УДК 517.956.4

©2005 р. Г.С. Пасічник, І.М. Черевко, В.Ф. Мельничук

Чернівецький національний університет ім. Юрія Федьковича, Чернівці

ВЕКТОР-ФУНКЦІЇ ГРІНА ДЕЯКИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ДЛЯ ПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ ІЗ ЗРОСТАЮЧИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ І ВИРОДЖЕННЯМ НА ПОЧАТКОВІЙ ПЛОЩИНІ

Знайдено явні вирази для фундаментального розв'язку задачі Коші та вектор-функцій Гріна крайових задач для одного параболічного рівняння другого порядку зі зростаючими при $|x| \to \infty$ коефіцієнтами та виродженням на початковій площині.

Expressions for the fundamental decision tasks Coshi and vector-founctsiy of the Grina regional tasks for one parabolic equations of the second order with growing at $|x| \to \infty$ by coefficients and degeneration on initial to the plane as found.

Однією з центральних проблем теорії лінійний параболічних крайових задач є детальне описання оператора, оберненого до оператора крайової задачі, в тому числі всебічне дослідження ядра цього оператора – матриці Гріна. На даний час є досить глибокі результати С.Д. Івасишена та С.Д.Ейдельмана про матрицю Гріна загальних параболічних крайових задач [1, 2], що застосуються дослідження властивостей матриці Гріна на скінченному інтервалі часу. Недостатньо вивчено питання впливу молодших членів в рівняннях і крайових умовах на цю поведінку, особливо у випадку, коли коефіцієнти рівняння можуть зростати при $|x| \to \infty$.

У статті знайдено вирази у явному вигляді для фундаментального розв'язку задачі Коші та компонент вектор-функцій Гріна крайових задач для спеціального рівняння, що виникає у теорії дифузійних процесів із значеннями на дійсній прямій, з виродженням на початкові площині. Ці результати узагальнюють відомі результати для рівняння Уленбека-Орштейна [3] і частково анонсовані в [4].

1. Нехай b – диференційовна на $[0, \infty)$ функція така, що $b(0) = 0$; B – первісна функції b, яка задовольняє умову $B(0) = 0$; $a \in \mathbb{R}$; α та β неперервні при $t \geq 0$, для яких $\alpha(t) > 0$, $\beta(t) > 0$ при $t > 0$, $\alpha(0)\beta(0) = 0$, причому β монотонно неспадна.

Розглянемо диференціальні вирази

$$L \equiv \alpha(t)\partial_t - \beta(t)\big(\partial_x^2 + 2b(x)\partial_x + \tfrac{d}{dx}b(x) + b^2(x) - \tfrac{x^2}{4} + \tfrac{1}{2}\big) - a\exp\{B(x) - \tfrac{x^2}{2}\},$$

$$L_0 \equiv \alpha(t)\partial_t - \beta(t)\left(\partial_x^2 + x\partial_x + 1\right) - a;$$

задачу Коші

$$Lu(t,x) = f(t,x), \quad t > \tau, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

$$u(t,x)\big|_{t=\tau} = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

де τ – фіксоване дійсне число, та крайові задачі

$$Lu(t,x) = f(t,x), \quad t > 0, \quad x > 0, \tag{3}$$

$$Mu(t,x)\big|_{x=0} = g(t), \quad t > 0, \tag{4}$$

$$u(t,x)\big|_{t=0} = \varphi(x), \quad x > 0, \tag{5}$$

де умова (4) збігається з однією з таких умов:

$$u(t,x)\big|_{x=0} = g(t), \quad t > 0, \tag{4_1}$$

або

$$\partial_x u(t,x)\big|_{x=0} = g(t), \quad t > 0. \tag{4_2}$$

За допомогою заміни

$$u(t,x) = \exp\big\{-B(x) + \tfrac{x^2}{4}\big\}v(t,x) \tag{6}$$

задачі (1), (2) та (3) – (5) зводяться відповідно до задач

$$L_0 v(t,x) = f^0(t,x), \quad t > \tau, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{7}$$

$$v(t,x)\big|_{t=0} = \varphi^0(x), \quad x \in \mathbb{R}, \tag{8}$$

та

$$L_0 v(t,x) = f^0(t,x), \quad t > 0, \quad x > 0, \tag{9}$$

$$Mv(t,x)\big|_{x=0} = g(t), \quad t > 0, \tag{10}$$

$$v(t,x)\big|_{t=0} = \varphi^0(x), \quad x > 0, \tag{11}$$

де умова (10) збігається з однією з таких умов:

$$v(t,x)\big|_{x=0} = g(t), \quad t > 0, \tag{10_1}$$

або
$$\partial_x v(t,x)\big|_{x=0} = g(t), \quad t>0, \qquad (10_2)$$
а
$$f^0(t,x) \equiv \exp\left\{B(x) - \tfrac{x^2}{4}\right\} f(t,x), \quad t>0, x>0,$$
$$\varphi^0(x) \equiv \exp\left\{B(x) - \tfrac{x^2}{4}\right\}\varphi(x), \quad x>0.$$

Задача $(3),(4_1),(5)$ називається задачею Діріхле, а $(3),(4_2),(5)$ – задачею Неймана.

