УДК 517.51

©2005 р. О.В. Равський

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, Львів

РОЗБИТТЯ ПІДМНОЖИН $\mathbb{R}^n$ НА ОДНОТИПНІ ЧАСТИНИ

У статті доведено, що кожна досконала G_δ підмножина дійсної прямої може бути розбита на n гомеоморфних частин; кожна відкрита підмножина $\mathbb{R}^m$ може бути розбита на n гомеоморфних частин, якщо $n \geq 2m+2$; жодна компактна опукла підмножина $\mathbb{R}^m$ не може бути розбита на дві конгруентні частини.

It is shown that every perfect G_δ subset of the real line can be parted onto n homeomorphic parts; every open subset of $\mathbb{R}^m$ can be parted onto n homeomorphic parts provided $n \geq 2m+2$; no compact convex subset of $\mathbb{R}^m$ can be parted onto two congruent parts.

Кажуть, що множина X розбита на частини X_s, де $s \in S$ для деякої множини індексів S, якщо сім'я $(X_s)_{s\in S}$ є неперетинною і $X = \bigcup\limits_{s\in S} X_s$. У цьому випадку ми пишемо $X = \bigsqcup\limits_{s\in S} X_s$. Проблема розбиття множини на однотипні підмножини розглядалася в працях [2, 3] та [5, 11] з різними підходами до поняття однотипної множини.

1. Розбиття на гомеоморфні множини. В.К. Маслюченко, В.В. Михайлюк і М.М. Попов у праці [5] довели, що невироджений відрізок числової прямої $\mathbb{R}$ може бути розбитий на дві подібні і гомеоморфні частини, і сформулювали ряд питань про існування розбиттів такого роду для більшої кількості частин. Відповіді на ці питання було дано в працях [2,10,11]. Зокрема, в [10] показано, що невироджений відрізок може бути розбитий на n гомеоморфних і подібних між собою частин.

Тут ми ставимо і частково розв'язуємо питання про розбиття довільної відкритої множини в просторі $\mathbb{R}^m$ на n гомеоморфних частин, а також досліджуємо питання про розбиття підмножин $\mathbb{R}^m$ на конгруентні частини.

Через $\mathbb{Q}$ та $\mathbb{P}$ позначимо множини раціональних та ірраціональних чисел з природними топологіями. Через $\mathbb{N}$ позначимо множину додатних цілих чисел. Будемо писати $X \sim Y$, якщо простори X та Y гомеоморфні.

Ми називаємо топологічний простір досконалим, якщо він не має ізольованих точок. Простір є *топологічно повним*, якщо він гомеоморфний повному метричному простору. Нехай $\mathcal{P}$ – топологічна властивість (наприклад, локальна компактність, σ-компактність, топологічна повнота). Простір називається *ніде не* $\mathcal{P}$, якщо у ньому не існує непорожньої відкритої множини з властивістю $\mathcal{P}$ [7, с.1]. Нам знадобляться такі характеризаційні теореми.

Теорема 1. (Александров-Урисон) [4,7.7] *Довільний польський нульвимірний ніде не локально компактний простір гомеоморфний простору* $\mathbb{P}$.

Теорема 2. (Серпінський) [7, theorem 1.9.6] *Довільний зліченний метричний досконалий простір гомеоморфний* $\mathbb{Q}$.

Теорема 3. (ван Міл) [8] *Довільний метричний сепарабельний нульвимірний ніде не σ-компактний ніде не топологічно повний простір, який є об'єднанням зліченної кількості своїх замкнених топологічно повних підпросторів гомеоморфний простору* $\mathbb{P} \times \mathbb{Q}$.

Лема 1. *Нехай Y – щільний підпростір гаусдорфового простору X такий, що доповнення $X \backslash Y$ теж щільне в X. Тоді простір Y ніде не локально компактний.*

Доведення. Нехай U – непорожня відкрита підмножина простору X така, що підпростір $U \cap Y$ локально компактний. Тоді $U \cap Y$ відкрита в $\overline{U \cap Y} = \overline{U}$ [1, теорема 3.3.9]. Тоді $U \cap Y$ відкрита в U, що неможливо, бо $U \backslash Y$ – щільна підмножина U.

