УДК 517.98

©2005 р. В.П. Ратушняк

Коломийський економіко-правовий коледж від Київського національного торговельно-економічного університету, Коломия

ПСЕВДОДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ ОПЕРАТОРИ НЕСКІНЧЕННОГО ПОРЯДКУ ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ

У просторах узагальнених функцій типу розподілів встановлюється коректна розв'язність задачі Коші для одного класу еволюційних рівнянь з псевдодиференціальними операторами нескінченного порядку.

The correct solvability of the Cauchy problem is established on spaces of generalized functions of distribution type for one class of evolutionary equations with pseudodifferential operators of the infinite order.

У праці [1] розглядається еволюційне рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} + Au = 0, \quad (t, x) \in (0, T] \times \mathbf{R}^n \equiv \Omega, \quad (1)$$

де A — оператор, який трактується як звуження на $L_1(\mathbb{R}^n)$ оператора згортки спеціального вигляду, що діє у просторі $\Phi' \supset L_1(\mathbb{R}^n)$ — просторі, топологічно спряженому до простору Φ, елементами якого є нескінченно диференційовні на $\mathbb{R}^n$ функції поліноміального порядку спадання на нескінченності. Простір Φ визначається так, що класичний фундаментальний розв'язок G задачі Коші для рівняння (1) є елементом простору Φ при кожному $t > 0$. При цьому $A\varphi = F^{-1}[aF[\varphi]]$, $\forall\, \varphi \in \Phi$, де a — сталий негладкий у точці 0 символ, за яким будується оператор A, тобто на Φ оператор A збігається з псевдодиференціальним оператором (ПДО), а вказане рівняння відноситься до псевдодиференціальних рівнянь параболічного типу. У праці [2] знайдено умови, за яких у просторі Φ визначений і неперервний ПДО нескінченного порядку вигляду $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k A^k = F^{-1}[f(a)F]$, $f = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k x^k$, побудований за негладким у точці 0 символом.

Тут одержані в [2] результати використовуються для встановлення коректної розв'язності задачі Коші у просторі узагальнених функцій Φ' для еволюційних рівнянь із ПДО нескінченного порядку вигляду

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k A^k u = 0, \quad (t, x) \in \Omega.$$

1. Простори основних та узагальнених функцій. Нехай γ — фіксоване число з множини $(1, +\infty) \setminus \{2, 3, ...\}$, $\gamma_0 := 1 + [\gamma]$, $M(x) := 1 + |x|$, $x \in \mathbb{R}$. Елементами простору Φ_γ, за означенням, є нескінченно диференційовні на $\mathbb{R}$ функції φ, які задовольняють нерівності

$$|D_x^k \varphi(x)| \leq \frac{c_k}{(1 + |x|)^{\gamma_0 + k}}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad k \in \mathbb{Z}_+.$$

Надалі припускатимемо, що послідовність $\{c_k, k \in \mathbb{Z}_+\}$ задовольняє умову

$$\exists\, c > 0\ \exists\, A > 0\ \forall\, k \in \mathbb{Z}_+ : \ |c_k| \leq c A^k k^k.$$

У Φ_γ вводиться структура зліченно нормованого простору за допомогою норм:

$$\|\varphi\|_p := \sup_{x \in \mathbb{R}} \left\{ \sum_{k=0}^{p} M(x)^{\gamma_0 + k} |D_x^k \varphi(x)| \right\},$$

$$\varphi \in \Phi_\gamma, \quad p \in \mathbb{Z}_+.$$

Очевидно, що

$$\|\varphi_0\| \leq \|\varphi\|_1 \leq \|\varphi_2\| \leq ..., \quad \varphi \in \Phi_\gamma,$$

тобто ці норми є попарно зрівняними. Позначимо через Φ_p поповнення Φ_γ за рівномірною нормою. В [1] доведено, що Φ_γ — повний досконалий зліченно нормований простір, причому вкладення $\Phi_{p+1} \subset \Phi_p$ є неперервними, щільними і компактними.

Функції з простору Φ_γ абсолютно інтегровні на $\mathbb{R}$, тому на них визначена операція перетворення Фур'є F:

$$F[\varphi](\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(x) e^{ix\xi} dx, \quad \varphi \in \Phi_\gamma.$$

Символом Ψ_γ позначимо Фур'є-образ простору Φ_γ: $\Psi_\gamma = F[\Phi_\gamma]$. Очевидно, що кожна функція $F[\varphi]$, $\varphi \in \Phi_\gamma$, обмежена і неперервна на $\mathbb{R}$. Розглянемо основні властивості перетворення Фур'є функцій з простору Φ_γ, встановлені в [2].

