УДК 517.982

©2005р. О.В. Маслюченко, В.В. Михайлюк, М.М. Попов

Чернівецький національний університет ім. Юрія Федьковича, Чернівці

АСИМПТОТИЧНА НОРМА І КОМПАКТНІ ОПЕРАТОРИ

Вводиться і досліджується *асимптотична норма* оператора, як інфімум норм його звужень на ко-скінченновимірні підпростори. Основний результат стверджує, що асимптотична норма оператора дорівнює відхиленню цього оператора від множини всіх компактних (еквівалентно, скінченновимірних) операторів зі значеннями в ширших просторах. З іншого боку, доводиться, що асимптотична норма оператора «близька» до його міри некомпактності.

We introduce and study an *asymptotic norm* of an operator as the infimum of the norms of its restrictions to all finite codimensional subspaces. The main result asserts that the asymptotic norm of an operator equals to the distance of the operator from the set of all compact (equivalently, finite-dimensional) operators with wider range spaces. On the other hand, we prove that the asymptotic norm is "close"to the measure of non-compactness.

Ми використовуємо стандартну термінологію і позначення (див. [4]). Під словами «банахів простір» ми розуміємо нескінченновимірний сепарабельний банахів простір над полем дійсних чисел. Через B_X та S_X ми позначаємо відповідно замкнену одиничну кулю і одиничну сферу банахового простору X, $\mathrm{cof}(X)$ означає сім'ю всіх ко-скінченновимірних підпросторів простору X, символами $\mathcal{L}(X,Y), \mathcal{K}(X,Y), \mathcal{F}(X,Y)$ ми позначаємо простори усіх лінійних неперервних, відповідно, компактних та скінченновимірних операторів з X в Y.

У 1993 році було введено і зроблені перші дослідження поняття асимптотичної структури банахового простору в працях Б. Море, В. Мільмана і Н. Томчак-Єґерман ([6], [5]). Це поняття вивчалося також в останні роки іншими математиками (див. [3], [7]).

Скінченновимірний нормований простір E разом із нормованим монотонним базисом $(e_i)_{i=1}^n$ називається елементом n-ї асимптотичної структури банахового простору X (позначається: $\big(E,(e_i)_{i=1}^n\big) \in \{X\}_n$), якщо

$$(\forall \varepsilon > 0)\ \ (\forall Y_1 \in \mathrm{cof}(X))$$

$$(\exists y_1 \in S_{Y_1}) \cdots (\forall Y_n \in \mathrm{cof}(X))\ \ (\exists y_n \in S_{Y_n}):$$

$$d_b(E,[y_i]_{i=1}^n) = d_b((e_i)_{i=1}^n,(y_i)_{i=1}^n) =$$

$$\stackrel{def}{=} \|T\|\,\|T^{-1}\| \le 1+\varepsilon,$$

де T – лінійний оператор, який діє з E в лінійну оболонку $[y_i]_{i=1}^n$ та переводить e_i у y_i (нижній індекс b в d_b означає «базисну» відстань, яку визначено вище).

У зв'язку з поняттям асимптотичної структури ми досліджуємо, наскільки компактність оператора є його «асимптотичною» властивістю. Для цього вводимо *асимптотичну норму* оператора (яка, насправді, є напівнормою), як інфімум норм його звужень на ко-скінченновимірні підпростори. Основний результат нашої замітки стверджує, що асимптотична норма оператора дорівнює відхиленню цього оператора від множини всіх компактних (еквівалентно, скінченновимірних) операторів зі значеннями у ширших просторах . Звідси, зокрема, випливає, що оператор є компактним тоді і тільки тоді, коли його асимптотична норма дорівнює нулю (результат, який, скоріше всього, є відомим, якщо його переформулювати без використання асимптотичної норми). З іншого боку, ми доводимо, що асимптотична норма оператора «близька» до його міри некомпактності.

Асимптотичною нормою оператора $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ між банаховими просторами X та Y називатимемо число

$$\|T\|_{as} = \inf_{X' \in \mathrm{cof}(X)} \sup_{x \in S_{X'}} \|Tx\| = \inf_{X' \in \mathrm{cof}(X)} \|T|_{X'}\|.$$

Фактично, $\|\cdot\|_{as}$ є напівнормою. Для доведення нерівності трикутника для даних операторів $T, U \in \mathcal{L}(X,Y)$ та фіксованого $\varepsilon > 0$ виберемо підпростір $X' \in \mathrm{cof}(X)$ такий, що $\|T|_{X'}\| \le \|T\|_{as} + \varepsilon$, а також підпростір $X'' \in \mathrm{cof}(X)$ такий, що $\|U|_{X''}\| \le \|U\|_{as} + \varepsilon$. Тоді для $X''' = X' \cap X''$ ми одержимо

$$\|T+U\|_{as} \le \|(T+U)|_{X'''}\| \le \|T|_{X'''}\| +$$

$$+\|U|_{X'''}\| \le \|T|_{X'}\| + \|U|_{X''}\| \le$$

$$\le \|T\|_{as} + \|U\|_{as} + 2\,\varepsilon.$$

Спрямувавши ε до 0, одержимо потрібну нерівність.