Лема 2. *Довільна досконала G_δ підмножина дійсної прямої може бути розбита на дві множини A і B такі, що $A \sim \mathbb{P}$ і $B \sim \mathbb{Q}$.*

Доведення. Нехай X – досконала G_δ підмножина дійсної прямої. Нехай B – зліченна щільна підмножина X і $A = X \backslash B$. Оскільки B – зліченний метричний досконалий простір, то з теореми 2 випливає, що $B \sim \mathbb{Q}$. За лемою 1 простір A ніде не локально компактний. Тому з теореми 1 випливає, що $A \sim \mathbb{P}$.

Твердження 1. *Довільна досконала G_δ підмножина дійсної прямої може бути розбита на n гомеоморфних частин, якщо $n \geq 2$.*

Доведення. Нехай X є досконала G_δ підмножина дійсної прямої. Розглянемо наступні випадки.

1. Множина X опукла і $n = 2$. Якщо X є замкненим відрізком, то існування такого робиття було доведено в роботі [5]. Якщо X є відкритим інтервалом, то можнемо вважати, що $X = \mathbb{R}$. Приймемо $A = \bigcup_{i \in \mathbb{Z}} [2i; 2i+1)$ і $B = \bigcup_{i \in \mathbb{Z}} [2i+1; 2i+2)$. Тоді $X = A \cup B$ є розбиттям множини X на дві гомеоморфних частини. Якщо X є півінтервалом, то ми можемо вважати, що $X = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$. Приймемо $A = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} [2i-2; 2i-1)$ і $B = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} [2i-1; 2i)$. Тоді $X = A \cup B$ є розбиттям множини X на дві гомеоморфних частини.

2. Множина X не є опукла і $n = 2$. Отже, існує розбиття $X = X_1 \cup X_2$ на дві відкрито-замкнених досконалих G_δ множини. За лемою 2 для довільного i існує розбиття $X_i = A_i \cup B_i$ такі, що A_i гомеоморфна $\mathbb{P}$ і B_i гомеоморфна $\mathbb{Q}$. Приймемо $A = A_1 \cup B_2$ і $B = A_2 \cup B_1$. Тоді $X = A \cup B$ є розбиттям множини X на дві гомеоморфних частини.

3. Число $n \geq 3$. Виберемо точки $x_1, \ldots, x_{n-1}$ в $\mathbb{R}$ такі, що для довільних i та $\varepsilon > 0$ множини $X \cap (x_i - \varepsilon, x_i + \varepsilon)$ непорожні. Приймемо $X_1 = (-\infty; x_1)$, $X_n = [x_{n-1}; \infty)$ і $X_i = [x_i; x_{i+1})$ для $1 \leq i \leq n-2$. Тоді довільна множина X_i є досконалою G_δ підмножиною в $\mathbb{R}$. За лемою 2 для довільного i існує розбиття $X_i = A_i \cup B_i$ таке, що A_i гомеоморфна $\mathbb{P}$ і B_i гомеоморфна $\mathbb{Q}$. Приймемо $C_i = A_i \cup B_{i+1}$ для $1 \leq i \leq n-2$ і $C_n = A_n \cup B_1$. Тоді $X = \bigcup C_i$ є розбиттям множини X на n гомеоморфних частин.

