УДК 517.51

©2005 р. В.В. Нестеренко

Чернівецький національний університет ім. Юрія Федьковича, Чернівці

МНОЖИНА ТОЧОК α–НЕПЕРЕРВНОСТІ

Доводиться, що множина точок α-неперервності відображення $f : X \to Y$ є зліченним перетином α-відкритих множин.

It is proved that the set of α-continuity points of mapping $f : X \to Y$ is a countable intersection of α-open sets.

Добре відомо, що множина точок неперервності відображення із значеннями в метризовному просторі є множиною типу G_δ. Основним інструментом у доведенні цього факту виступає коливання функції. В XX ст. з'явилось багато модифікацій поняття неперервності: квазінеперервність, майже неперервність, майже квазінеперервність тощо [1]. Тому виникає природне бажання дослідити тип множини точок квазінеперервності, майже неперервності і т. д.. Щодо квазінеперервності, то результати на цю тему є у працях [2-5]. Тут ми вводимо поняття α-неперервності, яке охоплює кілька частинних випадків, згаданих вище, і з допомогою узагальнення поняття коливання отримуємо певну інформацію про множину точок α-неперервності.

Нехай X і Y — топологічні простори, $f : X \to Y$ — відображення, $x \in X$ і $\mathcal{A}$ —система множин в X. Відображення f називається $\mathcal{A}$-квазінеперервним в точці x, якщо для кожного околу V точки $y = f(x)$ в Y і для кожного околу U точки x в X існує множина $A \in \mathcal{A}$, така, що $A \subseteq U$ і $f(A) \subseteq V$. Нехай $\alpha : X \to 2^{2^X}$ — відображення, яке кожній точці $x \in X$ ставить у відповідність систему $\mathcal{A}_x = \alpha(x)$ множин X. Ми кажемо, що відображення $f : X \to Y$ є α-неперервним в точці $x \in X$, якщо воно є $\mathcal{A}_x$-квазінеперервним у точці x. Відображення $f : X \to Y$ називається α-неперервним, якщо воно є α-неперервним у кожній точці з X. Надалі будемо вважати, що системі множин $\alpha(x)$, задовольняють таку умову (N): для кожної точки $x \in X$, для кожної множини $A \in \alpha(x)$ і для будь-якої точки $y \in A$ множина A належить до $\alpha(y)$.

Якщо для кожного $x \in X$ система збігається з системою $\mathcal{G}_x$ всіх відкритих околів точки x в X, то α-неперервність є звичайною неперервністю. Якщо для кожного $x \in X$ система $\alpha(x)$ — це система $\mathcal{G}$ всіх відкритих непорожніх множин в X, то α-неперервність є звичайною квазінеперервністю. Якщо $\alpha(x) = \{A \subseteq X : (\exists\, U \in \mathcal{G}_x,)(A \subseteq U \subseteq \overline{A})\}$ для кожного $x \in X$, то α-неперервність є майже неперервністю. Якщо ж $\alpha(x) = \{A \subseteq X : (\exists\, G \in \mathcal{G})(A \subseteq G \subseteq \overline{A})\}$, то α-неперервність є майже квазінеперервністю. Зауважимо, що всі сім'ї α, що тут зустрічаються, задовольняють умову (N).

Множина B простору X називається α-відкритою, якщо для кожного $x \in B$ і для кожного околу U точки x існує множина $A \in \alpha(x)$, така, що $A \subseteq U \cap B$. Нехай $f : X \to Y$ — відображення, де Y — метричний простір з метрикою $|\cdot - \cdot|$ і $\mathcal{A}_{x_0}$ — деяка система множин для $x_0 \in X$. Введемо позначення

$$\omega_{f,x_0}(A) = \sup_{x', x'' \in A \cup \{x_0\}} |f(x') - f(x'')|,$$

де $A \in \mathcal{A}_{x_0}$ і

$$\omega_{f,x_0}(\mathcal{A}_{x_0}) = \sup_{U \in \mathcal{U}_{x_0}} \inf_{\substack{A \in \mathcal{A}_{x_0} \\ A \subseteq U}} \omega_{f,x_0}(A).$$

Теорема 1. Для того, щоб відображення $f: X \to Y$, де X — топологічний простір, а Y — метричний, було α-неперервним в точці x необхідно і досить, щоб $\omega_{f,x}(\alpha(x)) = 0$.

