УДК 517.51

©2005 р. В.К. Маслюченко, О.Г. Фотій

Чернівецький національний університет ім. Юрія Федьковича, Чернівці

НЕПЕРЕРВНІ ЗВЕРХУ ВІДОБРАЖЕННЯ ЗІ ЗНАЧЕННЯМИ В ПРЯМІЙ ЗОРҐЕНФРЕЯ

Установлено, що неперервне зверху n-значне відображення берівського простору з другою аксіомою зліченності у пряму Зорґенфрея є локально сталим у всіх точках деякої відкритої залишкової множини.

It is obtained that a upper continuous n-valued mapping, which domain is a Baire second countable space and range is Sorgenfrei line, is locally constant in all point of an open residual set.

1. Многозначне відображення $F\colon X \to Y$ топологічного простору X у топологічний простір Y називають *неперервним зверху /знизу/ в точці* x_0 з X, якщо для кожної відкритої в Y множини V, такої, що $F(x_0) \subseteq V$ /$F(x_0) \cap V \neq \emptyset$/, існує такий окіл U точки x_0 в X, що $F(x) \subseteq V$ /$F(x_0) \cap V \neq \emptyset$/, як тільки $x \in U$. Кажуть, що відображення $F\colon X \to Y$ *неперервне зверху /знизу/*, якщо воно є таким у кожній точці $x \in X$. Зауважимо, що тут ми, слідуючи [1], спрощуємо термінологію, вживаючи терміни "неперервність зверху і знизу" замість рівнозначних їм термінів "напівнеперервність зверху і знизу", які використовувалися раніше, зокрема, і в наших працях. Через $C^+(F)$ /$C^-(F)$/ ми позначаємо множину всіх точок x з X, в яких F неперервне зверху /знизу/.

Ґ.Дебс [2] і П.Кендеров [3] вказали умови, при яких у неперервного знизу /зверху/ відображення $F\colon X \to Y$ множина $C^+(F)$ /$C^-(F)$/ є автоматично залишковою в X. Результати Дебса були розвинуті в працях [4, 5], де, зокрема, вивчалися неперервні знизу відображення $F\colon X \to \mathbb{L}$ зі значеннями в прямій Зорґенфрея $\mathbb{L}$ [6, с. 47]. Там показано, що для довільного локально зв'язного простору X скінченнозначні неперервні знизу відображення $F\colon X \to \mathbb{L}$ будуть навіть локально сталими в усіх точках деякої залишкової відкритої в X множини, але існує компактнозначне неперервне знизу відображення $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{L}$, у якого $C^+(F) \neq \emptyset$.

У цій статті ми розпочинаємо дослідження неперервних зверху відображень $F\colon X \to \mathbb{L}$. Спочатку ми наводимо приклад неперервного зверху відображення $F_1\colon \mathbb{R} \to \mathbb{L}$, у якого $C^-(F_1) = \emptyset$, з'ясувavаши тим, що результат Кендерова з [3] не переноситься на відображення зі значеннями в $\mathbb{L}$. Далі, визначаємо неперервне зверху відображення $F_2\colon \mathbb{R} \to \mathbb{L}$, яке не має точок локальної сталості і в кожній точці набуває не більше двох значень. Нарешті, використавши відому теорему Бера про залишковість множини точок неперервності довільної напівнеперервної зверху чи знизу однозначної функції з дійсними значеннями і теорему 2 з [5], ми доводимо, що у довільного n-значного неперервного зверху відображення F берівського простору з другою аксіомою зліченності в пряму Зорґенфрея $\mathbb{L}$ множина точок його локальної сталості відкрита і всюди щільна в X.

2. П.Кендеров [3] показав, що у кожного неперервного зверху відображення F топологічного простору X у сепарабельний метризований простір Y множина $C^-(F)$ залишкова в X. Пряма Зорґенфрея $\mathbb{L}$ – це сепарабельний, але не метризовний простір, адже вага $\mathbb{L}$ континуальна. Покажемо, що результат Кендерова перестає бути справедливим для відображень $F\colon X \to \mathbb{L}$.

Нагадаємо, що пряма Зорґенфрея $\mathbb{L}$ як множина збігається з числовою прямою $\mathbb{R}$, але околом точки x в $\mathbb{L}$ вважається будь-яка множина U з $2^{\mathbb{L}}$, яка містить деякий проміжок $[x, x+\varepsilon)$, де $\varepsilon > 0$.