Твердження 2. *Довільна відкрита підмножина простору $\mathbb{R}^m$ може бути розбита на n гомеоморфних частин, якщо $n \geq 2^{m+1} - 1$ або $m = 2$ та $n \geq 4$.*

Доведення. Для довільного цілого додатного k через A_k позначимо множину всіх точок $x \in \mathbb{R}^m$ таких, що всі координати точки $2^{k-1}x$ є цілими. Нехай $\mathcal{W}_k$ сім'я множин вигляду $\{x + [0; 2^{1-k})^m\}$, де $x \in A_k$. Точка x ми будемо називати вершиною множини $x + [0; 2^{1-k})^m$. Ми називаємо підмножини W_1 і W_2 простору $\mathbb{R}^m$ віддільними, якщо $\overline{W_1} \cap W_2 = \emptyset = \overline{W_2} \cap W_1$. Нам будемо потрібна наступна

Лема 3. *Нехай k – ціле додатне, x_1, x_2 є вершинами множин $W_1, W_2 \in \mathcal{W}_k$ відповідно. Якщо $x_2 \notin \overline{W_1}$ і $x_1 \notin \overline{W_2}$, то множини W_1 і W_2 є віддільними.*

Доведення. Припустимо протилежне. Без обмеження загальності можна вважати, що $k = 1$, $W_1 \neq W_2$ та існує точка $x \in \overline{W_1} \cap W_2$. Нехай i – довільний index, $1 \leq i \leq m$. Оскільки $x \in \overline{W_1}$, то $x_1^i \leq x^i \leq x_1^i + 1$, де x^i і x_1^i є i-тими координатами точок x і x_1 відповідно. Оскільки $x_2^i = [x^i]$, то $x_1^i \leq x_2^i \leq x_1^i + 1$. Оскільки ця умова має місце для довільного i, то $x_2 \in \overline{W_1}$.

З леми 3 випливає, що для довільного k і довільного $W \in \mathcal{W}_k$ сім'я $\{W' \in \mathcal{W}_k : W'$ і W невіддільні $\}$ має потужність рівну подвоєній кількості вершин m-вимірного куба мінус 1, тобто $2^{m+1} - 1 \leq n$.

Тепер визначимо за індукцією сім'ї $\mathcal{V}_k \subset \mathcal{W}_k$. Приймемо $\mathcal{V}_1 = \{W \in \mathcal{W}_1 : W \subset X\}$ і $\mathcal{V}_k = \{W \in \mathcal{W}_k : W \subset X \backslash \bigcup_{i=1}^{k-1} \bigcup \mathcal{V}_i\}$ для $k \geq 2$. Приймемо $\mathcal{V} = \bigcup \mathcal{V}_k$. За побудовою, $X = \bigcup \mathcal{V}$. Якщо сім'я $\mathcal{V}$ скінченна, тоді ми зсунемо початок координат на ірраціональну відстань уздовж однієї з координатних осей і повторивши побудову, отримаємо нескінченну сім'ю $\mathcal{V}$.

Тепер поставимо у відповідність кожному члену $V \in \mathcal{V}$ один з n кольорів так, щоб виконувалася наступна умова:

(*) довільні однокольорові множини $V, V' \in \mathcal{V}$ є віддільними.

Спочатку розглянемо випадок $n \geq 2^{m+1}-1$. Занумеруємо кожну з сімей $\mathcal{V}_k$ у довільному порядку. Тепер будемо зафарбовувати сім'ю $\mathcal{V}$, використовуючи не більш ніж n кольорів. Спочатку зафарбуємо всі члени сім'ї $\mathcal{V}_1$ у порядку нумерації, потім усі члени сім'ї $\mathcal{V}_2$ у порядку нумерації і так далі. Ми стверджуємо, що на кожному кроці цього процесу для члена $V \in \mathcal{V}$, що зафарбовується на даному кроці, існує не більш за $2^{m+1}-2 < n$ уже зафарбованих членів $W \in \mathcal{V}$ таких, що V і W є невіддільними. Справді, нехай $V \in \mathcal{V}_k$ для деякого k. Якщо W є вже зафарбованим, а W і V є невіддільними, то існує множина $W' \in \mathcal{W}_k$ така, що $W' \subset W$ і множини W' і V є невіддільними (бо сім'я $\mathcal{W}_k$ є неперетиною). Отже, ми можемо зафарбувати член V у колір, відмінний від кольорів уже зафарбованих невіддільнх від V членів сім'ї $\mathcal{V}$. Побудоване зафарбування задовольняє умові (*).

