УДК 517.956.4

©2005 р. В.М. Лучко

Чернівецький національний університет ім. Юрія Федьковича, Чернівці

ПРО ПЕРІОДИЧНИЙ РОЗВ'ЯЗОК ПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ ВИЩОГО ПОРЯДКУ ПО t

Доведено існування і встановлено оцінки періодичного розв'язку параболічного рівняння вищого порядку по t.

The existance of periodical solution of parabolic equation of higher order by t was proved.

Для квазілінійних параболічних рівнянь [5] отримано ознаки існування стійких періодичних розв'язків. Для дослідження даної задачі використовується метод, запропонований М.А. Красносельським (операторний метод). У [6] досліджено коректність крайових задач з періодичними умовами (на торі) за виділеною змінною та певними умовами за іншими координатами для широких класів лінійних і квазілінійних рівнянь та систем рівнянь із частинними похідними (гіперболічних, параболічних, безтипних) скінченного порядку, а також лінійних рівнянь нескінченного порядку та диференціально-операторних рівнянь. Для відшукування періодичного розв'язку звичайної системи диференціальних рівнянь розвинута теорія Флоке [1].

У даній праці ставиться задача відшукування періодичного розв'язку параболічного рівняння вищого порядку по t.

Розглянемо рівняння

$$\frac{\partial^m U}{\partial t^m} = \sum_{2bk_0+|k|\le 2bm} A_{k_0k}(t) D_t^{k_0} D_x^k U(t,x) + f(t,x), \tag{1}$$

$(t,x) \in \Pi \equiv \{(t,x), t \ge 0, x \in \Re^n\}$, де $A_{k_0k}(t)$ - відомі неперервні функції при $t \ge 0$; коефіцієнти та неоднорідність рівняння (1) є періодичними функціями з деяким періодом $\omega > 0$

$$A_{k_0k}(t+\omega) \equiv A_{k_0k}(t), f(t+\omega,x) \equiv f(t,x),$$

$t \ge 0, x \in \Re^n$. Нехай $f(t,x)$ апріорі допускає перетворення Фур'є. Застосуємо до рівняння (1) перетворення Фур'є, після чого отримаємо звичайне диференціальне рівняння вигляду

$$\frac{d^m V}{dt^m} = \sum_{2bk_0+|k|\le 2bm} A_{k_0k}(t)(i_0\sigma)^k \frac{d^{k_0}V}{dt^{k_0}} + \tilde{f}(t,\sigma), \tag{2}$$

$i_0^2 = -1$.

Рівняння (1) будемо називати параболічним, якщо дійсні частини коренів $\lambda_i(t,\sigma)$ характеристичного рівняння

$$\lambda^m - \sum_{2bk_0+|k|=2bm} A_{k_0k}(t)(i_0\sigma)^k \lambda^{k_0} = 0$$

задовольняють нерівність

$$Re\lambda_i(t,\sigma) \le -\delta|\sigma|^{2b}, \delta > 0, \sigma \in \Re^n. \tag{3}$$

Із [4,ст.18] випливає, що для однорідного рівняння (2) існує фундаментальна система розв'язків. Нехай $\tilde{K} = \{K_i(t,\sigma)\}_{i=1}^m$ фундаментальна система розв'язків відповідного однорідного рівняння (2), що задовольняє початкові умови

$$\left.\frac{d^{j-1}K_i(t,\sigma)}{dt^{j-1}}\right|_{t=0} = \delta_{ij}, i,j = \overline{1,m}, \tag{4}$$

а функція $K(t-\tau,\sigma)$ є функцією Гріна задачі Коші однорідного рівняння (2) та задовольняє умови

$$\left.\frac{d^{j-1}K(t-\tau,\sigma)}{dt^{j-1}}\right|_{t=\tau} = \delta_{j-1,m-1}, j = \overline{1,m}, \tag{5}$$

де $\delta_{ij} = \begin{cases} 0, i \neq j, \\ 1, i = j. \end{cases}$

Тоді загальний розв'язок рівняння (2) набуде вигляду

$$V(t,\sigma) = \sum_{i=1}^{m} c_i K_i(t,\sigma) +$$

$$+ \int_0^t K(t-\tau,\sigma)\tilde{f}(\tau,\sigma)d\tau. \qquad (6)$$

Для відшукування періодичного розв'язку рівняння (2) скористуємося тим, що похідна від періодичної функції є також періодична функція. Для однозначності розв'язку використаємо умову періодичності функції до $m-1$ похідної

$$\begin{cases} V(t+\omega,\sigma) = V(t,\sigma), \\ V_t'(t+\omega,\sigma) = V_t'(t,\sigma), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ V_t^{(m-1)}(t+\omega,\sigma) = V_t^{(m-1)}(t,\sigma). \end{cases} \qquad (7)$$