Нагадаємо, що *міра некомпактності* $\chi(T)$ оператора $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ визначається наступним чином

$$\chi(T) = \inf\Big\{\varepsilon > 0 : \big(\exists y_1, \dots, y_n \in Y\big)$$

$$\Big(TB_X \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B_\varepsilon(y_i)\Big)\Big\},$$

де $B_\varepsilon(y_i) = \{y \in Y : \ \|y - y_i\| < \varepsilon\}$ (див., наприклад, [1, p.309]). Очевидно, $\chi(T) = 0$ в точності означає, що оператор T компактний.

Теорема. *Нехай X, Y - банахові простори та $T \in \mathcal{L}(X,Y)$. Тоді*
(i) $\|T\|_{as} = \inf\{\|T - F\| : F \in \mathcal{F}(X,Z)\}$
(ii) $\|T\|_{as} = \inf\{\|T - K\| : K \in \mathcal{K}(X,Z)\}$
(iii) $\frac{1}{2}\,\chi(T) \le \|T\|_{as} \le 2\,\chi(T)$,
де інфімуми беруться по всіх банахових просторах Z, що містять Y в якості підпростору.

Доведення. Праві частини формул (i) та (ii) через α і β відповідно. Очевидно, що $\alpha \ge \beta$. Отже, для доведення (i) та (ii) залишається показати, що $\alpha \le \|T\|_{as} \le \beta$.

По-перше, з'ясуємо, що $\|T\|_{as} \le 2\,\chi(T)$. Зафіксуємо $\varepsilon > \chi(T)$. Тоді існують елементи $y_1, \cdots, y_n \in Y$ такі, що $TB_X \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{n} B_\varepsilon(y_i)$. Покладемо

$$I = \{i \in \{1, \cdots, n\} : \ 0 \in B_\varepsilon(y_i)\}$$

і

$$J = \{1, \cdots, n\} \setminus I.$$

За теоремою Гана-Банаха, для кожного $j \in J$ існує гіперпідпростір H_j простору Y такий, що $H_j \cap B_\varepsilon(y_j) = \emptyset$. Позначимо $Y' = \bigcap\limits_{j\in J} H_j$. Тоді $Y' \in \mathrm{cof}(Y)$. Тому $X' = T^{-1}(Y') \in \mathrm{cof}(X)$.

Візьмемо $x \in S_{X'}$. Тоді

$$Tx \in Y' \cap \bigcup_{i=1}^{n} B_\varepsilon(y_i) \subseteq \bigcup_{i\in I} B_\varepsilon(y_i).$$

Врахувавши, крім того, що $0 \in B_\varepsilon(y_i)$ для кожного $i \in I$, будемо мати, що $\|Tx\| < 2\varepsilon$. Таким чином,

$$\|T\|_{as} \le \|T|_{X'}\| \le 2\varepsilon.$$

Переходячи до границі при $\varepsilon \longrightarrow \chi(T)$, одержимо бажану нерівність. Зокрема, ми будемо мати, що $\|K\|_{as} = 0$ для $K \in \mathcal{K}(X,Y)$.

Тепер доведемо, що $\|T\|_{as} \le \beta$. Візьмемо довільне $\varepsilon > \beta$. Тоді існує банахів простір $Z \supseteq Y$ і оператор $K \in \mathcal{K}(X,Z)$ такі, що $\|T - K\| \le \varepsilon$. Отже,

$$\varepsilon \ge \|T - K\| \ge \|T - K\|_{as} \ge$$

$$\ge \|T\|_{as} - \|K\|_{as} = \|T\|_{as},$$

адже $\|K\|_{as} = 0$.Залишилось спрямувати ε до β.

Доведемо тепер, що $\|T\|_{as} \ge \alpha$. Нехай $\varepsilon > \|T\|_{as}$. Тоді існує підпростір $X' \in \mathrm{cof}(X)$ такий, що $\|T|_{X'}\| \le \varepsilon$. Оскільки кожний банахів простір ізометрично вкладається в $\ell_\infty(\Gamma)$ для деякого Γ, то ми можемо вважати, що $Y \subseteq \ell_\infty(\Gamma)$. Тоді $T|_{X'} \in \mathcal{L}\big(X', \ell_\infty(\Gamma)\big)$. Для кожного $\gamma \in \Gamma$ визначимо $f_\gamma \in X'^*$ формулою

$$f_\gamma(x) = Tx(\gamma), \ \ x \in X'.$$

Зауважимо, що

$$\|T|_{X'}\| = \sup_{x\in S_{X'}} \|Tx\| = \sup_{x\in S_{X'}} \sup_{\gamma\in\Gamma} |f_\gamma(x)| =$$

$$= \sup_{\gamma\in\Gamma} \sup_{x\in S_{X'}} |f_\gamma(x)| = \sup_{\gamma\in\Gamma} \|f_\gamma\|.$$

Використовуючи відомий наслідок теореми Гана-Банаха, одержимо, що для кожного $\gamma \in \Gamma$ існує функціонал $g_\gamma \in X^*$ такий, що $g_\gamma|_{X'} = f_\gamma$ та $\|g_\gamma\| = \|f_\gamma\|$.