Нехай тепер $m = 2$ та $n \geq 4$. Задамо граф G у такий спосіб. За множину вершин $V(G)$ графа G візьмемо множину *центрів* замикань елементів сім'ї $\mathcal{V}$. Нехай $V_1, V_2 \in \mathcal{V}$, а $c_1, c_2 \in V(G)$ є центрами квадратів $\overline{V_1}$ та $\overline{V_2}$ відповідно. Ми будемо вважати, що вершини c_1 і c_2 з'єднані ребром, тоді і лише тоді, коли множини V_1 і V_2 не є віддільними. В якості ребра будемо розглядати відрізок $[c_1, c_2]$ на площині. Неважко перевірити, що для з'єднаних ребром вершин маємо $[c_1; c_2] \subset V_1 \cup V_2$. Покажемо, що побудований граф G планарний. Нехай ребра $[c_1; c_2]$ та $[c_3; c_4]$ графа G перетинаються. Оскільки $[c_1, c_2] \subset V_1 \cup V_2$ та $[c_3; c_4] \subset V_3 \cup V_4$, а сім'я $\mathcal{V}$ є диз'юнктною, то $\{c_1, c_2\} \cap \{c_3, c_4\} \neq \emptyset$. Без обмеження загальності можна вважати що $c_1 = c_3$ та $c_2 \neq c_4$. Тоді c_1 є єдиною спільною точкою відрізків $[c_1; c_2]$ та $[c_3; c_4]$, бо у протилежному випадку один з цих відрізків містівся б у іншому, що б суперечило диз'юнктності сім'ї $\mathcal{V}$. Тому граф G є планарним. Оскільки $n \geq 4$, то вершини графа G можна зафарбувати в не більше ніж n кольорів так, що довільні дві однокольорові вершини не будуть з'єднані ребром. Звідси отримуємо розфарбування сім'ї $\mathcal{V}$ у не більше ніж n кольорів, яке задовольняє умові (*).

Для індекса i через $\mathcal{V}^i$ позначимо множину членів сім'ї $\mathcal{V}$, які зафарбовані у колір i. Оскільки сім'я $\mathcal{V}$ є нескінченною, то під час процесу зафарбування ми можемо легко забезпечити використання при зафарбуванні саме n кольорів та нескінченність сім'ї $\mathcal{V}^i$ для всіх $1 \leq i \leq n$.

Нехай $x \in X$. Оскільки множина X є відкритою в $\mathbb{R}^m$, то існує число k таке, що природний кубічний окіл точки x зі стороною 2^{-k} міститься в X. Тоді множина $\bigcup_{j=1}^{k+1} \bigcup \mathcal{V}_j$ є околом точки x, і оскільки кожна сім'я $\mathcal{V}_j$ є локально скінченна, то сім'я $\mathcal{V}$ є теж локально скінченною. З цього випливає, що сім'я $\mathcal{V}^i$ є локально скінченною для кожного i. Оскільки довільні два члени сім'ї $\mathcal{V}^i$ є віддільними, то довільний член $\mathcal{V}^i$ є відкритий в об'єднанні $\bigcup \mathcal{V}^i$. Отже, для кожного i, об'єднання $\bigcup \mathcal{V}^i$ є гомеоморфним простору $[0;1)^m \times \mathbb{N}$, що і дає шукане розбиття простору X на n гомеоморфних частин.

Використовуючи інший підхід, можна отримати розбиття на меншу кількість частин.

Через $\mathbb{R}^m_+$ позначимо множину точок простору $\mathbb{R}^m$, перша координата яких невід'ємна.