Якщо $\varphi \in \Phi_\gamma$, то $F[\varphi] \in L_1(\mathbb{R})$; $F[\varphi]$ — нескінченно диференційовна на $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ функція; у функції $D_\xi^k[\varphi](\xi)$, $\xi \neq 0$, $k \in \mathbb{Z}_+$, існують скінченні односторонні границі $\lim\limits_{\xi \to \pm 0} D_\xi^k F[\varphi](\xi)$; кожна функція $F[\varphi]$ у точці 0 задовольняє умову Діні; перетворення Фур'є F відображає $\Phi_\gamma - \Psi_\gamma$ взаємнооднозначно і неперервно; $\xi^k F^{(m)}[\varphi] \in L_1(\mathbb{R})$, $\{k, m\} \subset \mathbb{Z}_+$, $k \geq m$; для функцій з простору Ψ_γ правильними є нерівності:

$$\forall \{k, m\} \subset \mathbb{Z}_+, k \geq m, \exists c_k > 0 \; \exists c_m > 0 :$$

$$\sup_{\xi \in \mathbb{R} \setminus \{0\}} |\xi^k F^{(m)}[\varphi](\xi)| \leq c_k c_m, \quad \varphi \in \Phi_\gamma, \quad (2)$$

де $c_k \leq c A^k k^k$ ($c, A > 0$; сталі c, A залежать лише від функції $F[\varphi]$).

Урахувавши (2), введемо в просторі Ψ_γ структуру зліченно нормованого простору, поклавши

$$\|\varphi\|_p := \sup_{\xi \in \mathbb{R} \setminus \{0\}} \left\{ \sum_{k=0}^{p} |\xi|^k |D_\xi^k \varphi(\xi)| \right\}, \Bigg\}$$

$$\varphi \in \Psi_\gamma, \quad p \in \mathbb{Z}_+.$$

Символом $\Phi_\gamma^{'}$ позначимо простір усіх лінійних неперервних функціоналів на Φ_γ зі слабкою збіжністю. Оскільки в основному просторі Φ_γ введена топологія проективної границі банахових просторів Φ_p, причому вкладення $\Phi_{p+1} \subset \Phi_p$, $p \in \mathbb{Z}_+$, неперервні, щільні та компактні, то (див. [1])

$$\Phi_\gamma^{'} = (\lim_{p \to \infty} \operatorname{pr} \Phi_p)' = \lim_{p \to \infty} \operatorname{ind} \Phi_p^{'},$$

при цьому слабка збіжність в $\Phi_\gamma^{'}$ збігається з сильною, оскільки Φ_γ — досконалий простір. Якщо $f \in \Phi_\gamma^{'}$, $\varphi \in \Phi_\gamma$, то існує згортка $f * \varphi$, яка визначається формулою

$$f * \varphi =< f, T_{-x} \check{\varphi}(\cdot) >, \quad \varphi \in \Phi_\gamma,$$

де T_{-x} — оператор зсуву аргументу в просторі Φ_γ, $\check{\varphi}(\xi) = \varphi(-\xi)$. Якщо $f * \varphi \in \Phi_\gamma$, $\forall \varphi \in \Phi_\gamma$, то функціонал $f \in \Phi_\gamma^{'}$ називається *згортувачем у просторі* $\Phi_\gamma^{'}$. Для згортувачів у просторі Φ_γ правильним є наступне твердження, доведене в [2]: *якщо* $f \in \Phi_\gamma^{'}$ *— згортувач у просторі* Φ_γ, *то* $F[f * \varphi] = F[f] \cdot F[\varphi]$ *для довільної функції* $\varphi \in \Phi_\gamma$.