Теорема 1. *Нехай $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – довільна неперервна строго зростаюча функція, яка набуває лише додатні значення (наприклад, $f(x) = e^x$) і $F_1(x) = [0, f(x)]$ для кожного $x \in \mathbb{R}$. Тоді многозначне відображення $F_1\colon \mathbb{R} \to \mathbb{L}$ неперервне зверху і $C^-(F_1) = \emptyset$.*

Доведення. Нехай $x_0 \in \mathbb{R}$ і $y_0 = f(x_0)$. Тоді $F_1(x_0)$ – це відрізок $[0, y_0]$. Розглянемо довільну відкриту в $\mathbb{L}$ множину V, для якої $F(x_0) \subseteq V$. Оскільки $y_0 \in V$, то існує таке $\varepsilon > 0$, що $[y_0, y_0+\varepsilon) \subseteq V$. В такому разі $[0, y_0+\varepsilon) \subseteq V$. Оскільки функція f неперервна в точці x_0, то існує такий окіл U точки x_0 в $\mathbb{R}$, що $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, як тільки $x \in U$. Тоді $f(x) < y_0 + \varepsilon$ для кожного x з U, отже, $F_1(x) \subseteq [0, y_0 + \varepsilon)$ при $x \in U$, а значить, з умови $x \in U$ випливає, що $F_1(x) \subseteq V$, що і дає нам неперервність зверху відображення F_1.

Покажемо тепер, що F_1 не є неперервним знизу в точці x_0. Множина $V_0 = [y_0, +\infty)$ є відкритою в $\mathbb{L}$ і $V_0 \cap F(x_0) \neq \emptyset$, бо $y_0 \in V_0 \cap F(x_0)$. Нехай U – довільний окіл точки x_0 в $\mathbb{R}$. Тоді існує таке $\delta > 0$, що $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq U$. Візьмемо на інтервалі $(x_0 - \delta, x_0)$ будь-яку точку x_1. Оскільки $x_1 < x_0$ і функція f строго зростає, то $y_1 = f(x_1) < f(x_0) = y_0$. Тому множини $F_1(x_1) = [0, y_1]$ і V_0 не перетинаються і при цьому $x_1 \in U$. Отже, не існує такого околу U точки x_0, що $F_1(x) \cap V_0 \neq \emptyset$ для всіх $x \in U$, що і треба було довести.

3. Ми будемо використовувати відому функцію Рімана $r\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, для якої $r(x) = 0$, якщо x – ірраціональне число, і $r(x) = \frac{1}{n}$, якщо x – це раціональне число, яке задається нескоротним дробом $\frac{m}{n}$, де $m \in \mathbb{Z}$ і $n \in \mathbb{N}$.

Нехай $F\colon X \to Y$ – відображення, задане на топологічному просторі X, і $x_0 \in X$. Кажуть, що x_0 – *точка локальної сталості* відображення F, якщо існує такий окіл U точки x_0 в X, що $F(x) = F(x_0)$ для всіх $x \in U$. Множину всіх точок локальної сталості відображення F позначимо символом $LC(F)$.

Надалі ми часто будемо користуватися таким зауваженням. Для скінченної множини $B = \{y_1, \ldots, y_n\}$ дійсних чисел і числа $\varepsilon > 0$ покладемо

$$V(B, \varepsilon) = \bigcup_{k=1}^{n} [y_k, y_k + \varepsilon).$$

Зрозуміло, що множина $V(B, \varepsilon)$ відкрита в $\mathbb{L}$, причому для кожної відкритої множини G в $\mathbb{L}$, яка містить B, існує таке $\varepsilon > 0$, що $V(B, \varepsilon) \subseteq G$. Тому відображення $F\colon X \to \mathbb{L}$ буде неперервним зверху в точці x_0, для якої множина $F(x_0)$ скінченна, тоді і тільки тоді, коли для кожного $\varepsilon > 0$ існує такий окіл U точки x_0 в X, що $F(x) \subseteq V(F(x_0), \varepsilon)$, як тільки $x \in U$.