Означення. *Вектор-функцією Гріна задачі* (3) – (5) *називається вектор-фунція* $\overrightarrow{G} = (G_0, G_1, G_2)$ *така, що для довільних досить гладких і фінітних функцій* f, φ, g *розв'язок задач* $(3)-(5)$ *зображується у вигляді*
$$u(t,x) = \int\limits_0^t \tfrac{\beta(\tau)}{\alpha(\tau)} d\tau \int\limits_0^\infty G_0(t,x;\tau,\xi) f(\tau,\xi) d\xi +$$
$$+ \int\limits_0^t G_1(t,x;\tau) g(\tau) \tfrac{\beta(\tau)}{\alpha(\tau)} d\tau + \int\limits_0^\infty G_2(t,x;\xi)\varphi(\xi) d\xi,$$
$$t>0, \quad x>0.$$

2. Розглянемо задачу Коші (1), (2) та задачу Коші (7), (8), де τ – фіксоване дійсне число; φ – задана функція, яку вважатимемо досить хорошою. Для цієї задачі визначимо фундаментальний розв'язок в явному вигляді.

Розв'язок задачі Коші (7), (8) шукатимемо у вигляді оберненого перетворення Фур'є від деякої функції ω, тобто
$$v(t,x) = \tfrac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{R}} e^{ix\sigma} \omega(t,\sigma) d\sigma,$$
$$t>\tau, \quad x \in \mathbb{R}. \qquad (12)$$

Вважаючи, що під знаком інтеграла можна проводити усі необхідні операції, підставимо (12) в (7) і (8). Відносно ω одержимо задачу Коші для лінійного неоднорідного диференціального рівняння з частинними похідними першого порядку
$$\alpha(t)\partial_t \omega(t,\sigma) + \beta(t)(\sigma^2 - \sigma\partial_\sigma)\omega(t,\sigma) -$$
$$-a\omega(t,\sigma) = 0, \quad t>\tau, \quad \sigma\in\mathbb{R},$$
$$\omega(t,\sigma)|_{t=\tau} = \psi(\sigma), \quad \sigma \in \mathbb{R},$$
де
$$\psi(\sigma) = \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-ix\sigma}\varphi^0(x) dx.$$

Маємо
$$\tfrac{dt}{\alpha(t)} = \tfrac{d\omega}{\omega(a-\beta(t)\sigma^2)} = \tfrac{d\sigma}{\beta(t)\sigma}.$$
З рівності
$$\tfrac{dt}{\alpha(t)} = \tfrac{d\sigma}{\beta(t)\sigma}$$
одержуємо
$$\tfrac{\beta(t)}{\alpha(t)} dt = \tfrac{d\sigma}{\sigma}.$$

Проінтегрувавши, маємо
$$B(t,\tau) = ln|\sigma| - ln|C_1|, \quad C_1 \in \mathbb{R}\backslash\{0\},$$
де
$$B(t,\tau) \equiv \int\limits_\tau^t \tfrac{\beta(\theta)}{\alpha(\theta)} d\theta.$$
Отже,
$$\sigma = C_1 e^{B(t,\tau)}, \quad C_1 \in \mathbb{R}\backslash\{0\}.$$
З рівності
$$\tfrac{d\omega}{\omega(a-\beta(t)\sigma^2)} = \tfrac{dt}{\alpha(t)}$$
маємо
$$\tfrac{d\omega}{\omega} = a\tfrac{dt}{\alpha(t)} - \tfrac{\beta(t)}{\alpha(t)}\sigma^2 dt.$$
Проінтегрувавши, одержимо
$$ln|\omega| = aA(t,\tau) - \int\limits_\tau^t \tfrac{\beta(\theta)}{\alpha(\theta)}\sigma^2 d\theta,$$
де
$$A(t,\tau) \equiv \int\limits_\tau^t \tfrac{d\theta}{\alpha(\theta)}$$
Врахувавши вираз для σ, одержуємо
$$ln|\omega| = aA(t,\tau) - \tfrac{\sigma^2}{2}\left(1 - e^{-2B(t,\tau)}\right).$$
Тоді з (12), застосувавши обернене перетворення Фур'є до ω, одержуємо
$$v(t,x) = \tfrac{1}{2\pi} e^{aA(t,\tau)} \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi^0(\xi) \left(\int\limits_{\mathbb{R}} \exp\left\{ ix\sigma - \right.\right.$$
$$\left.\left. \tfrac{\sigma^2}{2}\left(1 - e^{-2B(t,\tau)}\right) - -i\xi\sigma e^{B(t,\tau)} \right\} d\sigma \right) d\xi.$$
Оскільки
$$i\sigma\left(x - \xi e^{B(t,\tau)}\right) - \tfrac{\sigma^2}{2}\left(1 - e^{-2B(t,\tau)}\right) =$$
$$= -\left(\tfrac{\sigma}{\sqrt{2}}\sqrt{1 - e^{-2B(t,\tau)}} - i\tfrac{x - \xi e^{B(t,\tau)}}{\sqrt{2(1 - e^{-2B(t,\tau)})}}\right)^2 -$$
$$- \tfrac{\left(x - \xi e^{B(t,\tau)}\right)^2}{2(1 - e^{-2B(t,\tau)})},$$
звідки
$$\int\limits_{\mathbb{R}} \exp\left\{ - \left(\tfrac{\sigma}{\sqrt{2}}\sqrt{1 - e^{-2B(t,\tau)}} - \right.\right.$$
$$\left.\left. -i\tfrac{x - \xi e^{B(t,\tau)}}{\sqrt{2(1 - e^{-2B(t,\tau)})}} \right)^2 \right\} d\sigma =$$
$$= \tfrac{1}{\sqrt{1 - e^{-2B(t,\tau)}}} \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \tfrac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{1 - e^{-2B(t,\tau)}}},$$
то
$$v(t,x) = \tfrac{1}{\sqrt{2}\pi} e^{aA(t,\tau)} \tfrac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{1 - e^{-2B(t,\tau)}}} \times$$
$$\times \int\limits_{\mathbb{R}} \exp\left\{ - \tfrac{\left(x - \xi e^{B(t,\tau)}\right)^2}{2(1 - e^{-2B(t,\tau)})} \right\} \varphi^0(\xi) d\xi.$$