2. Псевдодиференціальні оператори нескінченного порядку в просторі Φ_γ, побудовані за негладкими символами. Нехай $a : \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ неперервна однорідна порядку $\gamma \in (1, +\infty) \setminus \{2, 3, 4, ...\}$ функція, тобто $a(\lambda\xi) = \lambda^\gamma a(\xi)$, $\lambda > 0$, яка:

1) нескінченно диференційовна при $\xi \neq 0$;

2) похідні функції a задовольняють нерівності

$$\forall k \in \mathbb{N} \; \exists c_k > 0 \; \forall \xi \in \mathbb{R} \setminus \{0\} :$$

$$|a^{(k)}(\xi)| \leq c_k |\xi|^{\gamma - k},$$

причому послідовність $\{c_k, k \geq 1\}$ задовольняє умову:

$$\exists \tilde{c} > 0 \; \exists \tilde{A} > 0 \; \forall k \in \mathbb{N} : \; c_k \leq \tilde{c} \tilde{A}^k k^k;$$

3) існують сталі c_0, $\tilde{c}_0 > 0$, $\delta \geq \gamma$ такі, що

$$c_0 |\xi|^\gamma \leq a(\xi) \leq \tilde{c}_0 (1 + |\xi|^\delta), \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

Нехай $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$, $x \in \mathbb{R}$ — функція, яка допускає аналітичне продовження у всю комплексну площину і задовольняє умови:

А) $\exists d_0 > 0 \; \forall x \in \mathbb{R} : \; f(x) \geq d_0 |x|$;

Б) $\forall \alpha \in \mathbb{Z}_+ \; \exists p_\alpha \in \mathbb{N} \; \exists b_\alpha > 0 \; \forall \xi \in \mathbb{R}$: $|D_\xi^\alpha f(\xi)| \leq b_\alpha (1 + |\xi|)^{p_\alpha}$;

В) $\forall \varepsilon > 0\, \exists c_\varepsilon > 0\, \forall z = x + iy \in \mathbb{C}$: $|f(z)| \leq b_0 c_\varepsilon (1 + |\xi|)^{p_0} e^{\varepsilon |y|^{1/\delta}}$ (тут δ — стала з умови 3), p_0 — стала з умови Б).

Зазначимо, що з умови Б) випливає той факт, що функція f є мультиплікатором у просторі Φ_γ.

Говоритимемо, що в просторі Φ_γ задано псевдодиференціальний оператор нескінченного порядку $f(A) := \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n A^n$, якщо для довільної основної функції $\varphi \in \Phi_\gamma$ ряд

$$(f(A)\varphi)(x) := \sum_{n=0}^{\infty} c_n (A^n \varphi)(x),$$

$$A\varphi = F^{-1}[aF[\varphi]], \quad \varphi \in \Phi_\gamma,$$

зображає деяку основну функцію з простору Φ_γ. У праці [2] доведено таке твердження: *якщо функція f задовольняє умови Б), В), то в просторі Φ_γ визначений і є неперервним псевдодиференціальний оператор нескінченного порядку $f(A) \equiv A_f$, при цьому $A_f \varphi = F^{-1}[f(a)F[\varphi]]$, $\forall \varphi \in \Phi_\gamma$, тобто A_f — псевдодиференціальний оператор, побудований за символом $f(a)$.*

3. Задача Коші. Розглянемо рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} + A_f u = 0, \quad (t, x) \in (0, T] \times \mathbb{R} \equiv \Omega, \quad (3)$$

де A_f — псевдодиференціальний оператор, побудований за функціями a, f, які задовольняють відповідні умови, сформульовані у пункті 2.

Під розв'язком рівняння (3) розумітимемо функцію $u : (0, T] \to u(t, \cdot) \in \Phi_\gamma$, яка диференційовна по t і задовольняє рівняння (3).

Якщо для рівняння (3) задано початкову умову

$$u(t, \cdot)|_{t=0} = g, \quad (4)$$

де $g \in \Phi'_\gamma$, то під розв'язком задачі Коші (3), (4) розумітимемо розв'язок рівняння (3), який задовольняє початкову умову (4) у тому сенсі, що $u(t, \cdot) \to g$ при $t \to +0$ у просторі Φ'_γ, тобто

$$\forall \varphi \in \Phi_\gamma : < u(t, \cdot), \varphi > \to < g, \varphi >, \quad t \to +0.$$

Основною метою цього пункту є встановлення коректної розв'язності задачі Коші (3), (4) у випадку, коли початкові дані належать до простору Φ'_γ.