Теорема 2. *Нехай r – функція Рімана і $F_2(x) = \{0, r(x)\}$ для кожного $x \in \mathbb{R}$. Тоді відображення $F_2\colon \mathbb{R} \to \mathbb{L}$ є неперервним зверху і для нього $LC(F_2) = \emptyset$, а $C^-(F_2) = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.*

Доведення. Покажемо, що F_2 – неперервне зверху в кожній точці x_0 з $\mathbb{R}$. Нехай $\varepsilon > 0$ і $V = V(F(x_0), \varepsilon)$. Припустимо, що x_0 – ірраціональне число. Тоді $F(x_0) = \{0\}$ і $V = [0, \varepsilon)$. Існує такий номер p, що $\frac{1}{p} < \varepsilon$. Позначимо через $[x]$ цілу частину дійсного числа x. Нехай $q = [p!x_0]$. Зрозуміло, що $q < p!x_0 < q + 1$, отже, $x_0 \in U = \left(\frac{q}{p!}, \frac{q+1}{p!}\right)$. Ясно, що U – це окіл точки x_0 в $\mathbb{R}$. Припустимо, що $x = \frac{m}{n} \in U$, де $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$ і дріб $\frac{m}{n}$ нескоротний. Тоді обов'язково $n > p$. Справді, якщо $n \leq p$, то існує таке натуральне число k, що $nk = p!$. Оскільки

$$\frac{q}{p!} < \frac{m}{n} = \frac{mk}{p!} < \frac{q+1}{p!},$$

то $q < mk < q + 1$, але ця нерівність неможлива, бо q та mk – цілі числа. В такому разі $r(x) = \frac{1}{n} < \frac{1}{p} < \varepsilon$, отже, $F(x) \subseteq V$. Для ірраціональних x включення $F(x) \subseteq V$ очевидне.

Нехай тепер $x_0 = \frac{m_0}{n_0}$, де $m_0 \in \mathbb{Z}$, $n_0 \in \mathbb{N}$ і дріб $\frac{m_0}{n_0}$ нескоротний. Тоді $r(x_0) = \frac{1}{n_0}$, $F(x_0) = \{0, \frac{1}{n_0}\}$ і $V = [0, \varepsilon) \cup [\frac{1}{n_0}, \frac{1}{n_0} + \varepsilon)$. Знову беремо номер p, для якого $\frac{1}{p} < \varepsilon$, і покладемо $q = [p!x_0]$. Тепер уже виконується лише нерівність $\frac{q}{p!} \leq x_0 < \frac{q+1}{p!}$. Якщо $x_0 > \frac{q}{p!}$, то проходять попередні міркування. Якщо ж $x_0 = \frac{q}{p!}$, то ми покладемо $U = \left(\frac{q-1}{p!}, \frac{q+1}{p!}\right)$. Ясно, що U – це окіл точки x_0. Як і раніше, якщо раціональне число $x = \frac{m}{n}$, де $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$ і дріб $\frac{m}{n}$ нескоротний, попадає в один з інтервалів $U^- = \left(\frac{q-1}{p!}, \frac{q}{p!}\right)$ чи $U^+ = \left(\frac{q}{p!}, \frac{q+1}{p!}\right)$, то обов'язково $n > p$, отже, $r(x) = \frac{1}{n} < \frac{1}{p} < \varepsilon$, звідки випливає, що $F_2(x) \subseteq [0, \varepsilon) \subseteq V$. Оскільки $F_2(x_0) \subseteq V$ і $F_2(x) = \{0\} \subseteq V$ при ірраціональних x, то $F_2(x) \subseteq V$, як тільки $x \in U = U^- \cup \{x_0\} \cup U^+$.

Зауважимо, що при цьому ми фактично довели відому властивість функції Рімана, яка полягає в тому, що $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} r(x) = 0$ для довільного $x_0 \in \mathbb{R}$.

Далі, рівність $LC(F_2) = \emptyset$ випливає зі щільності множини $\mathbb{Q}$ в $\mathbb{R}$, а рівність $C^-(F_2) = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ – з того, що $0 \in F(x)$ для кожного $x \in \mathbb{R}$ і множина ірраціональних чисел $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ також щільна в $\mathbb{R}$.