Оскільки (7) виконується при довільних $t \geq 0$, то покладаючи $t = 0$ та враховуючи (4), (5), отримаємо

$$(E - A(\omega,\sigma))c = \int_0^{\omega} \tilde{F}(\omega-\tau,\sigma)\tilde{f}(\tau,\sigma)d\tau,$$

де E - одинична матриця, $c = \begin{pmatrix} c_1 \\ \dots \\ c_m \end{pmatrix}$, $\tilde{F}(\omega-\tau,\sigma) = \left(\left.\frac{d^{j-1}K(t+\omega-\tau,\sigma)}{dt^{j-1}}\right|_{t=0} \right)_{j=1}^{m}$, $A(\omega,\sigma) =$

$$= \begin{pmatrix} K_1(\omega,\sigma) & \dots & K_m(\omega,\sigma) \\ K_1'(\omega,\sigma) & \dots & K_m'(\omega,\sigma) \\ \dots & \dots & \dots \\ K_1^{(m-1)}(\omega,\sigma) & \dots & K_m^{(m-1)}(\omega,\sigma) \end{pmatrix}.$$

Нехай існує обернена матриця $(E - -A(\omega,\sigma))^{-1}$, то періодичний розв'язок рівняння (2) можна подати у вигляді

$$V(t,\sigma) = \int_0^{\omega} \tilde{K}(t,\sigma)(E - A(\omega,\sigma))^{-1}\tilde{F}(\omega-\tau,\sigma) \times$$

$$\times \tilde{f}(\tau,\sigma)d\tau + \int_0^t K(t-\tau,\sigma)\tilde{f}(\tau,\sigma)d\tau. \qquad (8)$$

Застосовуючи до (8) обернене перетворення Фур'є і користуючись теоремою про перетворення Фур'є згортки, отримаємо формально зображення періодичного розв'язку рівняння (1) у вигляді

$$U(t,x) = \int_0^{\omega}\int_{\Re^n} G_1(t,\tau,x-\xi)f(\tau,\xi)d\xi +$$

$$+ \int_0^t \int_{\Re^n} G(t,\tau,x-\xi)f(\tau,\xi)d\xi, \qquad (9)$$

де

$$G_1(t,\tau,x-\xi) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\Re^n} e^{i_0(x-\xi)\sigma}\tilde{K}(t,\sigma) \times$$

$$\times (E - A(\omega,\sigma))^{-1}\tilde{F}(\omega-\tau,\sigma)d\sigma,$$

$$G(t,\tau,x-\xi) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\Re^n} e^{i_0(x-\xi)\sigma}K(t-\tau,\sigma)d\sigma.$$

Вивчимо деякі властивості матриці $A(\omega,\sigma)$.

Лема. *Визначник матриці $A(\omega,\sigma)$ відмінний від нуля для $\sigma \in \Re^n, \omega > 0$.*

Доведення. Покажемо, що $\tilde{K} = \{K_i(t+\omega,\sigma)\}_{i=1}^m$ також є фундаментальною системою однорідного рівняння (2), для цього скористуємося тим, що компоненти фундаментальної системи є розв'язками однорідного рівняння (2), тобто

$$\frac{d^m K_i(t,\sigma)}{dt^m} = \sum_{2bk_0+|k|\leq 2bm} A_{k_0k}(t)(i_0\sigma)^k \frac{d^{k_0}K_i}{dt^{k_0}},$$

отримаємо

$$\frac{d^m K_i(t+\omega,\sigma)}{dt^m} = \sum_{2bk_0+|k|\leq 2bm} A_{k_0k}(t+\omega)(i_0\sigma)^k \times$$

$$\times \frac{d^{k_0}K_i(t+\omega,\sigma)}{dt^{k_0}} = \sum_{2bk_0+|k|\leq 2bm} A_{k_0k}(t)(i_0\sigma)^k \times$$

$$\times \frac{d^{k_0}K_i(t+\omega,\sigma)}{dt^{k_0}},$$

таким чином $\tilde{K} = \{K_i(t+\omega,\sigma)\}_{i=1}^m$ є фундаментальною системою однорідного рівняння (2).