Одержали розв'язок задачі Коші (7), (8) у вигляді

$$v(t,x)=\int\limits_{\mathbb{R}} Z_0(t,x;\tau,\xi)\varphi^0(\xi)d\xi,$$
$$t>\tau,\quad x\in\mathbb{R}, \tag{13}$$
де
$$Z_0(t,x;\tau,\xi)=\frac{\mathrm{e}^{aA(t,\tau)}}{\sqrt{2\pi(1-\mathrm{e}^{-2B(t,\tau)})}}\times$$
$$\times\exp\left\{-\frac{(x-\mathrm{e}^{-B(t,\tau)}\xi)^2}{2(1-\mathrm{e}^{-2B(t,\tau)})}\right\},$$
$$t>\tau\geq 0,\quad \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}, \tag{14}$$
$$A(t,\tau)=\int\limits_{\tau}^{t}\frac{d\theta}{\alpha(\theta)},\quad B(t,\tau)=\int\limits_{\tau}^{t}\frac{\beta(\theta)}{\alpha(\theta)}d\theta.$$

Повернемось до рівняння (1). Згідно з формулою (6) для розв'язку задачі (1), (2) одержуємо формулу
$$u(t,x)=\int\limits_{\mathbb{R}} Z(t,x;\tau,\xi)\varphi(\xi)d\xi,$$
$$t>\tau,\quad x\in\mathbb{R}, \tag{15}$$
у якій
$$Z(t,z;\tau,\xi)=\exp\left\{-B(x)+B(\xi)+\frac{x^2-\xi^2}{4}\right\}\times$$
$$\times Z_0(t,x;\tau,\xi), t>\tau,\quad \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}. \tag{16}$$

Інтеграл (13) називають інтегралом Пуассона функції φ^0 для рівняння (7), а інтеграл (15) – інтегралом Пуассона функції φ для рівняння (1).

Розглянемо спряжений вираз до L
$$L^*\equiv-\partial_\tau-\frac{\beta(\tau)}{\alpha(\tau)}\left(\partial_\xi^2-2b(\xi)\partial_\xi+\left(\frac{1}{2}-\right.\right.$$
$$\left.\left.-\frac{\xi^2}{4}-b^2(\xi)-\frac{d}{d\xi}b(\xi)\right)\right)-a,$$
$$\tau<t,\quad \xi\in\mathbb{R}. \tag{16}$$
Розглянемо задачу Коші для спряженого рівняння
$$L^*u'=0,$$
$$u'(\tau,\xi)\Big|_{\tau=t}=\varphi'(\xi),\quad \xi\in\mathbb{R}.$$
Здійснивши заміну, аналогічну (6)
$$u'(\tau,\xi)=\exp\left\{B(\xi)-\frac{\xi^2}{4}\right\}v'(\tau,\xi),$$
$$\tau\leq t,\quad \xi\in\mathbb{R},$$
одержуємо задачу
$$-\partial_\tau v'(\tau,\xi)-\frac{\beta(\tau)}{\alpha(\tau)}\left(\partial_\xi^2-\xi\partial_\xi\right)v'(\tau,\xi)-$$
$$-av'(\tau,\xi)=0,\quad \tau<t,\quad \xi\in\mathbb{R}, \tag{17}$$
$$v'(\tau,\xi)\Big|_{\tau=t}=\psi'(\xi),\quad \xi\in\mathbb{R}. \tag{18}$$
де
$$\psi'(\xi)\varepsilon\equiv\exp\left\{-B(\xi)+\frac{\xi^2}{4}\right\}\varphi'(\xi).$$