4. Нехай $n \in \mathbb{N}$ і $F\colon X \to \mathbb{L}$ – n-значне відображення. Для кожного $x \in X$ індуктивно визначимо числа $f_k(x)$ при $k = 1, 2, \ldots, n$ і множини $F_k(x)$ при $k = 0, 1, \ldots, n$, покладаючи $F_0(x) = \emptyset$, $f_k(x) = \max(F(x) \setminus F_{k-1}(x))$ і $F_k(x) = \{f_1(x), \ldots, f_k(x)\}$. Зрозуміло, що $f_1(x) > f_2(x) > \cdots > f_n(x)$ і $F(x) = F_n(x) = \{f_1(x), \ldots, f_n(x)\}$ для кожного $x \in X$. При цьому $f_1(x) = \max F(x)$ і $f_n(x) = \min F(x)$ для кожного $x \in X$.

В наступних чотирьох підготовчих твердженнях ми використовуємо введені позначення і припускаємо, що X – топологічний простір, а відображення $F\colon X \to \mathbb{L}$ – неперервне зверху.

Для функції $f\colon X \to \mathbb{R}$ символом $Min(f)$ позначимо множину всіх тих точок x з X, в яких f має локальний мінімум, тобто існує такий окіл U точки x в X, що $f(u) \geq f(x)$, як тільки $u \in U$.

Лема 1. $Min(f_n) = X$.

Доведення. Нехай $x_0 \in X$ і $V = [f_n(x_0), +\infty)$. Ясно, що множина V відкрита в $\mathbb{L}$ і $F(x_0) \subseteq V$. Оскільки F неперервне зверху в точці x_0, то існує такий окіл U точки x_0 в X, що $F(x) \subseteq V$, як тільки $x \in U$. В такому разі при $x \in U$ будемо мати: $f_n(x) = \min F(x) \geq f_n(x_0)$. Тому $x_0 \in Min(f_n)$.

Нагадаємо, що функція $f\colon X \to \mathbb{R}$ називається *напівнеперервною зверху /знизу/ в точці* $x_0 \in X$, якщо для кожного $\varepsilon > 0$ існує такий окіл U точки x_0 в X, що $f(x) < f(x_0) + \varepsilon$ $/f(x) > f(x_0) - \varepsilon/$, як тільки $x \in U$, і просто *неперервною зверху /знизу/*, якщо вона є такою в кожній точці x з X.

Лема 2. *Нехай* $k = 1, \ldots, n$ *і* $LC(F_{k-1}) = X$. *Тоді функція* $f_k\colon X \to \mathbb{R}$ *напівнеперервна зверху. Зокрема, функція* $f_1\colon X \to \mathbb{R}$ *завжди напівнеперевна зверху.*

Доведення. Нехай $x_0 \in X$ і U_0 – такий окіл точки x_0 в X, що $F_{k-1}(x) = F_{k-1}(x_0)$ для кожного $x \in U_0$. Покладемо $y_j = f_j(x_0)$ при $j = 1, \ldots, n$, $B_1 = \{y_1, \ldots, y_{k-1}\}$ і $B_2 = \{y_k, \ldots, y_n\}$. Ясно, що $F(x_0) = B_1 \bigsqcup B_2$. Для довільного $\varepsilon > 0$ розглянемо базисний відкритий окіл $V = V(F(x_0), \varepsilon)$ множини $F(x_0)$ в $\mathbb{L}$. Очевидно $V = V(B_1, \varepsilon) \cup V(B_2, \varepsilon)$. Оскільки F неперервне зверху в точці x_0, то існує такий окіл U точки x_0 в X, що $U \subseteq U_0$ і $F(x) \subseteq V$, як тільки $x \in U$. Нехай $x \in U$. Тоді $f_k(x) \in V$, бо $f_k(x) \in F(x)$. Але $f_k(x) < f_{k-1}(x) = f_{k-1}(x_0) = y_{k-1}$. Тому $f_k(x) \notin V(B_1, \varepsilon)$, а значить, $f_k(x) \in V(B_2, \varepsilon)$, тобто $f_k(x) \in [y_j, y_j + \varepsilon)$ при деякому $j \geq k$. В такому разі $f_k(x) < y_j + \varepsilon \leq y_k + \varepsilon = f_k(x_0) + \varepsilon$, що і показує, що f_k напівнеперервна зверху у точці x_0. Зауважимо, що при $k = 1$ маємо $U_0 = X$, $B_1 = V(B_1, \varepsilon) = \emptyset$ і міркування спрощуються.

Лема 3. *Нехай* $k = 1, \ldots, n$ *і* x_0 *– точка неперервності знизу функції* $f_k\colon X \to \mathbb{R}$. *Тоді* $x_0 \in Min(f_k)$.