Лема 4. *Нехай X – непорожня відкрита підмножина простору $\mathbb{R}^m$, $m \geq 2$. Тоді існує розбиття $X = \bigsqcup_{i=0}^m X_i$, причому $X_0 \sim \mathbb{P}$, $X_i \sim \mathbb{P} \times \mathbb{Q}$ для $1 \leq i \leq m-1$ та $X_m \sim \mathbb{Q}$.*

Доведення. Нехай A – зліченна щільна підмножина $\mathbb{R}$ така, що множина $A^m \cap X$ щільна в X. Покладемо $\mathbb{R}_i = \{x \in \mathbb{R}_m :$ рівно i координат точки x належать $A\}$ та $X_i = X \cap \mathbb{R}_i$. Оскільки $\mathbb{R}_0 = (\mathbb{R} \backslash A)^m$ та $\mathbb{R}_m = A^m$, то простори $\mathbb{R}_0$ та $\mathbb{R}_m$ є нульвимірними.

Нехай тепер $1 \leq i \leq m-1$. Нехай $\mathbb{R}_i = \bigsqcup_{j \in \omega} \mathbb{R}_{ij}$ – природне розбиття простору $\mathbb{R}_i$ на зліченну кількість своєх замкнених підпросторів, кожен з яких є природно гомеоморфним до простору $(\mathbb{R}\backslash A)^{m-i}$, а отже є нульвимірним. За теоремою про зліченну суму [1, 7.2.1] простір $\mathbb{R}_i$ теж нульвимірний. Покладемо $X_{ij} = X \cap \mathbb{R}_{ij}$. Припустимо, що $X_{ij} \neq \emptyset$. Легко перевірити, що простір X_{ij} є досконалим. За теоремою 1 простір $\mathbb{R}_{ij} \cap \mathbb{R}^m_+$ є гомеоморфним до $\mathbb{P}$. Оскільки X_{ij} є відкритою підмножиною простору $\mathbb{R}_{ij} \cap \mathbb{R}^m_+$, то X_{ij} теж ніде не локально компактний простір. За теоремою 1, $X_{ij} \sim \mathbb{P}$. Тому X_{ij} ніде не σ-компактний. Оскільки простір X_i є об'єднанням своєх замкнених підмножин X_{ij}, то простір X_i теж ніде не компактний. Легко перевірити, що X_{ij} є ніде не щільним у X_i. Припустимо, що існує U – відкрита підмножина простору X_i, яка є топологічно повним простором. Тоді $U = \bigsqcup X_{ij} \cap U$ і тому за теоремою Бера існує простір X_{ij} який має непорожню внутрішність в U, а отже і в X_i, що неможливо. Отже, за теоремою 3 X_i є гомеоморфним до $\mathbb{P} \times \mathbb{Q}$.

Множина $\mathbb{R}_m \cap \mathbb{R}^m_+$ є зліченним досконалим метризовним простором і тому $\mathbb{R}_m \cap \mathbb{R}^m_+ \sim \mathbb{Q}$ за теоремою 2. Множина X_m є відкритою підмножиною $\mathbb{R}_m \cap \mathbb{R}^m_+$, і тому $X_m \sim \mathbb{Q}$ за цією ж теоремою. Аналогічно, використовуючи теорему 1 замість теореми 2, показується, що $X_0 \sim \mathbb{P}$.

Твердження 3. *Довільна відкрита непорожня підмножина X простору $\mathbb{R}^m$, $m \geq 2$ може бути розбита на n гомеоморфних частин, якщо $n \geq 2m+2$.*

Доведення. Достатньо довести, що X можна розбити на $2m+2$ частини, кожна з яких гомеоморфна до $\mathbb{P} \oplus (\mathbb{P} \times \mathbb{Q}) \oplus \mathbb{Q}$, бо простір $\mathbb{P} \oplus (\mathbb{P} \times \mathbb{Q}) \oplus \mathbb{Q}$ розбивається на дві частини, кожна з яких гомеоморфна цілому простору.