Доведення. Нехай відображення f є α-неперервне в точці x_0. Покажемо, що для кожного $n \in \mathbf{N}$ маємо $\omega_{f,x_0}(\alpha(x_0)) \leq \frac{1}{n}$. Візьмемо $n \in \mathbf{N}$. Розглянемо $\frac{1}{2n}$-окіл точки $y = f(x_0)$ в Y. Оскільки відображення f є α-неперервне в точці x_0, то для кожного околу U точки x_0 існує множина $A \in \alpha(x_0)$ така, що $A \subseteq U$ і образ множини A міститься в $\frac{1}{2n}$-околі точки y_0, тобто для кожного $x \in A$ маємо $|f(x_0) - f(x)| < \frac{1}{2n}$. Тоді для будь-яких x' і x'' з множини $A \cup \{x_0\}$ маємо $|f(x') - f(x'')| < \frac{1}{n}$. Отже, $\sup\limits_{x',x'' \in A \cup \{x_0\}} |f(x') - f(x'')| \leq \frac{1}{n}$. Тоді $\inf\limits_{\substack{A \in \alpha(x_0)\\ A \subseteq U}} \omega_{f,x_0}(A)$, для $n \geq 1$. Отже, $\omega_{f,x_0}(\alpha(x_0)) \leq \frac{1}{n}$, для кожного $n \geq 1$. Перейдемо до границі по n до ∞. Тоді $\omega_{f,x_0}(\alpha(x_0)) = 0$.

Навпаки, нехай $x_0 \in X$ і $\omega_{f,x_0}(\alpha(x_0)) = 0$. Візьмемо $\varepsilon > 0$ і довільний окіл U точки x_0. Оскільки $\omega_{f,x_0}(\alpha(x_0)) = 0$, то існує $A \in \alpha(x_0)$ така, що $A \subseteq U$ і $\omega_{f,x_0}(A) < \varepsilon$. Отже, маємо $|f(x_0) - f(x)| < \varepsilon$ для кожного $x \in A$. Це означає, що образ множини A міститься в ε-околі точки $y_0 = f(x_0)$.

Теорема 2. Нехай X — топологічний простір, Y — метричний і $f: X \to Y$ — відображення . Тоді для кожного $\varepsilon > 0$ множини $B_\varepsilon = \{x \in X : \omega_{f,x}(\alpha(x)) < \varepsilon\}$ є α-відкритою.

Доведення. Нехай $x_0 \in B_\varepsilon$. Тоді для кожного відкритого околу U точки x_0 існує множина $A \in \alpha(x_0)$ така, що $A \subseteq U$ і $\omega_{f,x_0}(A) < \varepsilon$. Оскільки U — відкрита, то для кожної точки $x \in A$, множина U є її околом. Крім того, множини $\alpha(x), x \in X$ володіють властивістю N. Тому $A \in \alpha(x)$ для кожного $x \in A$. Це означає, що $\omega_{f,x}(\alpha(x)) < \varepsilon$ для кожного $x \in A$. Тому $\omega_{f,x}(\alpha(x)) < \varepsilon$ для $x \in A$. Отже, $A \subseteq B_\varepsilon$. Таким чином, множина B_ε — α-відкрита.

Теорема 3. Нехай X — топологічний простір, Y — метризовний і $f: X \to Y$ — відображення. Тоді множина точок α-неперервності є зліченним перетином α-відкритих множин.

Доведення. Розглянемо множини $B_n = \{x \in X : \omega_{f,x}(\alpha(x)) < \frac{1}{n}\}$ для кожного натурального n. Згідно з теоремою 2 множини B_n є α-відкриті. Легко бачити, що

$$\{x \in X : \omega_{f,x}(\alpha(x)) = 0\} =$$
$$= \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in X : \omega_{f,x}(\alpha(x)) < \frac{1}{n}\}.$$

Оскільки множини B_n — α-відкриті, то цим теорема доведена.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Piotrowski Z.* A survey of results concerning generalized continuity on topological spaces // Acta Math. Univ. Comen.— 1987—1988.— 52—53.— P.91—110.
2. *Borsík J.* Points of continuity, quasicontinuity and cliquishness // Rend. Ist. Mat. Univ. Trieste.— 1994.— **26**, № 1—2.— P.5—20.
3. *Ewert J., Lipinski J.* On points of continuity, quasi-continuity and cliquishness of real functions / Real. Anal. Exech.— 1983.— 8.— P.473—478.
4. *Вітренко О.В., Маслюченко В.К.* Про нарізно ледь неперевні функції // Мат. Студії.— 1996.— 6.— С.113—118.
5. *Маслюченко В.К., Нестеренко В.В.* Про множину точок майже неперервності та інші ослаблення неперервності // Науковий вісник Чернівецького університету: Зб. наук. пр.— Вип.191—192. Математика.— Чернівці: Рута, 2004.— С.100—102.

Стаття надійшла до редколегії 14.10.2005