Побудуємо оператор $T_\varepsilon \in \mathcal{L}(X, \ell_\infty(\Gamma))$, покладаючи

$$T_\varepsilon(x)(\gamma) = g_\gamma(x), \ \ \gamma \in \Gamma.$$

Тоді

$$\|T_\varepsilon\| = \sup_{\gamma\in\Gamma} \|g_\gamma\| = \sup_{\gamma\in\Gamma} \|f_\gamma\| = \|T|_{X'}\| \leq \varepsilon$$

та $T_\varepsilon|_{X'} = T|_{X'}$.

Позначимо $F_\varepsilon = T - T_\varepsilon$. Оскільки $\ker F_\varepsilon \supseteq X' \in \mathrm{cof}(X)$, то $F_\varepsilon \in \mathcal{F}(X, \ell_\infty(\Gamma))$. Крім того, $\|T - F_\varepsilon\| = \|T_\varepsilon\| \leq \varepsilon$. Отже, $\alpha \leq \varepsilon$. Залишилося спрямувати ε до $\|T\|_{as}$.

Доведемо нарешті, що $\chi(T) \leq 2\,\|T\|_{as}$. Зафіксуємо довільне $\varepsilon > \|T\|_{as}$. Тоді з (ii) випливає існування банахового простору $Z \supseteq Y$ і оператора $K \in \mathcal{K}(X, Z)$ таких, що $\|T - K\| \leq \varepsilon$. Для заданого $\delta > 0$ виберемо скінченну послідовність $z_i = Kx_i$, $i = 1, \cdots, n$ таку, що $x_i \in B_X$, а також $KB_X \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B_\delta(z_i)$. Тепер візьмемо довільний вектор $y = Tx \in TB_X$, де $x \in B_X$. Оскільки $z = Kx \in KB_X$, то існує індекс $i \in \{1, \cdots, n\}$ такий, що $\|z - z_i\| \leq \delta$. Зазначимо, що

$$\|y - y_i\| - \|z - z_i\| \leq \|(y - y_i) - (z - z_i)\| =$$

$$= \|(T - K)(x - x_i)\| \leq \|T - K\|\,\|x - x_i\| \leq 2\,\varepsilon.$$

Отже,

$$\|y - y_i\| \leq \|z - z_i\| + 2\,\varepsilon \leq \delta + 2\,\varepsilon$$

і тому $y_1, \cdots, y_n$ is a $(\delta + 2\,\varepsilon)$-сітка для TB_X. Значить, $\chi(T) \leq \delta + 2\,\varepsilon$. Спрямувавши δ до 0 і ε до $\|T\|_{as}$, одержимо потрібну нерівність.

Зазначимо, що формула (ii) робить наше поняття асимптотичної норми близьким до поняття істотної норми оператора $T : X \to X$, яка визначається так

$$\|T\|_e = \inf\{\|T - K\| : \ \ K \in \mathcal{K}(X)\},$$

див. [2].

Наслідок. *Нехай X, Y - банахові простори. Оператор $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ компактний тоді і тільки тоді, коли $\|T\|_{as} = 0$.*

З доведення теореми 1 випливає, що якщо $Y = \ell_\infty(\Gamma)$, то в (ii) можна вважати, що $Z = Y$, тобто досить розглядати інфімум по всіх операторах $K \in \mathcal{K}(X, Y)$. Отже, одержуємо наступний факт.

Зауваження. Нехай X – банахів простір, $Y = \ell_\infty(\Gamma)$, $Q : \mathcal{L}(X, Y) \to \mathcal{L}(X, Y)/\mathcal{K}(X, Y)$ – фактор-відображення і $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Тоді $\|T\|_{as} = \|Q\,T\|$.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Abramovich Yu. A., Aliprantis C. D.* An Invitation to Operator Theory. Graduate Studies in Mathematics, v. 50, AMS – Providence, RI. – 2002. – 530 p.

2. *Axler S., Jewell N., Shields A.* The essential norm of an operator and its adjoint // Trans. Amer. Math. Soc. – 1980. – 261, N1. – P. 159–167.

3. *Junge M., Kutzarova D., Odell E.* On asymptotically symmetric Banach spaces // Preprint. – 2004. – 25 p.

4. *Lindenstrauss J., Tzafriri L.* Classical Banach Spaces. I. – – Springer. – Berlin etc. – 1977. – 190 p.

5. *Maurey B., Milman V. D., Tomczak-Jaegermann N.* Asymptotic infinite-dimensional theory of Banach spaces // Oper. Theory: Adv. Appl. – 1994. – 77. – P. 149–175.

6. *Milman V. D., Tomczak-Jaegermann N.* Asymptotic ℓ_p spaces and bounded distortions // Contemp. Math. (eds. Bor Luh Lin and W. B. Johnson). – 1993. – 144. – P. 173–195.

7. *Odell E., Schlumprecht Th.* Trees and branches in Banach spaces // Trans. Amer. Math. Soc. – 2002. – 354, N10. – P. 4085–4108.

Стаття надійшла до редколегії 14.10.2005