Нехай $\pi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ – проекція на першу координату. Покладемо $x_0 = -\infty$, $x_{2m+2} = +\infty$ і виберемо точки $x_1, \ldots, x_{2m+1}$ так, щоб множини $X_i = \pi^{-1}([x_{i-1}, x_i)) \cap X$ були непорожні для всіх $1 \leq i \leq 2m+2$. За лемою 4 існує розбиття $X_i = \bigsqcup_{j=0}^n X^i_j$, причому $X^i_0 \sim \mathbb{Q}$, $X^i_m \sim \mathbb{P}$ та $X^i_j \sim \mathbb{P} \times \mathbb{Q}$ для $1 \leq j \leq m-1$. Покладемо $X_i = \bigsqcup_{j=0}^m X^j_{\overline{i+j}}$, де

$$\overline{k} = \begin{cases} k, & k \leq 2m+2 \\ k-2m-2, & k > 2m+2. \end{cases}$$

Тоді $X_i = \mathbb{P} \oplus (\mathbb{P} \times \mathbb{Q}) \oplus \mathbb{Q}$ та $X = \bigsqcup X_i$ є розбиттям простору X.

На завершення наведемо приклади просторів, які не розбиваються на дві гомеоморфні частини.

Приклад 1. *Збіжна послідовність не може бути розбита на дві гомеоморфні частини.*

Приклад 2. *Існує щільна підмножина прямої, яка не може бути розбита на дві гомеоморфні частини.*

Доведення. Легко бачити, що існує рівно континуум трійок (G, G', f) де G, G' – незліченні G_δ-підмножини прямої $\mathbb{R}$, а $f : G \to G'$ – гомеоморфізм. Нехай $\{(G_\alpha, G'_\alpha, f_\alpha) : \alpha < \mathfrak{c}\}$ – множина всіх таких трійок. Побудуємо множину $\{a_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\} \subset \mathbb{R}$ за трансфінітною рекурсією наступним чином. Нехай $0 \leq \alpha < \mathfrak{c}$ і для всіх $\beta < \alpha$ точка a_β вже побудована. Покладемо $A_\alpha = \mathbb{Q} \cup \{a_\beta : \beta < \alpha\}$. У якості a_α виберемо довільну точку множини $G_\alpha \backslash \bigcup_{\beta \leq \alpha}(f_\beta(A_\alpha) \cup f_\beta^{-1}(A_\alpha))$. Це завжди можна зробити, оскільки G_α є польським простором і тому $|G_\alpha| = \mathfrak{c}$ [4, 6.5]. Покладемо $A = \mathbb{Q} \cup \{a_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\}$. Припустимо, що існує розбиття $A = A_1 \sqcup A_2$ і гомеоморфізм $f : A_1 \to A_2$. За теоремою Лаврентьєва [4, 3.9], існує продовження гомеоморфізму f до гомеоморфізма G_δ-підмножин прямої. Нехай це гомеоморфізм $f_\alpha : G_\alpha \to G'_\alpha$ для дєякого $\alpha < \mathfrak{c}$. Тому існує точка $a \in A$ така, що $f_\alpha(a_\alpha) = a$ або $f_\alpha(a) = a_\alpha$. Легко перевірити, що це неможливо за побудовою множини A.

2. Розбиття на конгруентні множини. Ми будемо називати підмножини X_1, X_2 метричного простору $(\mathbb{R}^m, d)$ конгруентними, якщо існує ізометрія $\varphi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ така, що $\varphi(X_1) = X_2$ (тут d є природньою метрикою простору $\mathbb{R}^m$). У цьому розділі будемо досліджувати, за яких умов підмножина простору $\mathbb{R}^m$ може бути розбитою на дві конгруентні частини. Основним результатом цієї частини є

Твердження 4. *Жодна компакна опукла підмножина простору $\mathbb{R}^m$, $m \geq 1$ не може бути розбитою на дві конгруетнтні частини.*

Навіть часткові випадки цього твердження неодноразово ставали об'єктом уваги математиків. У роботі [6] Ван дер Варден поставив питання про розбиття круга на дві конгруентні частини. Д. Пуппе довів це твердження для компактних опуклих підмножин площини, границя яких не містить відрізків. Г. Гадвігер та Г. Дебруннер у праці [3, с.51] довели твердження для всіх компактних опуклих підмножин площини. Ми дамо узагальнення їхнього доведення для багатовимірного випадку.