Лема 1. *Для похідних функції $\exp\{-tf(a(\xi))\}$, $\xi \neq 0$, правильними є оцінки:*

$$\left| \frac{d^s}{d\xi^s} \exp\{-tf(a(\xi))\} \right| \leq$$

$$\leq \beta t^s \exp\{-d_0 t |\xi|^\gamma\} |\xi|^{\omega - s}, s \in \mathbb{N},$$

де $t > 0$ — фіксований параметр, $\beta = \beta(s) > 0$, $d_0 > 0$ — стала, незалежна від t та s,

$$\omega = \begin{cases} \delta \tilde{p}_s s + s\gamma, & |\xi| \geq 1, \\ \gamma, & |\xi| < 1, \xi \neq 0, \end{cases}$$

$\delta p_s = \max\{p_1, ..., p_s\}$ ($p_1, ..., p_s$ — сталі з умови Б), яку задовольняє функція f).

Доведення. Для доведення твердження скористаємося формулою Фаа де Бруно диференціювання складеної функції

$$\frac{d^s}{d\xi^s} F(g(\xi)) =$$

$$= \sum_{m=1}^{s} \frac{d^m}{dg^m} F(g) \sum_{\substack{m_1 + ... + m_l = m \\ m_1 + 2m_2 + ... + l m_l = s}} \frac{s!}{m_1! ... m_l!} \times$$

$$\times \left(\frac{1}{1!} \frac{d}{d\xi} g(\xi) \right)^{m_1} ... \left(\frac{1}{l!} \frac{d^l}{d\xi^l} g(\xi) \right)^{m_l},$$

де покладемо $F = e^g$, $g = -tf(a(\xi))$. Тоді

$$\frac{d^s}{d\xi^s} e^{-tf(a(\xi))} =$$

$$= e^{-tf(a(\xi))} \sum_{m=1}^{s} \sum_{\substack{m_1 + ... + m_l = m \\ m_1 + 2m_2 + ... + l m_l = s}} \frac{s!}{m_1! ... m_l!} \times$$

$$\times (-t)^{m_1 + 2m_2 + ... + l m_l} \Lambda, \quad \xi \neq 0,$$

символом Λ тут позначено вираз

$$\Lambda := \left(\frac{d}{d\xi} f(a(\xi)) \right)^{m_1} \left(\frac{1}{2!} \frac{d^2}{d\xi^2} f(a(\xi)) \right)^{m_2} \times$$

$$\times ... \left(\frac{1}{l!}\frac{d^l}{d\xi^l}f(a(\xi))\right)^{m_l}.$$

Для відшукання похідних функції $f(a(\xi))$, $\xi \neq 0$, ще раз застосуємо формулу Фаа де Бруно. В результаті дістанемо наступні оцінки похідних функції $f(a)$:

$$\xi \neq 0: \left|\frac{d^j}{d\xi^j}f(a(\xi))\right| \leq$$

$$\leq j!(2e)^j \sum_{\alpha=1}^{j} b_\alpha(1+\tilde{c}_0|\xi|^\delta)^{p_\alpha}(\tilde{c}\tilde{A}e)^\alpha|\xi|^{\gamma\alpha-j} \leq$$

$$\leq \beta_j(1+\tilde{c}_0|\xi|^\delta)^{\tilde{p}_j}\sum_{\alpha=1}^{j}|\xi|^{\gamma\alpha-j},$$

$$\tilde{p}_j = \max\{p_1,...,p_j\}, \quad 1 \leq j \leq l,$$

де $\beta_j = j!(2e)^j\max\{\tilde{c}\tilde{A}e,...,(\tilde{c}\tilde{A}e)^j\}$. Врахувавши останні нерівності, а також те, що $\tilde{p}_j \leq \tilde{p}_l = \max\{p_1,...,p_l\}$, $1 \leq j \leq l$, знайдемо, що

$$\Lambda \leq (\beta_1(1+\tilde{c}_0|\xi|^\delta)^{\tilde{p}_l})^{m_1}\times$$
$$\times(\beta_2(1+\tilde{c}_0|\xi|^\delta)^{\tilde{p}_l})^{m_2}...(\beta_l(1+\tilde{c}_0|\xi|^\delta)^{\tilde{p}_l})^{m_l}\times$$
$$\times(|\xi|^{\gamma-1})^{m_1}\left(\sum_{\alpha=1}^{2}|\xi|^{\gamma\alpha-2}\right)^{m_2}\times$$
$$\times ... \times\left(\sum_{\alpha=1}^{l}|\xi|^{\gamma\alpha-l}\right)^{m_l} \leq$$
$$\leq \beta_1^{m_1}...\beta_l^{m_l}(1+\tilde{c}_0|\xi|^\delta)^{\tilde{p}_l(m_1+...+m_n)}\times$$
$$\times|\xi|^{(\gamma-1)m_1}(|\xi|^{\gamma-2}+|\xi|^{2\gamma-2})^{m_2}\times$$
$$\times(|\xi|^{\gamma-3}+|\xi|^{2\gamma-3}+|\xi|^{3\gamma-3})^{m_3}...(|\xi|^{\gamma-l}+$$
$$+|\xi|^{2\gamma-l}+...+|\xi|^{l\gamma-l})^{m_l} \leq \tilde{\beta}_l^m(1+\tilde{c}_0|\xi|^\delta)^{\tilde{p}_s^m}\times$$
$$\times(|\xi|^{\gamma m_1}(|\xi|^\gamma+|\xi|^{2\gamma})^{m_2}...(|\xi|^\gamma+|\xi|^{2\gamma})^{m_2}+$$
$$+...+|\xi|^{l\gamma})^{m_l})(|\xi|^{m_1+2m_2+...+lm_l})^{-1},$$

