функцій $v(t,\varepsilon)$ з нормою

$$\nu(v)=\sup_{t\in[0;T]}||v(t,\varepsilon)||.$$

Розглянемо клас функцій

$$S_0=\{v(t,\varepsilon)\in S: ||v(t,\varepsilon)||=O(\varepsilon^{m-3}t^2), \\ 0\le t\le\varepsilon^4,\ 0<\varepsilon\le\varepsilon_0\}.$$

Визначимо оператор A за формулою

$$Av=\begin{cases}\dfrac{1}{\varepsilon}\displaystyle\int_0^t V(t)V^{-1}(s)k(s,\varepsilon)ds,\ t\ne 0,\\ 0,\ t=0,\end{cases} \tag{18}$$

де

$$k(s,\varepsilon)= \\ =R^{-1}(s,\varepsilon)\left(-\varepsilon R_1(s,\varepsilon)V'(s)V^{-1}(s)v(s,\varepsilon)+\right. \\ \left.+F_1(s,\varepsilon)v(s,\varepsilon)+l(v(s,\varepsilon),s,\varepsilon)\right),$$

а $V(t)$ – фундаментальна матриця системи

$$\varepsilon R_0(t,\varepsilon)\frac{dv}{dt}=F_0(t,\varepsilon)v,$$

тобто

$$V(t)= \\ =\begin{pmatrix}\exp\left(\dfrac{1}{\varepsilon}\displaystyle\int_0^t S_m(\tau,\varepsilon)d\tau\right) & 0\\ 0 & p(t)t^{\frac{a_{n-p,1}(0)}{k\lambda_0(0)}}\end{pmatrix},$$

$p(0)=1$, [7, с. 39].

Нехай також:

9) сталі N_1 та N_2 такі, що

$$\left|\frac{p(t)}{p(s)}\right|\le N_1,\ 0\le s\le t\le\varepsilon^4,$$

$$|k_n^{(1)}(t,\varepsilon)|\le\frac{N_2}{t},\ |k_{nn}^{(2)}(t,\varepsilon)|\le\frac{N_2}{t},$$

$$|k_{nn}^{(3)}(t,\varepsilon)|\le\frac{N_2}{t},\ t\in(0;\varepsilon^4]$$

$k_n^{(1)}$, $k_{nn}^{(2)}$, $k_{nn}^{(3)}$ відповідні елементи вектора

$$k^{(1)}=[U_m,\widetilde{\varphi}]^{-1}D^{-1}L\widetilde{\varphi}$$

та матриць

$$K^{(2)}= \\ =[U_m,\widetilde{\varphi}]^{-1}D^{-1}([V_m,\widetilde{\psi}]^*)^{-1}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & (L\widetilde{\varphi},\widetilde{\psi})\end{pmatrix},$$

$$K^{(3)}=[U_m,\widetilde{\varphi}]^{-1}D^{-1}([V_m,\widetilde{\psi}]^*)^{-1}\times \\ \times\begin{pmatrix}-V_m^*(H-D)U_m & V_m^*D\widetilde{\varphi}\\ \widetilde{\psi}^*DU_m & 0\end{pmatrix}V'V^{-1},$$

причому

$$\left|N_1N_2\frac{k\lambda_0(0)}{a_{n-p,1}(0)}\right|\le d<1.$$

Тоді можна показати існування сталої $\varepsilon_1\le\varepsilon_0$, такої, що для всіх $0<\varepsilon\le\varepsilon_1$ оператор A відображає замкнену множину S_0 в S_0 і є оператором стискання [8, с. 44]. А тому існує єдина функція $v(t,\varepsilon)\in S_0$, така, що $Av=v$, причому $v(0,\varepsilon)=0$ і $v'(0,\varepsilon)=0$.