Доведення. Нехай X є компактною опуклою підмножиною простору $\mathbb{R}^m$ і існують ізометрія $\varphi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ та розбиття $X = X_1 \cup X_2$ такі, що $\varphi(X_1) = X_2$. Тоді існують ортогональна $m \times m$ матриця A і вектор $b \in \mathbb{R}^m$ такі, що $\varphi(x) = Ax + b$ для кожної точки $x \in \mathbb{R}^m$. Розглянемо такі випадки.

1. Існує точка $x_0 \in \mathbb{R}^m$ така, що $\varphi(x_0) = x_0$. Оскільки компакт X є опуклим, тоді існує єдина точка $x \in X$ така, що $d(x_0, X) = d(x_0, x)$, де d – природна відстань в просторі $\mathbb{R}^m$. Отже, $d(x_0, \varphi^{-1}(x)) = d(x_0, x) = d(x_0, \varphi(x))$. Припустимо, що $x \neq \varphi(x)$. Тоді також $x \neq \varphi^{-1}(x)$. Тоді $\varphi(x) \notin X$, бо у протилежному випадку $d((x + \varphi(x))/2, x_0) < d(X, x_0)$, що неможливо. Тому $x \notin X_1$. Можемо аналогічно показати, що $x \notin X_2$. Це протиріччя дає, що $x = \varphi(x) = \varphi^{-1}(x)$. Але тоді точка x не міститься в жодній з множин X_1 і X_2.

2. Існує інваріантна пряма $L \subset \mathbb{R}^m$, тобто пряма $L \subset \mathbb{R}^m$ така, що $\varphi(L) = L$. Приймемо $X_0 = \{x \in X : d(x, L) = d(X, L)\}$. Оскільки множина X є опуклим компактом, то множина X_0 є непорожнім відрізком. Для кожної точки $x \in X_0$ маємо $d(x, L) = d(\varphi(x), L)$. Крім того, X_0 є неперетинним об'єднанням множин $X_0 \cap X_1$ і $X_0 \cap X_2$ та $\varphi(X_0 \cap X_1) = X_0 \cap X_2$. Тому у цьому випадку достатньо показати, що шуканого розбиття не існує для $m = 1$. Припустимо, що розбиття існує для $m = 1$. З вже розглянутого випадку 1 випливає, що відображення φ не має фіксованої точки. Тоді існує число b таке, що $\varphi(x) = x + b$ для всіх $x \in \mathbb{R}$. Без обмеження загальності можна вважати, що $b > 0$ і $X = [0; 1]$. Тоді розбиття множини X визначається однозначно, крім того $X_1 = X \cap (\bigcup_{i \in \mathbb{N}} [(2i - 2)b; (2i - 1)b))$ і $X_2 = X \cap (\bigcup_{i \in \mathbb{N}} [(2i - 1)b; 2ib))$, що легко приводить до протиріччя.

Тепер покажемо, що один з випадків 1 або 2 завжди має місце. Оскільки матриця A є ортогональною, то її форма Жордана є діагональною, і тому $\mathrm{rang}(A - I) = \mathrm{rang}(A - I)^2$, де I – одинична матриця. Отже, існує точка $x \in \mathbb{R}^m$, $x \neq 0$ така, що $(A - I)^2 x + (A - I)b = 0$. Якщо $Ax + b = x$, то x є фіксованою точкою відображення φ. В іншому випадку приймемо $x_1 = Ax + b - x$. Розглянемо пряму $L = \{x + \lambda x_1 : \lambda \in \mathbb{R}^m\}$. Тоді $Ax_1 - x_1 = A(Ax + b - x) - Ax - b + x = A^2 x + Ab - 2Ax + x - b = (A - I)^2 x + (A - I)b = 0$. Для кожного дійсного числа λ маємо $A(x + \lambda x_1) + b - x = Ax + \lambda A x_1 + b - x = x_1 + \lambda A x_1 = (1 + \lambda) x_1$. Отже, $\varphi(L) \subset L$ і тому L є інваріантною прямою.