Розв'язуючи задачу (17), (18) аналогічно до задачі (7), (8), одержуємо
$$v'(\tau,\xi)=\int\limits_{\mathbb{R}} Z_0^*(\tau,\xi;t,x)\psi'(x)dx,$$
$$\tau<t,\quad \xi\in\mathbb{R},$$
де
$$Z_0^*(\tau,\xi;t,x)=\frac{\mathrm{e}^{aA(\tau,t)}}{\sqrt{2\pi(1-\mathrm{e}^{-2B(\tau,t)})}}\times$$
$$\times\exp\left\{-\frac{(\xi-\mathrm{e}^{-B(\tau,t)}x)^2}{2(1-\mathrm{e}^{-2B(\tau,t)})}\right\},\quad \tau<t,\quad \{x,\xi\}\in\mathbb{R}.$$
Тоді
$$u'(\tau,\xi)=\int\limits_{\mathbb{R}} Z^*(\tau,\xi;t,x)\psi'(x)dx,\ \tau<t,\ \xi\in\mathbb{R},$$
де
$$Z^*(\tau,\xi;t,x)\equiv\exp\left\{-B(x)+B(\xi)+\frac{x^2-\xi^2}{4}\right\}\times$$
$$\times Z_0^*(\tau,\xi;t,x),\quad \tau<t,\quad \{x,\xi\}\in\mathbb{R}.$$

Із виразів для фундаментальних розв'язків Z, Z^*, Z_0 та Z_0^* випливає властивість нормальності
$$Z^*(\tau,\xi;t,x)\equiv Z(t,x;\tau,\xi),$$
$$Z_0^*(\tau,\xi;t,x)\equiv Z_0(t,x;\tau,\xi),$$
$$\tau<t,\quad \{x,\xi\}\in\mathbb{R}.$$

3. Розглянемо задачу Діріхле для рівняння
$$L_0^0u(t,x)=f^0(t,x),\quad x>0,\quad t>0, \tag{19}$$
де
$$L_0^0\equiv\alpha(t)\partial_t-\beta(t)\left(\partial_x^2+x\partial_x+1\right),$$
з початковою умовою (11) і першою крайовою умовою (10_1).

Припустимо спочатку, що початкова умова є нульовою, тобто
$$u\Big|_{t=0}=0. \tag{20}$$

Нехай g з умови (10_1) – неперервна та обмежена функція.

Розв'язок задачі (19), (20), (10_1) шукаємо у вигляді потенціалу подвійного шару
$$u(t,x)=\int\limits_0^t\partial_\xi Z_0^0(t,x;\tau,\xi)\Big|_{\xi=0}\mu(\tau)\frac{\beta(\tau)}{\alpha(\tau)}d\tau,$$
$$t>0,\quad x>0,\quad \xi>0, \tag{21}$$
де Z_0^0 – фундаментальний розв'язок задачі Коші для рівняння (19). Він визначається формулою
$$Z_0^0(t,x;\tau,\xi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi(1-\mathrm{e}^{-2B(t,\tau)})}}\times$$
$$\times\exp\left\{-\frac{(x-\mathrm{e}^{-B(t,\tau)}\xi)^2}{2(1-\mathrm{e}^{-2B(t,\tau)})}\right\},$$
$$t>\tau\geq 0,\quad x>0,\quad \xi>0, \tag{22}$$
а μ – невідома функція, яку вважатимемо неперервною і обмеженою.

Оскільки
$$\frac{\partial Z_0^0(t,x;\tau,\xi)}{\partial\xi}=\frac{1}{\sqrt{2\pi(1-\mathrm{e}^{-2B(t,\tau)})}}\times$$

$$\times \exp\left\{-\frac{(x-e^{-B(t,\tau)}\xi)^2}{2(1-e^{-2B(t,\tau)})}\right\} \frac{e^{-B(t,\tau)}(x-e^{-B(t,\tau)}\xi)}{1-e^{-2B(t,\tau)}},$$

то формула (21) перепишеться так:

$$u(t,x) = \frac{x}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^t \frac{e^{-B(t,\tau)}}{(1-e^{-2B(t,\tau)})^{3/2}} \times$$
$$\times \exp\left\{-\frac{x^2}{2(1-e^{-2B(t,\tau)})}\right\} \mu(\tau) \frac{\beta(\tau)}{\alpha(\tau)} d\tau,$$
$$t>0, \quad x>0, \quad \xi>0.$$

Підберемо функцію μ так, щоб (21) задовольняла умову (10_1). Для цього запишемо останній вираз у вигляді

$u(t,x) = M(t,x) + N(t,x)\mu(t), \quad t>0, x>0,$

де

$$M(t,x) = \frac{x}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^t \frac{e^{-B(t,\tau)}}{(1-e^{-2B(t,\tau)})^{3/2}} \times$$
$$\times \exp\left\{-\frac{x^2}{2(1-e^{-2B(t,\tau)})}\right\} [\mu(\tau)-\mu(t)] \frac{\beta(\tau)}{\alpha(\tau)} d\tau,$$
$$N(t,x) = \frac{x}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^t \frac{e^{-B(t,\tau)}}{(1-e^{-2B(t,\tau)})^{3/2}} \times$$
$$\times \exp\left\{-\frac{x^2}{2(1-e^{-2B(t,\tau)})}\right\} \frac{\beta(\tau)}{\alpha(\tau)} d\tau.$$

Здійснивши заміну $\frac{x}{\sqrt{2(1-e^{-2B(t,\tau)})}} = \gamma$, одержуємо

$$N(t,x) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^\infty \exp\{-\gamma^2\} \frac{\gamma}{\sqrt{2\gamma^2-x^2}} \chi_{[C(t,x),\infty)} d\gamma,$$