На основі цього можна записати рівність

$$\begin{pmatrix} K_1(t+\omega,\sigma) & \dots & K_m(t+\omega,\sigma) \\ K_1'(t+\omega,\sigma) & \dots & K_m'(t+\omega,\sigma) \\ \dots & \dots & \dots \\ K_1^{(m-1)}(t+\omega,\sigma) & \dots & K_m^{(m-1)}(t+\omega,\sigma) \end{pmatrix} =$$

$$= c \begin{pmatrix} K_1(t,\sigma) & \dots & K_m(t,\sigma) \\ K_1'(t,\sigma) & \dots & K_m'(t,\sigma) \\ \dots & \dots & \dots \\ K_1^{(m-1)}(t,\sigma) & \dots & K_m^{(m-1)}(t,\sigma) \end{pmatrix}, \quad (10)$$

де c - деяка матриця. Покладаючи $t = 0$ в тотожність (10) і враховуючи умови (5), знайдемо

$$c = \begin{pmatrix} K_1(\omega,\sigma) & \dots & K_m(\omega,\sigma) \\ K_1'(\omega,\sigma) & \dots & K_m'(\omega,\sigma) \\ \dots & \dots & \dots \\ K_1^{(m-1)}(\omega,\sigma) & \dots & K_m^{(m-1)}(\omega,\sigma) \end{pmatrix}.$$

Таким чином

$$\begin{pmatrix} K_1(t+\omega,\sigma) & \dots & K_m(t+\omega,\sigma) \\ K_1'(t+\omega,\sigma) & \dots & K_m'(t+\omega,\sigma) \\ \dots & \dots & \dots \\ K_1^{(m-1)}(t+\omega,\sigma) & \dots & K_m^{(m-1)}(t+\omega,\sigma) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} K_1(\omega,\sigma) & \dots & K_m(\omega,\sigma) \\ K_1'(\omega,\sigma) & \dots & K_m'(\omega,\sigma) \\ \dots & \dots & \dots \\ K_1^{(m-1)}(\omega,\sigma) & \dots & K_m^{(m-1)}(\omega,\sigma) \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} K_1(t,\sigma) & \dots & K_m(t,\sigma) \\ K_1'(t,\sigma) & \dots & K_m'(t,\sigma) \\ \dots & \dots & \dots \\ K_1^{(m-1)}(t,\sigma) & \dots & K_m^{(m-1)}(t,\sigma) \end{pmatrix}.$$

Із останньої рівності отримуємо твердження леми, що $det A(\omega,\sigma) \neq 0$. Матриця $A(\omega,\sigma)$ носить назву матриці монодромії.

Будемо вважати, що збіжний інтеграл

$$I(t,c,\omega) = \int\limits_{\Re^n} e^{-c|\sigma|^{2b}t}(E - A(\omega,\sigma))^{-1} d\sigma. \quad (A)$$

У праці [2, с.55] для функцій $K_i(t,\sigma)$ та $K(t-\tau,\sigma)$ і їх похідних, за умови параболічності, отримані оцінки при комплексних аргументах $s = \sigma + i_0\gamma$

$$|\frac{d^{k_0}}{dt^{k_0}} K_i(t,s)| \le c_{1k_0} t^{i-k_0-1} \times$$

$$\times exp\{(-\delta_1|\sigma|^{2b} + F_1|\gamma|^{2b})t\}, \quad (11)$$

$$|\frac{d^{k_0}}{dt^{k_0}} K(t-\tau,s)| \le c_{2k_0}(t-\tau)^{m-k_0-1} \times$$

$$\times exp\{(-\delta_2|\sigma|^{2b} + F_2|\gamma|^{2b})(t-\tau)\}, \quad (12)$$

$i = \overline{1,m}, \delta_1 > 0, \delta_2 > 0.$

Згідно з (11) та (12), для похідних $G_1(t,\tau,x-\xi)$ маємо

$$|D_t^{k_0} D_x^k G_1(t,\tau,x-\xi)| \le c_{k_0 k} \int\limits_{\Re^n} |\sigma|^{|k|}(E-$$

$$-A(\omega,\sigma))^{-1}(t-\tau+\omega)^{m-k_0-1} e^{-\delta_1|\sigma|^{2b}(t-\tau+\omega)} d\sigma.$$

За умови (A) отримаємо

$$|D_t^{k_0} D_x^k G_1(t,\tau,x-\xi)| \le$$

$$\le c_{k_0 k}(t-\tau+\omega)^{m-k_0-1-\frac{|k|}{2b}} I(t+\omega-\tau,\delta,\omega), \quad (13)$$

$\delta = min(\delta_1,\delta_2)$.