З цього твердження можемо сформулювати такі приклади і питання.

Приклад 3. Подібний приклад наведений також в книзі [3, с.52]. Існує центрально-симетрична обмежена підмножина X простору $\mathbb{R}^2$, котра містить свій центр симетрії і може бути розбитою на дві конгруентні частини. Нехай $\alpha \in \mathbb{R}$ – довільне число, таке, що α/π – ірраціональне. Приймемо $A = \{e^{\alpha i n} : n \in \mathbb{N}\}$ і $X = A \cup \{(1, 0)\} \cup ((1, 0) - A)$. Тоді точка $(1, 0)$ є центром симетрії множини X, і оскільки множини A та $A \cup \{(1, 0)\}$ є конгруентними, існує розбиття множини X на дві конгруентні частини.

Питання 1. *Чи існує центрально-симетрична компактна підмножина простору $\mathbb{R}^2$, котра містить свій центр симетрія і може бути розбитою на дві конгруентні частини?*

Приклад 4. Існує зв'язна компактна підмножина простору $\mathbb{R}^2$, котра може бути розбитою на дві конгруентні частини. Приймемо $X = \{x \in \mathbb{C} : |x| = 1\}$, $X_1 = \{x \in X : \mathrm{Re}(x) > 0\} \cup \{(1,0)\}$ і $X_1 = \{x \in X : \mathrm{Re}(x) < 0\} \cup \{(-1,0)\}$. Тоді $X = X_1 \cup X_2$ є розбиттям простору X на дві конгруентні частини.

Приклад 5. Існує компактна підмножина простору $\mathbb{R}^2$ зі зв'язним доповненням, котра може бути розбитою на дві конгруентні частини. Це об'єднання двох неперетинних конгруентних кругів.

Питання 2. *Чи існує зв'язна компактна підмножина простору $\mathbb{R}^2$ зі зв'язним доповненням, котра може бути розбитою на дві конгруентні частини?*

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Engelking R.* General topology. – Monografie Matematyczne, **60**. – Warsaw: Polish Scientific Publ., 1977.
2. *Гульчак В.В., Маслюченко В.К.* Неможливість розбиття відрізка на n схожих частин // Наук. вісн. Чернів. ун-ту., Вип. 134. Математика — Чернівці: Рута.— С.42—44.
3. *Хадвигер Г., Дебруннер Г.* Комбинаторная геометрия плоскости. — М.: Наука, 1965.
4. *Kechris A.* Classical Descriptive Set Theory. — Springer, 1995.
5. *Маслюченко В.К., Михайлюк В.В., Попов М.М.* Розбиття відрізка на однотипні частини // Наук. вісн. Чернів. ун-ту., Вип. 46. Математика — Чернівці: Рута.— С.88—94.
6. *Van der Waerden B. L.* Aufgabe 51. // Elemente Math., **4**, (1949) — P.18.
7. *van Mill J.* The Infinite-Dimensional Topology of Function Spaces. – North-Holland, Amsterdam, 2001.
8. *van Mill J.* Topological Characterizations of Separable Metrizable Zero-Dimensional Spaces // Hart K.P., Nagata J.I. and Vaughan J.E. (eds.) The encyclopedia of General Topology – North-Holland, Amsterdam, 2004. (to appear)
9. *Verbitsky O.* Structural properties of extremal asymmetric colorings. // Alg. i Discr. Math., **4** (2003), — P.92—117.
10. *Букатар С.М., Маслюченко В.К., Стиран В.С.* Розбиття відрізка на N подібних і гомеоморфних частин // Наук. записки Кіровоградського пед. ун-ту. – Кіровоград: КДПУ, 2002. – Вип. 43. – С. 12 - 15.
11. *Маслюченко В.К., Фісюк В.В.* До питання про розбиття відрізка на подібні частини // Міжнар. наук. конференція "Шості Боголюбовські читання". Тези доповідей. – Київ, 2003. – С. 141.

Стаття надійшла до редколегії 14.10.2005