де χ_A – характеристична функція множини A, $C(t,x) \equiv \frac{x}{\sqrt{2(1-e^{-2B(t,0)})}}$. На підставі теореми Лебега про обмежену збіжність маємо

$$\lim_{x\to 0} N(t,x) = \frac{1}{2}. \tag{23}$$

Тепер доведемо, що

$$\lim_{x\to\infty} M(t,x) = 0 \tag{24}$$

для кожного фіксованого $t>0$. Нехай $\varepsilon>0$ задане. З неперервності функції μ випливає, що

$$\exists \eta>0 \quad \forall \tau \in (t-\eta, t]: \quad |\mu(\tau)-\mu(t)| < \frac{\varepsilon}{e^{B(\eta,0)}}.$$

Запишемо

$$M(t,x) = \frac{x}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^{t-\eta} \frac{e^{-B(t,\tau)}}{(1-e^{-2B(t,\tau)})^{3/2}} \times$$
$$\times \exp\left\{-\frac{x^2}{2(1-e^{-2B(t,\tau)})}\right\} [\mu(\tau)-\mu(t)] \frac{\beta(\tau)}{\alpha(\tau)} d\tau +$$
$$+ \frac{x}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{t-\eta}^t \frac{e^{-B(t,\tau)}}{(1-e^{-2B(t,\tau)})^{3/2}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2(1-e^{-2B(t,\tau)})}\right\} \times$$
$$\times [\mu(\tau)-\mu(t)] \frac{\beta(\tau)}{\alpha(\tau)} d\tau \equiv M_1(t,x) + M_2(t,x).$$

Враховуючи неперервність функції μ, маємо

$$|M_2(t,x)| \le \frac{\varepsilon}{2}.$$

З обмеженості функції μ випливає, що

$$\exists K>0 \quad \forall \tau \in (0, t-\eta): \quad |\mu(\tau)| \le K,$$

звідки

$$|M_1(t,x)| < \frac{2Ke^{B(0,t)}}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{C(t,x)}^{C(\eta,x)} \exp\{-\gamma^2\} d\gamma.$$

Підберемо таке $\delta>0$, щоб

$$\forall x \in (0,\delta): \quad \int\limits_{C(t,x)}^{C(\eta,x)} \exp\{-\gamma^2\} d\gamma \le \frac{\varepsilon\sqrt{\pi}}{4Ke^{B(t,0)}},$$

тоді одержуємо, що

$$\forall x \in (0,\delta): \quad |M_1(t,x) < \frac{\varepsilon}{2},$$

а, отже, справджується (24).

Враховуючи (10_1), (23), (24), одержуємо

$$\lim_{x\to 0} u(t,x) = g(t) = \frac{1}{2}\mu(t),$$

звідки

$$\mu(t) = 2g(t).$$

Отже, розв'язок задачі (19), (20), (10_1) визначається формулою

$$u(t,x) = 2\int\limits_0^t \partial_\xi Z_0(t,x;\tau,\xi)\Big|_{\xi=0} g(\tau) \frac{\beta(\tau)}{\alpha(\tau)} d\tau =$$
$$= \int\limits_0^t G_{11}^0(t,x;\tau) g(\tau) \frac{\beta(\tau)}{\alpha(\tau)} d\tau, \quad t>0, \quad x>0,$$

де

$$G_{11}^0(t,x;\tau) \equiv \frac{\sqrt{2}xe^{-B(t,\tau)}}{\sqrt{\pi}(1-e^{-2B(t,\tau)})^{3/2}} \times$$
$$\times \exp\left\{-\frac{x^2}{2(1-e^{-2B(t,\tau)})}\right\},$$
$$t>\tau\ge 0, \quad x>0. \tag{25}$$

Функція G_{11}^0 є ядром Пуассона задачі (19), (20), (10_1).

Розглянемо задачу (19), (10_1), (11). Однорідну функцію Гріна G_{01}^0 цієї задачі шукаємо у вигляді

$$G_{01}^0(t,x;\tau,\xi) = Z_0^0(t,x;\tau,\xi) - V(t,x;\tau,\xi),$$
$$t>\tau\ge 0 \quad x>0, \quad \xi>0, \tag{26}$$

де Z_0^0 – фундаментальний розв'язок задачі Коші для рівняння (19), а $V(t,x;\tau,\xi)$ при довільних фіксованих $\tau\ge 0$ і $\xi>0$ є розв'язком задачі

$$L_0^0 V = 0,$$
$$V\Big|_{t=\tau} = 0,$$
$$V(t,x;\tau,\xi)\big|_{x=0} = Z_0^0(t,x;\tau,\xi)\big|_{x=0}.$$

Використовуючи ядро Пуассона задачі (19), (10_1), (11), для V одержуємо вираз

$$V(t,x;\tau,\xi)=\int\limits_{\tau}^{t} G_{11}^0(t,x;\gamma)Z_0^0(\gamma,0;\tau,\xi)\tfrac{\beta(\gamma)}{\alpha(\gamma)}d\gamma,$$
$$t>\tau\geq 0,\quad x>0,\quad \xi>0.$$