Якщо для норми матриці $A(\omega,\sigma)$ виконується нерівність

$$\|A\| \le a < 1, \sigma \in \Re^n, \quad (B)$$

тоді допустиме розвинення в ряд

$$(E - A(\omega,\sigma))^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k.$$

Тому для функції

$$\Psi(t,\omega,\sigma) \equiv \tilde{K}(E-A)^{-1}$$

на основі оцінок (11) при комплексних аргументах σ справедлива нерівність

$$|\Psi(t,\omega,\sigma)| \le c \cdot exp\{(-\delta|\sigma|^{2b} + F|\gamma|^{2b})(t+\omega)\}.$$

Згідно із лемою 1.1 [2, с.38], уточнюється оцінка (13) функції G_1

$$|D_t^{k_0} D_x^k G_1(t,\tau,x-\xi)| \le$$

$$\times c_{k_0 k}(t-\tau+\omega)^{m-k_0-1-\frac{|k|+n}{2b}} \times$$

$$\times exp\{-c_1|x-\xi|^{\frac{2b}{2b-1}}(t+\omega-\tau)^{-\frac{1}{2b-1}}\}. \quad (14)$$

Позначимо через $H^{(1,\alpha)}$ клас функцій $U \in C_x^{(\alpha)}(\Pi)\bigcap L_1(\Re^n)$ з нормою [3, с.47]:

$$|U|_1^{(\alpha)} = |U|_\alpha + \sup_{t\geq 0}\int_{\Re^n}|U(t,x)|dx \equiv |U|_\alpha + |U|_1.$$

Теорема 1. *Якщо рівняння (1) параболічного типу, коефіцієнти $A_{k_0k}(t)$ неперервні при $t \geq 0$, неоднорідність рівняння $f(t,x)$ та коефіцієнти є періодичними з деяким періодом $\omega > 0$, виконується умова (A), то для довільної функції $f \in H^{(1,\alpha)}$ періодичний розв'язок рівняння (1) визначається формулою (9) і для його похідних виконуються нерівності*

$$|D_t^{k_0}D_x^kU(t,x)| \leq c_{k_0k}t^{m-k_0-1-\frac{|k|}{2b}}\times$$
$$\times|f|_1 I(t,\delta,\omega) + c|f|_\alpha. \quad (15)$$

Якщо виконується умова (B), то для розв'язку рівняння (1) та його похідних справедлива нерівність

$$|D_t^{k_0}D_x^kU(t,x)| \leq c_{k_0k}t^{m-k_0-1-\frac{|k|}{2b}}|f|_{H^{(1,\alpha)}}, \quad (16)$$

$2bk_0 + |k| \leq 2bm.$

Доведення теореми аналогічне доведенню теореми із [7, ст.54].

Якщо визначник матриці $(E - A(\omega,\sigma))$ дорівнює нулеві (резонансний випадок), то неоднорідне рівняння (1) не завжди допускає періодичний розв'язок.

Розглянемо спряжене рівняння до (1) [2, ст.58]

$$\frac{\partial^m U_1}{\partial(-\tau)^m} =$$
$$= \sum_{2bk_0+|k|\leq 2bm}\frac{\partial^{k_0}}{\partial(-\tau)^{k_0}}(A'_{k_0k}(\tau)\times$$
$$\times(-1)^{|k|}D_x^kU_1(\tau,x)), \quad (17)$$

в образах Фур'є дане рівняння має вигляд

$$\frac{d^m V_1}{d(-\tau)^m} =$$
$$= \sum_{2bk_0+|k|\leq 2bm}\frac{d^{k_0}}{d(-\tau)^{k_0}}(A'_{k_0k}(\tau)(-1)^{|k|}\times$$
$$\times(i_0\sigma)^kV_1(\tau,\sigma)). \quad (18)$$

Справедлива теорема.