де $\tilde{\beta}_l = \max\{\beta_1,...,\beta_l\}$, $\tilde{p}_l \leq \tilde{p}_s = \max\{p_1,...,p_s\}$. Зазначимо також, що

$$\tilde{\beta}_l \leq \beta_0 B_0^s s^s, \quad \beta_0 > 0, \quad B_0 > 0, \quad \forall\, l.$$

Далі здійснимо оцінку Λ за умови $|\xi| \geq 1$ та $|\xi| < 1$.

а) Нехай $|\xi| < 1$, $\xi \neq 0$. Тоді

$$\Lambda \leq \beta_0 B_0^s s^s(1+\tilde{c}_0)^{\tilde{p}_s m}2^{m_2}3^{m_3}...l^{m_l}\times$$
$$\times\frac{|\xi|^{m_1\gamma}|\xi|^{m_2\gamma}...|\xi|^{m_l\gamma}}{|\xi|^s} \leq$$
$$\leq \beta_0\tilde{B}_0^s s^s l^{m_1+...+m_l}|\xi|^{\gamma(m_1+...+m_l)-s} \leq$$
$$\leq \beta_0\tilde{B}_0^s s^s s^m|\xi|^{\gamma m-s} \leq$$
$$\leq \beta_0\tilde{B}_0^s s^s s^s|\xi|^{\gamma m-s}, \quad \tilde{B}_0 = B_0(1+\tilde{c}_0)^{\tilde{p}_s}.$$

Отже, для $\xi \neq 0$, $|\xi| < 1$ справджується нерівність

$$\Lambda \leq \tilde{\tilde{\beta}}_1|\xi|^{\gamma m-s}, \quad \tilde{\tilde{\beta}}_1 = \tilde{\tilde{\beta}}_1(s) > 0. \qquad (5)$$

На підставі одержаних оцінок та умов, які задовольняють функції f та a стверджуємо, що якщо $\xi \neq 0$ і $|\xi| < 1$, то

$$\left|\frac{d^s}{d\xi^s}e^{-tf(a(\xi))}\right| \leq t^s e^{-tf(a(\xi))}\beta^*(s)\sum_{m=1}^{s}|\xi|^{\gamma m-s} \leq$$
$$\leq \beta^*(s)t^s e^{-d_0 t|a(\xi)|}s|\xi|^{\gamma-s} \leq$$
$$\leq \beta_1^*(s)t^s e^{-\tilde{d}_0 t|\xi|^\gamma}|\xi|^{\gamma-s},$$
$$\beta_1^*(s) = s\beta^*(s), \quad \tilde{d}_0 = d_0 c_0.$$

Якщо ж $|\xi| \geq 1$, то з урахуванням (5)

$$\left|\frac{d^s}{d\xi^s}e^{-tf(a(\xi))}\right| \leq \beta_2^*(s)t^s e^{-\tilde{d}_0 t|\xi|^\gamma}|\xi|^{\delta\tilde{p}_s s+s(\gamma-1)}.$$

Об'єднуючи ці нерівності в одну, прийдемо до оцінок:

$$\left|\frac{d^s}{d\xi^s}e^{-tf(a(\xi))}\right| \leq \beta(s)t^s e^{-d_0 t|\xi|^\gamma}|\xi|^{\omega-s}, \quad \xi \neq 0,$$

де

$$\omega = \begin{cases} \delta\tilde{p}_s s + s\gamma, & |\xi| \geq 1, \\ \gamma, & |\xi| < 1, \xi \neq 0. \end{cases}$$

Лема доведена.