Враховуючи (23) і (26), одержуємо

$$V(t,x;\tau,\xi)=\tfrac{x}{\pi}\int\limits_{\tau}^{t}\tfrac{\mathrm{e}^{-B(t,\gamma)}}{(1-\mathrm{e}^{-2B(t,\gamma)})^{3/2}(1-\mathrm{e}^{-2B(\gamma,\tau)})^{1/2}}\times$$
$$\times\exp\left\{-\tfrac{x^2}{2(1-\mathrm{e}^{-2B(t,\gamma)})}-\tfrac{\mathrm{e}^{-2B(\gamma,\tau)}\xi^2}{2(1-\mathrm{e}^{-2B(\gamma,\tau)})}\right\}\tfrac{\beta(\gamma)}{\alpha(\gamma)}d\gamma.$$

В останньому інтегралі, зробивши заміну змінних інтегрування та виконавши елементарні перетворення, одержуємо

$$V(t,x;\tau,\xi)=\tfrac{1}{\sqrt{2\pi(1-\mathrm{e}^{-2B(t,\tau)})}}\times$$
$$\times\exp\left\{-\tfrac{(x+\mathrm{e}^{-B(t,\tau)}\xi)^2}{2(1-\mathrm{e}^{-2B(t,\tau)})}\right\}.$$

Одержали такі формули для компонент вектор-функції Гріна $\overrightarrow{G_1^0}\equiv(G_{01}^0,G_{11}^0,G_{21}^0)$ задачі (26), (10_1), (11):

$$G_{01}^0(t,x;\tau,\xi)=\tfrac{1}{\sqrt{2\pi(1-\mathrm{e}^{-2B(t,\tau)})}}\times$$
$$\times\left[\exp\left\{-\tfrac{(x-\mathrm{e}^{-B(t,\tau)}\xi)^2}{2(1-\mathrm{e}^{-2B(t,\tau)})}\right\}-\right.$$
$$\left.-\exp\left\{-\tfrac{(x^2+\mathrm{e}^{-B(t,\tau)}\xi)^2}{2(1-\mathrm{e}^{-2B(t,\tau)})}\right\}\right],$$
$$t>\tau\geq 0,\quad x>0,\quad \xi>0; \qquad (27)$$

$$G_{11}^0(t,x;\tau)=\tfrac{\sqrt{2}x\mathrm{e}^{-B(t,\tau)}}{\sqrt{\pi}(1-\mathrm{e}^{-2B(t,\tau)})^{3/2}}\times$$
$$\times\exp\left\{-\tfrac{x^2}{2(1-\mathrm{e}^{-2B(t,\tau)})}\right\},\quad t>\tau\geq 0,\quad x>0;$$

$$G_{21}^0(t,x;\xi)=G_{01}^0(t,x;0,\xi)=\tfrac{1}{\sqrt{2\pi(1-\mathrm{e}^{-2B(t,0)})}}\times$$
$$\times\left[\exp\left\{-\tfrac{(x-\mathrm{e}^{-B(t,0)}\xi)^2}{2(1-\mathrm{e}^{-2B(t,0)})}\right\}-\right.$$
$$\left.-\exp\left\{-\tfrac{(x^2+\mathrm{e}^{-B(t,0)}\xi)^2}{2(1-\mathrm{e}^{-2B(t,0)})}\right\}\right],$$
$$t>0,\quad x>0,\quad \xi>0. \qquad (28)$$

За допомогою (6) одержуємо формули для компонент вектор-функції Гріна задачі Діріхле (3), (4_1), (5) з $a=0$:

$$G_{01}(t,x;\tau,\xi)=\exp\left\{-B(x)+\tfrac{x^2}{4}\right\}\times$$
$$\times G_{01}^0(t,x;\tau,\xi),\quad t>\tau\geq 0,\quad x>0,\quad \xi>0;$$
$$G_{11}(t,x;\tau)=\exp\left\{-B(x)+\tfrac{x^2}{4}\right\}G_{11}^0(t,x;\tau),$$
$$t>\tau\geq 0,\quad x>0;$$
$$G_{21}(t,x;\xi)=\exp\left\{-B(x)+\tfrac{x^2}{4}\right\}G_{21}^0(t,x;\xi),$$
$$t>0,\quad x>0,\quad \xi>0,$$

де G_{01}^0, G_{11}^0, G_{21}^0 визначаються формулами (27), (25) та (28) відповідно.

4. Розглянемо задачу Неймана (19), (25), (10_2) з нульовою початковою умовою.

Нехай g – неперервна та обмежена функція. Розв'язок цієї задачі шукатимемо у вигляді потенціалу простого шару

$$u(t,x)=\int\limits_0^t Z_0^0(t,x;\tau,0)\mu(\tau)\tfrac{\beta(\tau)}{\alpha(\tau)}d\tau,$$
$$t>0,\quad x>0, \qquad (29)$$

де Z_0^0 – фундаментальний розв'язок задачі Коші для рівняння (19) і визначається за формулою (22), а μ – невідома функція, яку припускатимемо неперервною й обмеженою.