Доведення. Для $k = n$ це доведено в лемі 1 без жодних припущень щодо точки x_0. Тому ми вважатимемо, що $1 \leq k < n$. Знову покладемо $y_j = f_j(x_0)$ при $j = 1, \ldots, n$. Оскільки $y_{k+1} < y_k$, то $\varepsilon = \frac{1}{2}(y_k - y_{k+1}) > 0$. Нехай $V = V(F(x_0), \varepsilon) = \bigcup\limits_{j=1}^{n} [y_j, y_j + \varepsilon)$. З напівнеперервності знизу функції $f_k\colon X \to \mathbb{R}$ у точці x_0 і неперервності зверху відображення F випливає, що існує такий окіл U точки x_0 в X, що $f_k(x) > y_k - \varepsilon$ і $F(x) \subseteq V$, як тільки $x \in U$. Нехай $x \in U$. Тоді $f_k(x) \in V$, отже, існує таке $j = 1, \dots, n$, що $f_k(x) \in [y_j, y_j + \varepsilon)$. Оскільки $f_k(x) > y_k - \varepsilon$ і $y_k - \varepsilon = y_{k+1} + \varepsilon$, то $f_k(x) \notin [y_i, y_i + \varepsilon)$ при $i \geq k+1$. Тому $j \leq k$, отже, $f_k(x) \geq y_j \geq y_k$, звідки випливає, що $x_0 \in Min(f_k)$.

Лема 4. *Нехай S – всюди щільна в X множина, $y_1 > y_2 > \dots > y_n$ – строго спадна послідовність n дійсних чисел, $F_{n-1}(x) = \{y_1, \dots, y_{n-1}\}$ на S і $f_n(x) = y_n$ на X. Тоді $F(x) = \{y_1, \dots, y_n\}$ на X.*

Доведення. Нехай k – фіксований номер від 1 до $n-1$. Припустимо, що відображення F_{k-1} стале, і доведемо, що тоді і відображення F_k стале, а саме, що $F_k(x) = \{y_1, \dots, y_k\}$ на X. Нехай це не так. Тоді $f_k(x_0) \neq y_k$ для деякого $x_0 \in X$, адже $F_{k-1}(x) = \{y_1, \dots, y_{k-1}\}$ на X. Покажемо, що обов'язково $f_k(x_0) > y_k$. Припустимо, що навпаки $f_k(x_0) < y_k$. Візьмемо $\varepsilon = y_k - f_k(x_0)$ і покладемо $V = V(F(x_0), \varepsilon)$. Оскільки $x_0 \in C^+(F) = X$, то існує такий окіл U точки x_0 в X, що $F(x) \subseteq V$, як тільки $x \in U$. Але $\overline{S} = X$, отже, існує точка $x^* \in S \cap U$, для якої за умовою $F(x^*) = \{y_1, \dots, y_n\}$. Оскільки $y_k = f_k(x_0) + \varepsilon$, то $y_k \notin [f_j(x_0), f_j(x_0) + \varepsilon)$ при $j \geq k$. Якщо ж $j < k$, то $y_k < y_j = f_j(x_0)$, отже, і в цьому випадку $y_k \notin [f_j(x_0), f_j(x_0) + \varepsilon)$. Отже, $y_k \notin V$. Але $y_k = f_k(x^*) \in F(x^*)$, отже, $y_k \in V$, бо $x^* \in U$. Отримана суперечність доводить, що $f_k(x_0) > y_k$.

Нехай m – найменший з номерів $j = k+1, \dots, n$, для яких $f_j(x_0) \leq y_j$. Такий номер обов'язково існує, бо $f_n(x_0) = y_n \leq y_n$ і $n > k$. Ясно, що $m > k \geq 1$, отже, $m-1$ – це один із номерів від k до $n-1$. З означення номера m і нерівності $f_k(x_0) > y_k$ випливає, що

$$f_{m-1}(x_0) > y_{m-1} > y_m \geq f_m(x_0),$$

отже, $\varepsilon_0 = y_{m-1} - f_m(x_0) > 0$. Нехай $V_0 = V(F(x_0), \varepsilon_0)$. Існує такий окіл U_0 точки x_0, що $F(x) \subseteq V_0$, як тільки $x \in U_0$. Зрозуміло, що $U_0 \cap S \neq \emptyset$, отже, є точка x_*, така, що $x_* \in U_0 \cap S$. Оскільки $x_* \in S$, то $F(x_*) = \{y_1, \dots, y_n\}$, зокрема, $y_{m-1} \in F(x_*)$, а значить, $y_{m-1} \in V_0$, адже x_* входить і в U_0. Але $f_m(x_0) + \varepsilon = y_{m-1} < f_{m-1}(x_0)$, отже, $y_{m-1} \notin V_0$. Отримана суперечність показує, що $f_k(x_0) = y_k$.