Зауваження 1. *Із наведеного твердження випливає, що функція* $Q(t,\xi) := \exp\{-tf(a(\xi))\}$ *як функція* ξ *при кожному* $t > 0$ *є елементом простору* Ψ_γ.

Уведемо позначення:

$$G(t,x)=(2\pi)^{-1}\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-tf(a(\xi))-ix\xi}d\xi \equiv$$
$$\equiv F^{-1}[e^{-tf(a(\xi))}].$$

Із зауваження 1 випливає, що при кожному $t>0$ функція $G(t,\cdot)$ як функція x є елементом простору $\Phi_\gamma = F^{-1}[\Psi_\gamma]$. Виділимо в оцінках функції G та її похідних (по x) залежність від параметра t.

Лема 2. *Для функції G та її похідних правильними є оцінки:*

$$|G(t,x)|\le ct^{-(\delta\tilde p_0+\gamma)(1+[\gamma])/\gamma}(1+|x|)^{-(1+[\gamma])},$$
$$c>0,\quad 0<t\le 1,$$
$$\tilde p_0=\max\{p_1,...,p_{1+[\gamma]}\},\quad x\in\mathbb{R},$$
$$|D_x^k G(t,x)|\le$$
$$\le c_k t^{-(\delta\tilde p_k+\gamma)(1+[\gamma]+k)/\gamma}(1+|x|)^{-(1+[\gamma]+k)},$$
$$0<t\le 1,\quad c_k>0,\quad x\in\mathbb{R},$$
$$\tilde p_k=\max\{p_1,p_2,...,p_{1+[\gamma]+k}\},\quad k\in\mathbb{N}$$

(тут $p_1,p_2,\ldots$ — сталі з умови Б), яку задовольняє функція f).

Лема 3. *Функція $G(t,\cdot)$ як абстрактна функція параметра t із значеннями у просторі Φ_γ, диференційовна по t.*

Доведення. Необхідно довести, що граничне співвідношення

$$\Phi_{\Delta t}(x):=$$
$$:=\frac{G(t+\Delta t,x)-G(t,x)}{\Delta t}\underset{\Delta t\to 0}{\to}\frac{\partial}{\partial t}G(t,x)$$

виконується у розумінні збіжності у просторі Φ_γ, тобто:

1) $\forall m\in\mathbb{Z}_+$ $D_x^m\Phi_{\Delta t}\rightrightarrows D_x^m\left(\frac{\partial}{\partial t}G(t,\cdot)\right)$, $\Delta t\to+0$, на кожному відрізку $[a,b]\subset\mathbb{R}$;

2) $\forall p\in\mathbb{Z}_+\ \exists c_p>0:\ \|\Phi_{\Delta t}\|_p\le c_p$, де стала c_p не залежить від Δt.

Функція G диференційовна по t у звичайному розумінні, тому $\Phi_{\Delta t}(x)=G_t'(t+\theta\Delta t,x)$, $0<\theta<1$. Отже,

$$D_x^m\Phi_{\Delta t}(x)=-(2\pi)^{-1}\int\limits_{\mathbb{R}}(-i\xi)^m f(a(\xi))\times$$
$$\times e^{-(t+\theta\Delta t)f(a(\xi))-ix\xi}d\xi,\quad m\in\mathbb{Z}_+,$$

а

$$D_x^m\left(\frac{\partial}{\partial t}G(t,x)\right)=-(2\pi)^{-1}\int\limits_{\mathbb{R}}(-i\xi)^m f(a(\xi))\times$$
$$\times e^{-tf(a(\xi))-ix\xi}d\xi,\quad m\in\mathbb{Z}_+.$$

Тоді

$$|D_x^m\left(\Phi_{\Delta t}(x)-\frac{\partial}{\partial t}G(t,x)\right)|\le$$
$$\le(2\pi)^{-1}\int\limits_{\mathbb{R}}|\xi|^m|f(a(\xi))|\times$$
$$\times e^{-tf(a(\xi))}|e^{-\theta\Delta t f(a(\xi))}-1|d\xi\le$$
$$\le c\theta^2\Delta t\int\limits_{\mathbb{R}}|\xi|^m(f(a(\xi)))^2e^{-tf(a(\xi))}d\xi\le c_{t,m}\Delta t$$

(збіжність останнього інтеграла випливає з умов, які задовольняють функції f та a). Звідси вже дістаємо, що

$$D_x^m\Phi_{\Delta t}\to D_x^m\left(\frac{\partial}{\partial t}G(t,\cdot)\right),\quad \Delta t\to+0$$

рівномірно по $x\in[a,b]\subset\mathbb{R}$, що й потрібно було довести.