Оскільки функція $Z_0^0(t,x;\tau,0)$ при $x>0$ і $t>\tau$ є розв'язком рівняння (19), то при $t>0$ і $x>0$ функція (29) для довільної обмеженої та неперервної функції μ є розв'язком цього рівняння, який задовольняє умову (20). Підберемо функцію μ так, щоб (29) задовольняла умову (10_2).

Для цього обчислимо при $x>0$ похідну

$$\partial_x u(t,x)=-\tfrac{x}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^t\tfrac{1}{\sqrt{2\pi(1-\mathrm{e}^{-2B(t,\tau)})}^3}\times$$
$$\times\exp\left\{-\tfrac{x^2}{2(1-\mathrm{e}^{-2B(t,\tau)})}\right\}\mu(\tau)\tfrac{\beta(\tau)}{\alpha(\tau)}d\tau\equiv$$
$$\equiv -Q(t,x)-R(t,x)\mu(t),$$

де

$$Q(t,x)\equiv\tfrac{x}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^t\tfrac{1}{(1-\mathrm{e}^{-2B(t,\tau)})^{3/2}}\times$$
$$\times\exp\left\{-\tfrac{x^2}{2(1-\mathrm{e}^{-2B(t,\tau)})}\right\}\tfrac{\beta(\tau)}{\alpha(\tau)}[\mu(\tau)-\mu(t)]d\tau,$$
$$R(t,x)\equiv\tfrac{x}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^t\tfrac{1}{(1-\mathrm{e}^{-2B(t,\tau)})^{3/2}}\times$$
$$\times\exp\left\{-\tfrac{x^2}{2(1-\mathrm{e}^{-2B(t,\tau)})}\right\}\tfrac{\beta(\tau)}{\alpha(\tau)}d\tau.$$

Аналогічно як для $N(t,x)$ та $M(t,x)$ з **3** одержуємо відповідно

$$\lim_{x\to 0}R(t,x)=\frac{1}{2}$$

та

$$\lim_{x\to 0}Q(t,x)=0.$$

Тоді

$$\lim_{x\to 0}\partial_x u(t,x)=g(t)=-\frac{1}{2}\mu(t),$$

звідки

$$\mu(t)=-2g(t).$$

Отже, розв'язок задачі (19),(20),(10_2) визначається формулою

$$u(t,x)=\int\limits_0^t Z_0^0(t,x;\tau,0)g(\tau)\tfrac{\beta(\tau)}{\alpha(\tau)}d\tau=$$

$$\int\limits_0^t G^0_{12}(t,x;\tau)g(\tau)\frac{\beta(\tau)}{\alpha(\tau)}d\tau, \quad t>0, \quad x>0,$$
де
$$G^0_{12}(t,x;\tau)\equiv -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi(1-\mathrm{e}^{-2B(t,\tau)})}}\times$$
$$\times\exp\left\{-\frac{x^2}{2(1-\mathrm{e}^{-2B(t,\tau)})}\right\},$$
$$t>\tau\ge 0, \quad x>0. \tag{30}$$
Функція G^0_{12} є ядром Пуассона задачі (19), (20), (10_2).

Знайдемо однорідну функцію Гріна задачі (19), (10_2), (11). Вона шукається у вигляді (26), де $Z^0_0(\gamma,y;\tau,\xi)$ визначається формулою (22), а $V(\cdot,\cdot;t,x)$ при довільних фіксованих t і x є розв'язком задачі
$$L^0_0 V=0,$$
$$V\Big|_{\tau=t}=0,$$
$$\partial_\xi V(\tau,\xi;t,x)\Big|_{\xi=0}=\partial_\xi Z_0(\tau,\xi;t,x)\Big|_{\xi=0}.$$
Тому
$$V(t,x;\tau,\xi)=\int\limits_\tau^t G^0_{12}(t,x;\gamma)\times$$
$$\times\frac{\partial}{\partial y}Z^0_0(\gamma,y;\tau,\xi)\Big|_{y=0}\frac{\beta(\gamma)}{\alpha(\gamma)}d\gamma,$$
$$t>\tau\ge 0, \quad x>0, \quad \xi>0.$$
Оскільки
$$\frac{\partial Z^0_0(\gamma,y;\tau,\xi)}{\partial y}\Big|_{y=0}=\frac{\mathrm{e}^{-B(\gamma,\tau)}\xi}{\sqrt{2\pi}(1-\mathrm{e}^{-2B(t,\tau)})^{3/2}}\times$$
$$\times\exp\left\{-\frac{\mathrm{e}^{-2B(\gamma,\tau)}\xi^2}{2(1-\mathrm{e}^{-2B(\gamma,\tau)})}\right\},$$
то з урахуванням (30) маємо
$$V(t,x;\tau,\xi)=$$
$$=-\frac{\xi}{\pi}\int\limits_\tau^t\frac{\mathrm{e}^{-B(\gamma,\tau)}}{(1-\mathrm{e}^{-2B(\gamma,\tau)})^{3/2}(1-\mathrm{e}^{-2B(t,\gamma)})^{3/2}}\times$$
$$\times\exp\left\{-\frac{x^2}{2(1-\mathrm{e}^{-2B(t,\gamma)})}-\frac{\xi^2}{2(1-\mathrm{e}^{-2B(\gamma,\tau)})}\right\}\frac{\beta(\gamma)}{\alpha(\gamma)}d\gamma.$$
Виконавши перетворення, одержуємо
$$V(t,x;\tau,\xi)=-\frac{1}{\sqrt{2\pi(1-\mathrm{e}^{-2B(t,\tau)})}}\times$$
$$\times\exp\left\{-\frac{(x+\mathrm{e}^{-B(t,\tau)}\xi)^2}{2(1-\mathrm{e}^{-2B(t,\tau)})}\right\}.$$