Оскільки система інтегральних рівнянь

$$v=\begin{cases}\dfrac{1}{\varepsilon}\displaystyle\int_0^t V(t)V^{-1}(s)k(s,\varepsilon)ds,\ t\ne 0,\\ 0,\ t=0\end{cases}$$

еквівалентна системі диференціальних рівнянь (17), то на відрізку $[0;\varepsilon^4]$ існує єдиний розв'язок $v(t,\varepsilon)$ системи (17), такий, що

$$v(0,\varepsilon)=0$$

і

$$||v(t,\varepsilon)||=O(\varepsilon^{m-3}t^2).$$

Розглянемо тепер задачу Коші

$$\varepsilon D(t)\frac{dz}{dt}=C(t,\varepsilon)z+\overline{h}(z,t,\varepsilon), \qquad (19)$$

$$z(\varepsilon^4,\varepsilon)=Q_1(\varepsilon^4,\varepsilon)v(\varepsilon^4,\varepsilon), \qquad (20)$$

де

$$\overline{h}(z,t,\varepsilon)=C(t,\varepsilon)y_m-\varepsilon D(t)\frac{dy_m}{dt}+$$
$$+\varepsilon g(z+y_m,t,\varepsilon)$$

на відрізку $[\varepsilon^4;t_0]$.

Число t_0 вважатимемо таким, що:

10) $\dfrac{1}{det\,D(t)}=O(\varepsilon^{-4}),\ t\in[\varepsilon^4;t_0]$.

Нехай $Z(t,\varepsilon)$ – фундаментальна матриця системи

$$\varepsilon D(t)\frac{dz}{dt}=C(t,\varepsilon)z$$

для якої

$$||Z(t,\varepsilon)Z^{-1}(s,\varepsilon)||=O(\varepsilon^{-\gamma}),\ \gamma\geq 0, \qquad (21)$$

$\varepsilon^4\leq s\leq t\leq t_0$.

Тоді існуватиме стала $\varepsilon_2\leq\varepsilon_1$, така, що оператор

$$Bz=Q_1(\varepsilon^4,\varepsilon)v(\varepsilon^4,\varepsilon)+$$
$$+\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{\varepsilon^4}^{t}Z(t,\varepsilon)Z^{-1}(s,\varepsilon)D^{-1}(s)\overline{h}(z,s,\varepsilon)ds$$

відображає замкнену множину

$$S_1=\{z(t,\varepsilon)\in S:||z(t,\varepsilon)||=O(\varepsilon^{m-5-\gamma}),$$
$$\varepsilon^4\leq t\leq t_0,\ 0<\varepsilon\leq\varepsilon_2\}$$

в S_1 і є оператором стискання.

Тому на відрізку $[\varepsilon^4;t_0]$ існує єдиний розв'язок задачі (19), (20), такий, що

$$||z(t,\varepsilon)||=O(\varepsilon^{m-5-\gamma}).$$

Таким чином правильна теорема.

Теорема. Нехай виконуються умови 1)–10), (9^i), $i=0,1,2,...,m$, (21). Тоді для

$$\frac{m+1}{p(n-p-1)}-1>0$$

і всіх $0<\varepsilon\leq\varepsilon_2$ на відрізку $[0;t_0]$ існує єдиний розв'язок $x(t,\varepsilon)$ задачі (2), (3) такий, що

$$||x(t,\varepsilon)-x_m(t,\varepsilon)||=O\left(\varepsilon^{m-5-\gamma}t^2\right),$$

де $x_m(t,\varepsilon)=Q(t)y_m(t,\varepsilon)$.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Самойленко А.М., Шкіль М.І., Яковець В.П.* Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженнями.— К.: Вища шк., 2000.— 294 с.
2. *Шкиль Н.И., Старун И.И., Яковец В.П.* Асимптотическое интегрирование линейных систем дифференциальных уравнений с вырождениями.— К.: Выща шк., 1991.— 207 с.
3. *Яковець В.П., Акименко А.М.* Про існування і асимптотику періодичного розв'язку виродженої сингулярно збуреної системи диференціальних рівнянь у випадку кратних елементарних дільників// Нелінійні коливання, 2002.— **5**, № 1.— С.123—141.
4. *Яковець В.П.* Асимптотичне інтегрування сингулярно збурених систем диференціальних рівнянь з виродженням: Автореф. дис. ... док. фіз.-мат. наук.— К., 1992.— 32 с.
5. *Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.* Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений.—- М.: Наука, 1973.— 272 с.
6. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц.—- М.: Наука, 1988.— 552 с.
7. *Вазов В.* Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений.— М.: Мир, 1968.— 464 с.
8. *Хейл Дж.* Колебания в нелинейных системах.— М.: Мир, 1966.— 230 с.

Стаття надійшла до редколегії 15.06.2005