Доведемо, що умова 2) також виконується. Для цього, передусім, здійснимо оцінки похідних (по x) функції $\Phi_{\Delta t}$. Отже,

$$D_x^m\Phi_{\Delta t}(x)=D_x^m\left(\frac{\partial}{\partial t}G(t+\theta\Delta t,x)\right)=$$
$$=-(2\pi)^{-1}D_x^m\times$$
$$\times\left(\int\limits_{\mathbb{R}}f(a(\xi))e^{-(t+\theta\Delta t)f(a(\xi))-ix\xi}d\xi\right)=$$
$$=-(2\pi)^{-1}(-i)^m\times$$
$$\times\int\limits_{\mathbb{R}}\xi^m f(a(\xi))e^{-(t+\theta\Delta t)f(a(\xi))-ix\xi}d\xi.$$

Якщо $x\ne 0$, $\xi\ne 0$, то інтегруючи $s=1+[\gamma]+m$ разів частинами знайдемо, що

$$|D_x^m\Phi_{\Delta t}(x)|=$$

$$= \frac{c}{|x|^s}\left| D_\xi^s(\xi^m f(a(\xi))e^{-(t+\theta\Delta t)f(a(\xi))})e^{-ix\xi}d\xi \right|.$$

Отже,

$$|D_x^m \Phi_{\Delta t}(x)| \leq$$

$$\leq \frac{c}{|x|^s}\int\limits_{\mathbb{R}} \left| D_\xi^s(\xi^m f(a(\xi))e^{-(t+\theta\Delta t)f(a(\xi))}) \right| d\xi \leq$$

$$\leq \frac{c}{|x|^s}\sum_{k=0}^{s} C_k^s \int\limits_{\mathbb{R}} |D_\xi^k(\xi^m f(a(\xi))| \times$$

$$\times |D_\xi^{s-k} e^{-(t+\theta\Delta t)f(a(\xi))})| d\xi \leq$$

$$\leq \frac{c}{|x|^s}\sum_{k=0}^{s} C_k^s \beta_{s-k}(t+\theta\Delta t)^{s-k} \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-d_0 t|\xi|^\gamma} \times$$

$$\times |\xi|^{\omega-(s-k)} |D_\xi^k(\xi^m f(a(\xi))| d\xi,$$

при цьому

$$|D_\xi^k(\xi^m f(a(\xi)))| \leq$$

$$\leq |\xi^m D_\xi^k f(a(\xi))| + mk|\xi^{m-1}D_\xi^{k-1}f(a(\xi))| +$$

$$+\frac{1}{2!}m(m-1)k(k-1)|\xi^{m-2}D_\xi^{k-2}f(a(\xi))| +$$

$$+ ... + m(m-1)...(m-k)|\xi^{m-k}f(a(\xi))|.$$

Якщо $|\xi| < 1$, то

$$|D_\xi^{k-j} f(a(\xi))| \leq \alpha_{k-j}|\xi|^{-(k-j)}, \quad 0 \leq j \leq k,$$

а при $\omega = \gamma$ (див. лему 1)

$$|\xi|^{\omega-(s-k)}|\xi|^{m-j}|D_\xi^{k-j}f(a(\xi))| \leq$$

$$\leq \alpha_{k-j}|\xi|^{\gamma-s+k-m-j-k+j} =$$

$$= \alpha_{k-j}|\xi|^{\gamma-s+m}, \quad 0 \leq j \leq k, \quad 0 \leq k \leq s.$$

Якщо $s = 1 + [\gamma] + m$, то у околі точки $\xi = 0$ підінтегральна функція у кожному доданку вигляду

$$\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-d_0 t|\xi|^\gamma}|\xi|^{\omega-(s-k)}|\xi|^{m-j}|D_\xi^{k-j}f(a(\xi))|d\xi,$$

$$0 \leq j \leq k, \quad 0 \leq k \leq s,$$

еквівалентна функції $|\xi|^{-(s-\gamma-m)} = |\xi|^{-(1+[\gamma]-\gamma)}$, де $0 < 1 + [\gamma] - \gamma < 1$, тобто всі такі невласні інтеграли з особливою точкою $\xi = 0$ є збіжними. Збіжність цих інтегралів на нескінченності забезпечується тим, що функція $f(a)$ разом з усіма своїми похідними на нескінченності має лише поліноміальний порядок зростання. Вважаючи, що $\Delta t \leq 1$, прийдемо до нерівностей:

$$|D_x^m \Phi_{\Delta t}(x)| \leq \frac{c_m}{(1+|x|)^{1+[\gamma]+m}} \equiv$$

$$\equiv c_m M(x)^{-(\gamma_0+m)},$$

де $c_m = c_m(t,\gamma)$ не залежить від Δt та x. Тоді для довільно фіксованого $p \in \mathbb{Z}_+$ та $\Delta t \in (0,1]$ маємо, що

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}\left\{ \sum_{m=0}^{p} M(x)^{\gamma_0+m}|D_x^m \Phi_{\Delta t}(x)| \right\} \leq c_p,$$

де $c = c(p,t,\gamma_0)$ і c не залежить від Δt. Іншими словами,

$$\forall\, p \in \mathbb{Z}_+ \ \exists\, c_p > 0: \ \|\Phi_{\Delta t}\| \leq c_p.$$

Лема доведена.

Наслідок 1. *Правильною є формула*

$$\frac{\partial}{\partial t}(g * G)(t,\cdot) = \left(g * \frac{\partial}{\partial t} G \right)(t,\cdot),$$

$$\forall\, g \in \Phi_\gamma', \quad t \in (0,T].$$

Наслідок 2. *Нехай узагальнена функція $g \in \Phi_\gamma'$ — згортувач у просторі Φ_γ,*

$$\omega(t,x) = (g * G)(t,x), \quad (t,x) \in (0,T] \times \mathbb{R}.$$

Тоді граничне співвідношення $\omega(t,\cdot) \to g$, $t \to +0$, виконується у просторі Φ_γ'.

Символом $\Phi_{\gamma,*}'$ позначимо сукупність усіх узагальнених функцій з простору Φ_γ', які є згортувачами у просторі Φ_γ. Нехай $g \in \Phi_{\gamma,*}'$. Тоді

$$F[(g * G)(t,x)](\xi) = F[g](\xi)F[G(t,x)](\xi) =$$

$$= F[g](\xi)Q(t,x ß),$$

$$A_f\omega(t,x) = F^{-1}[f(a(\xi))F[(g{*}G)(t,x)](\xi)](x) =$$

$$= F^{-1}[f(a(\xi))Q(t,\xi)F[g](\xi)](x) =$$

$$= -F^{-1}\left[\frac{\partial}{\partial t}Q(t,\xi)F[g](\xi) \right](x) =$$

$$= -F^{-1}\left[F\left[\frac{\partial}{\partial t}G(t,x)\right](\xi)F[g](\xi)\right](x) =$$

$$= -F^{-1}\left[F\left[\left(g * \frac{\partial}{\partial t}G\right)(t,x)\right](\xi)\right](x) =$$

$$= -\left(g * \frac{\partial}{\partial t}G\right)(t,x).$$

Звідси та з наслідку 1 випливає, що функція $\omega(t,x)$, $(t,x) \in \Omega$, задовольняє рівняння (3). З наслідку 2 випливає, що $\omega(t,\cdot) \to g$ при $t \to +0$ у просторі Φ'_γ, тобто $\omega(t,x) = (g * G)(t,x)$ — розв'язок задачі Коші (3), (4) з початковою умовою $g \in \Phi'_{\gamma,*}$.

Підсумуємо одержані результати у вигляді такого твердження.

Теорема. *Задача Коші (3), (4) коректно розв'язна в класі узагальнених функцій $\Phi'_{\gamma,*}$.*

Розв'язок подається у вигляді згортки:

$$u(t,x) = (g * G)(t,x), \quad g \in \Phi'_{\gamma,*}, \quad (t,x) \in \Omega.$$

Зазначимо, що наведені тут твердження правильні й у випадку n незалежних змінних.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Городецький В.В.* Граничні властивості гладких у шарі розв'язків рівнянь параболічного типу.— Чернівці: Рута, 1998.— 225 с.

2. *Городецький В.В., Ратушняк В.П.* Про один клас псевдодиференціальних операторів нескінченного порядку // Науковий вісник Чернівецького університету: Зб. наук. праць. Вип. 239. Математика.— Чернівці: Рута, 2005.— С.25—36.

Стаття надійшла до редколегії 11.05.2005