Отже, компоненти вектор-функції Гріна $\overrightarrow{G^0_2}\equiv(G^0_{02},G^0_{12},G^0_{22})$ задачі (19), (10_2), (11) визначаються формулами
$$G^0_{02}(t,x;\tau,\xi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi(1-\mathrm{e}^{-2B(t,\tau)})}}\times$$
$$\times\left[\exp\left\{-\frac{(x-\mathrm{e}^{-B(t,\tau)}\xi)^2}{2(1-\mathrm{e}^{-2B(t,\tau)})}\right\}+\right.$$
$$\left.+\exp\left\{-\frac{(x+\mathrm{e}^{-B(t,\tau)}\xi)^2}{2(1-\mathrm{e}^{-2B(t,\tau)})}\right\}\right],$$
$$t>\tau\ge 0, \quad x>0, \quad \xi>0; \tag{31}$$
$$G^0_{12}(t,x;\tau)=-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi(1-\mathrm{e}^{-2B(t,\tau)})}}\times$$
$$\times\exp\left\{-\frac{x^2}{2(1-\mathrm{e}^{-2B(t,\tau)})}\right\}, \quad t>\tau\ge 0, \quad x>0;$$
$$G^0_{22}(t,x;\xi)=G^0_{02}(t,x;0,\xi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi(1-\mathrm{e}^{-2B(t,0)})}}\times$$
$$\left[\exp\left\{-\frac{(x-\mathrm{e}^{-B(t,0)}\xi)^2}{2(1-\mathrm{e}^{-2B(t,0)})}\right\}+\right.$$
$$\left.+\exp\left\{-\frac{(x+\mathrm{e}^{-B(t,0)}\xi)^2}{2(1-\mathrm{e}^{-2B(t,0)})}\right\}\right],$$
$$t>0, \quad x>0, \quad \xi>0. \tag{32}$$
Згідно з (6) одержуємо формули для компонент фектор-функції Гріна задачі Неймана (3), (4_2), (5) з $a=0$:
$$G_{02}(t,x;\tau,\xi)=\exp\left\{-B(x)+\frac{x^2}{4}\right\}\times$$
$$\times G^0_{02}(t,x;\tau,\xi),$$
$$t>\tau\ge 0, \quad x>0, \quad \xi>0;$$
$$G_{12}(t,x;\tau)=\exp\left\{-B(x)+\frac{x^2}{4}\right\}G^0_{12}(t,x;\tau),$$
$$t>\tau\ge 0, \quad x>0;$$
$$G_{22}(t,x;\xi)=\exp\left\{-B(x)+\frac{x^2}{4}\right\}G^0_{22}(t,x;\xi),$$
$$t>0, \quad x>0, \quad \xi>0,$$
де G^0_{02}, G^0_{12}, G^0_{22} визначаються формулами (31), (30) та (32) відповідно.

Зауваження 1. У випадку $a\ne 0$ явні вирази для компонент вектор-функції Гріна одержати не вдається. У цьому випадку одержуються оцінки.

Зауваження 2. Аналогічні формули одержуються і для компонент вектор-функції Гріна крайових задач, спряжених до задач (3) – (5) та (9) – (11). Зауважимо, що для однорідних функцій Гріна виконується рівність
$$G^*_0(\tau,\xi;t,x)=G^0_0(t,x;\tau,\xi),$$
$$t>\tau\ge 0, \quad x>0, \quad \xi>0,$$
тобто правильна властивість нормальності.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Ивасишен С.Д., Эйдельман С.Д.* Линейные параболические граничные задачи: примеры, теоремы о корректности, приложения // Математика сегодня' 88: Науч.-метод. сб. – К.: Выща шк., 1988. – С. 76-104.

2. *Ивасишен С.Д.* Линейные параболические граничные задачи.— К.: Выща шк. Головное изд-во, 1989.— 72 с.— (Современные достижения математи-

ки и ее приложения).

3. *Березан Л.П., Івасишен С.Д., Пасічник Г.С.* Вектор-функція Гріна деяких параболічних крайових задач для рівняння другого порядку.— Чернівецький держ. ун-т. Чернівці.— 1996.— 34 с.— Деп. в ДНТБ України 08.04.96, №904-Ук96.

4. *Пасічник Г.С., Мельничук В.Ф.* Про крайові задачі для одного параболічного рівняння зі зростаючими коефіцієнтами // International conf. "Modern problems and new trends in probability theory" (Chernivtsi, June 19-26, 2005), Т.2.— К., 2005.— С.88.

Стаття надійшла до редколегії 10.10.2005