Оскільки $F_0(x) = \emptyset$ для кожного $x \in X$, то відображення F_0 стале. Тому, за доведеним, сталими послідовно будуть і відображення $F_1, \dots, F_{n-1}$. В такому разі $F_{n-1}(x) = \{y_1, \dots, y_{n-1}\}$ на X, отже, і $F(x) = \{y_1, \dots, y_n\}$ на X.

5. В доведенні основного результату ми використаємо наступні твердження.

Теорема A. *Нехай X – топологічний простір і $f\colon X \to \mathbb{R}$ – напівнеперервна зверху або знизу функція. Тоді множина $C(f)$ її точок неперервності залишкова в X.*

Теорема B. *Нехай X – берівський простір з другою аксіомою зліченності і $f\colon X \to \mathbb{R}$ – функція, у якої $Min(f) = X$. Тоді множина $LC(f)$ відкрита і всюди щільна в X.*

Теорема C. *Нехай E – підпростір берівського простору X, який є залишковою множиною в X. Тоді і E – берівський простір.*

Теорема A – це класичний результат, первісний варіант якого належить Р.Беру. Його доведення можна знайти в [7]. Теорема B сформульована в [5] і доведена у [8]. Теорема C доведена в [9, с. 117].

6. Перейдемо нарешті до розгляду основного результату.

Теорема 3. *Нехай X – берівський простір з другою аксіомою зліченності, n – натуральне число і $F\colon X \to \mathbb{L}$ – неперервне зверху n-значне відображення. Тоді множина $LC(F)$ точок локальної сталості відображення F відкрита і всюди щільна в X.*

Доведення. Нехай $F(x) = \{f_1(x), \dots, f_n(x)\}$, де $f_1(x) > \dots > f_n(x)$ для кожного $x \in X$. Побудуємо спадні послідовності множин $E_1, \dots, E_{n-1}$ і $S_0, S_1, \dots, S_{n-1}$, такі, що:

(i) $X = S_0 \supseteq E_1 \supseteq S_1 \supseteq E_2 \supseteq S_2 \supseteq \dots \supseteq E_{n-1} \supseteq S_{n-1}$;

(ii) множина E_k – залишкова в S_{k-1} при $k = 1, \ldots, n-1$;

(iii) множина S_k – відкрита і всюди щільна в E_k при $k = 1, \ldots, n-1$;

(iv) $E_k = C(f_k|_{S_{k-1}})$ при $k = 1, \ldots, n-1$;

(v) $S_k = LC(f_k|_{E_k})$ при $k = 1, \ldots, n-1$.

Визначимо спочатку множини E_1 і S_1. За лемою 2 функція f_1: $X \to \mathbb{R}$ неперервна зверху. Тому за теоремою A множина $E_1 = C(f_1)$ залишкова в $X = S_0$. З леми 3 випливає, що $E_1 \subseteq Min(f_1)$. Для звуження $g_1 = f|_{E_1}$ буде виконуватися рівність $E_1 = Min(g_1)$. За теоремою C підпростір E_1 простору X буде берівським. Крім того, він, як і X, задовольняє другу аксіому зліченності. Тому за теоремою B множина $S_1 = LC(g_1)$ відкрита і всюди щільна в E_1.