Теорема 2. *Нехай коефіцієнти A_{k_0k} мають k_0 неперервних похідних при $t \geq 0$, однорідне рівняння (2) допускає s лінійно незалежних розв'язків $K_s(t,\sigma), 1 \leq s \leq m$. Тоді рівняння (18), має також s лінійно незалежних розв'язків, та відповідне неоднорідне рівняння (1) має періодичний розв'язок тоді і тільки тоді, коли виконується умова*

$$\int_0^\omega d\tau\int_{\Re^n}(D_t^jG(t+\omega,\tau,x-\xi),f(\tau,\xi))d\xi = 0, \quad (19)$$

$j = \overline{0,m-1}.$

Доведення. Із [2,ст. 58] відомо, що $K_i(t,\sigma) = K_i^*(t,-\sigma)$, отже, спряжене рівняння (18), має також s лінійно незалежних розв'язків.

Нехай $V(t,\sigma)$ - деякий періодичний розв'язок неоднорідного рівняння (2), який за умов періодичності (7) задовольняє умови

$$(E-A(t+\omega,\sigma))c = \int_0^\omega \tilde{F}(t+\omega-\tau,\sigma)\tilde{f}(\tau,\sigma)d\tau,$$

де $\tilde{F}(t,\sigma) = \left(\frac{d^{j-1}K(t,\sigma)}{dt^{j-1}}\right)_{j=1}^m$. Нехай $V_1(t,\sigma)$ деякий періодичний нетривіальний розв'язок спряженого рівняння (18)

$$V_1(t,\sigma) = \sum_{i=1}^s c_iK_i^*(t,\sigma).$$

Тоді

$$(E - A^*(t+\omega,\sigma))\tilde{c} = 0,$$

таким чином

$$0 = ([E - A^*(t+\omega,\sigma)]\tilde{c}, c) =$$
$$= (\tilde{c}, [E - A^*(t+\omega,\sigma)]c) =$$
$$= (\tilde{c}, \int_0^\omega \tilde{F}(t+\omega-\tau,\sigma)\tilde{f}(\tau,\sigma)d\tau) =$$

$$= \int_0^{\omega} (\tilde{c}, \tilde{F}(t+\omega-\tau,\sigma)\tilde{f}(\tau,\sigma))d\tau =$$

$$= \int_0^{\omega} (\tilde{F}(t+\omega-\tau,\sigma)\tilde{c}, \tilde{f}(\tau,\sigma))d\tau,$$

тобто

$$\int_0^{\omega} (\tilde{F}(t+\omega-\tau,\sigma)\tilde{c}, \tilde{f}(\tau,\sigma))d\tau = 0. \qquad (20)$$

До правої та лівої частини (20) застосуємо обернене перетворення Фур'є, отримаємо

$$\int_{\Re^n} e^{i_0\sigma x} \left(\int_0^{\omega} (\tilde{F}(t+\omega-\tau,\sigma), \tilde{f}(\tau,\sigma))d\tau \right) d\sigma = 0.$$

Міняючи порядок інтегрування і на основі оцінок (12) маємо

$$\int_0^{\omega} d\tau \int_{\Re^n} (D_t^j \int_{\Re^n} e^{i_0\sigma(x-\xi)} \times$$

$$\times K(t+\omega-\tau,\sigma)d\sigma, f(\tau,\xi))d\xi = 0,$$

тобто

$$\int_0^{\omega} d\tau \int_{\Re^n} (D_t^j G(t+\omega,\tau,x-\xi), f(\tau,\xi))d\xi = 0.$$

Теорема доведена.

Висновок. Для рівняння (1) встановлені теореми про існування і єдиність періодичного розв'язку та отримано оцінки його похідних.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Демидович Б.П.* Лекции по математической теории устойчивости.— М.:Наука, 1967.— 472 с.

2. *Эйдельман С.Д.* Параболические системы.— М.:Наука, 1964.— 443 с.

3. *Матійчук М.І.* Параболічні сингулярні крайові задачі.— К.: Інститут математики НАН України, 1999.— 176 с.

4. *Степанов В.В.* Курс дифференциальных уравнений.— М.:ГИТТЛ, 1953.— 468 с.

5. *Колесов Ю.С.* О некоторых критериях существования устойчевых периодических решений квазилинейных параболических уравнений // Докл. АН СССР.— 1964.— **157**, №6.— С.1288—1290.

6. *Пташник Б.И., Ільків В.С., Кміть І.Я., Поліщук В.М.* Нелокальні крайові задачі для рівнянь із частинними похідними.— К.: Наукова думка, 2002.— 415 с.

7. *Лучко В.М.* Про двоточкову крайову задачу для параболічних рівнянь вищого порядку // Науковий вісник Чернівецького університету.— 2004.— Випуск 228. Математика.— С.51—59.

Стаття надійшла до редколегії 11.10.2005