Припустимо, що $1 < k < n$ і множини E_i та S_i вже побудовані при $1 \leq i < k$. Визначимо множини E_k та S_k. Розглянемо вже побудований підпростір S_{k-1} і покладемо $g_i = f_i|_{S_{k-1}}$, $G = F|_{S_{k-1}}$ і $G_i(x) = \{g_1(x), \ldots, g_i(x)\}$ при $i = 1, \ldots, n$ і $x \in S_{k-1}$. Відображення G: $S_{k-1} \to \mathbb{L}$, як і F, неперервне знизу. За побудовою $S_{k-1} \subseteq S_{k-2} \subseteq \cdots \subseteq S_1$ і $S_i = LC(f_i|_{E_i})$, де $S_i \subseteq E_i \subseteq S_{i-1}$ при $i = 1, \ldots, k-1$. Тому в кожній точці з S_{k-1} відображення G_{k-1}: $S_{k-1} \to \mathbb{L}$ локально стале, тобто $LC(G_{k-1}) = S_{k-1}$. Тоді за лемою 2, застосованою до відображення G замість F, функція g_k: $S_{k-1} \to \mathbb{R}$ напівнеперервна зверху. Покладемо $E_k = C(g_k)$. За теоремою A множина E_k залишкова в S_{k-1}. За лемою 3, яку знову ж таки ми застосовуємо до відображення G замість F, отримуємо, що $E_k \subseteq Min(g_k)$. Тоді для звуження $h_k = g_k|_{E_k} = f_k|_{E_k}$ будемо мати $Min(h_k) = E_k$. Оскільки залишкова множина в залишковому підпросторі залишається залишковою і у всьому просторі, то E_k – залишкова множина в X. За теоремою C підпростір E_k є берівським. Крім того, він задовольняє другу аксіому зліченності, отже, за теоремою B множина $S_k = LC(h_k)$ буде відкритою і всюди щільною в E_k. Оскільки $g_k = f_k|_{S_{k-1}}$ і $h_k = f_k|_{E_k}$, то побудову завершено.

За лемою 1 для функції f_n: $X \to \mathbb{R}$ маємо $Min(f_n) = X$. Тоді за теоремою B множина $S_n = LC(f_n)$ відкрита і всюди щільна в X. Для кожної точки $x_0 \in S_n$ існують її відкритий окіл U в X і числа $y_1, \ldots, y_n$, такі, що $f_k(x) = y_k$ при $x \in S = U \cap S_{n-1} \cap S_n$ і $k = 1, \ldots, n-1$, а $f_n(x) = y_n$ на U. Множина $U \cap S_n$ відкрита в X і щільна в U, а множина S_{n-1} щільна в X. Тому множина S щільна в U. Застосувавши лему 4 до звуження $F|_U$: $U \to \mathbb{L}$, ми отримаємо, що відображення $F|_U$ стале. Отже, $S_n \subseteq LC(F)$. Оскільки обернене включення очевидне, то $LC(F) = S_n = LC(f_n)$. Звідси й випливає, що $LC(F)$ – це відкрита всюди щільна в X множина.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Neubrunn T.* Quasi-continuity // Real Anal. Exch.— 1988-1989.— **14**, № 3.— P.259—306.

2. *Debs G.* Points de continuité d'une function séparément continue // Proc. Amer. Math. Soc.— 1986.— **97**, № 1.— C.167—176.

3. *Кендеров П.С.* Многозначные отображения и их свойства, подобные непрерывности // Успехи мат. наук.— 1980.— **35**, № 3.— C.194—196.

4. *Кожукар О.Г., Маслюченко В.К.* Навколо теорем Дебса про многозначні відображення // Наук. вісн. Чернів. ун-ту. Вип. 191 -192. Математика.— Чернівці: Рута, 2004.— C.61—66.

5. *Кожукар О.Г., Маслюченко В.К.* Компоктнозначні відображення зі значеннями в прямій Зорґенфрея // Міжнар. конф., присв. 125 річниці від дня нар. Ганса Гана. Тези доповідей. 27 червня – 3 липня 2004.— Чернівці: Рута, 2004.— C.43—44.

6. *Энгелькинг Р.* Обшая топология.— М.: Мир, 1986.— 752 с.

7. *Calbrix J., Troallic J.P.* Aplications séparément continues // C.R. Acad Sc. Paris. Sér. A.— 1979.— **288**.— P.647—648.

8. *Маслюченко В.К., Фотій О.Г.* Напівнеперервні знизу відображення з компактними значеннями в прямій Зорґенфрея // Мат. студії.— 2005 (у друці).

9. *Бурбаки Н.* Общая топология. Использование вещественных чисел в общей топологии. Функциональные пространства. Сводка результатов.— М.: Наука, 1975.— 408 с.

Стаття надійшла до редколегії 14.10.2005