УДК 517.51

©2005 р. С.С. Лінчук

Чернівецький національний університет ім. Юрія Федьковича, Чернівці

ПРО ЗАСТОСОВНІСТЬ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ ОПЕРАТОРІВ НЕСКІНЧЕННОГО ПОРЯДКУ

Досліджені умови застосовності диференціальних операторів нескінченного порядку відносно узагальненого диференціювання до просторів формальних степеневих рядів, що наділені нормальною топологією Кете.

The conditions of application of differential operators of infinite order respectively to generalized differentiation for spaces of formal power series equipped by normal Köthe topology are investigated.

При вивченні властивостей аналітичних розв'язків лінійних диференціальних рівнянь нескінченного порядку, умов існування та єдиності цих розв'язків природно виникає задача про знаходження критеріїв застосовності диференціальних операторів нескінченного порядку до різних класів аналітичних функцій. У працях багатьох математиків вивчалися умови застосовності диференціальних операторів нескінченного порядку до різних просторів аналітичних функцій (див. бібліографію в [1]). Але значна кількість просторів аналітичних функцій із загальноприйнятими топологіями ізоморфні деяким просторам послідовностей, чи просторам формальних степеневих рядів, що наділені нормальною топологією Кете [2]. Тому в цій статті досліджуються критерії застосовності диференціальних операторів нескінченного порядку відносно узагальненого диференціювання до широкого класу просторів формальних степеневих рядів, що наділені нормальною топологією Кете. При одержанні необхідних умов застосовності диференціальних операторів нескінченного порядку використовується принцип рівномірної обмеженості. Наведено доведення основних результатів, що анонсовані в [3].

Через H позначимо векторний простір над полем комплексних чисел формальних степеневих рядів (ф.с.р.) вигляду

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n,$$

де $f_n \in \mathbb{C}$, $n = 0, 1, \ldots$. Вважатимемо, що H містить усі многочлени. Через H^α позначимо двоїстий простір до H, тобто H^α – це простір таких ф.с.р. вигляду $v(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} v_n z^n$, що числові ряди

$$p_v(f) = \sum_{n=0}^{\infty} |v_n||f_n|$$

збігаються для кожного елемента $f \in H$. Система передднорм $\{p_v : v \in H^\alpha\}$ задає нормальну топологію ν (топологію Кете) на просторі H. Вважатимемо, що простір H досконалий, тобто $H^{\alpha\alpha} = H$. Через $M(H)$ позначимо множину мультиплікаторів простору H, тобто $M(H)$ складається з тих ф.с.р. $g(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} g_n z^n$, добуток яких за Коші з кожним елементом $f(z)$ простору H належить просторові H і оператор $(g \cdot f)(z) = g(z)f(z)$ неперервно діє в (H, ν). Вважатимемо також, що простір H (а значить, і H^α внаслідок досконалості H) має таку властивість:

C) існує монотонно спадна послідовність додатних чисел $(c_n)_{n=0}^{\infty}$ така, що ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ збігається і для кожного ф.с.р. $f(z) =$

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n z^n$ з простору H ф.с.р. $g(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{f_n}{c_n} z^n$ також належить H.

Зауважимо, що в [3] при визначенні властивості C) для простору H допущена описка: замість належності ф.с.р. $g(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n c_n z^n$ до простору H потрібно вимагати, щоб до H належав ф.с.р. $g(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{f_n}{c_n} z^n$.

Вважатимемо далі, що побудований за послідовністю ненульових комплексних чисел $(\alpha_n)_{n=0}^{\infty}$ оператор узагальненого диференціювання D_α діє в H за правилом:

$$D_\alpha f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}} f_{n+1} z^n.$$

Тоді оператор D_α діє лінійно та неперервно в просторі H. Доведемо основне твердження статті.

Теорема. *Нехай досконалий векторний простір ф.с.р. H має властивість C) і є бочковим відносно нормальної топології. Нехай, крім того, побудований за послідовністю ненульових комплексних чисел $(\alpha_n)_{n=0}^{\infty}$ оператор узагальненого диференціювання D_α діє в H і $\psi_n \in M(H)$, $n = 0, 1, \ldots$.*

Для того, щоб ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \psi_n(z) D_\alpha^n f(z) \tag{1}$$

збігався в (H, ν) для кожного ф.с.р. $f \in H$, необхідно й достатньо, щоб виконувалась умова

$$\begin{gathered} \forall u \in H^\alpha \ \exists v \in H^\alpha \ \forall n \geq 0 \ \forall k \geq n : \\ \left| \frac{\alpha_{k-n}}{\alpha_k} \right| p_u(z^{k-n} \psi_n(z)) \leq |v_k|. \end{gathered} \tag{2}$$

Доведення. Необхідність. Припустимо, що ряд (1) збігається в (H, ν) для кожного ф.с.р $f \in H$. Розглянемо послідовність лінійних неперервних операторів $(T_n)_{n=0}^{\infty}$, $T_n : H \to H$,

$$(T_n f)(z) = \psi_n(z) D_\alpha^n f(z), \ , n = 0, 1, \ldots.$$

Оскільки ряд (1) збігається в H для кожного ф.с.р. $f(z) \in H$, то тим більше для кожного ф.с.р. $f(z) \in H$ послідовність елементів $(\psi_n(z) D_\alpha f(z))_{n=0}^{\infty}$ є обмеженою в H. Тому послідовність операторів $(T_n)_{n=0}^{\infty}$ є поточково обмеженою. Оскільки простір H є бочковим, то для послідовностей лінійних неперервних відображень цього простору правильним є принцип рівномірної обмеженості. Отже, послідовність операторів $(T_n)_{n=0}^{\infty}$ є одностайно неперервною. Тому для неї виконується умова

$$\begin{gathered} \forall u \in H^\alpha \ \exists v \in H^\alpha \ \ \forall f \in H \ \forall n \geq 0 \\ p_u(T_n f) \leq p_v(f). \end{gathered} \tag{3}$$

Покладаючи в (3) $f(z) = z^k$ і враховуючи той факт, що

$$D_\alpha^n z^k = \frac{\alpha_{k-n}}{\alpha_k} z^{k-n}$$

при $k \geq n$, одержуємо, що (2) виконується. Необхідність умов теореми доведено.

Достатність. Нехай умова (2) виконується. Зафіксуємо довільний ф.с.р $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n z^n \in H$ і покажемо, що відповідний ряд (1) збігається в H. Оскільки простір H є досконалим, то простір (H, ν) є повним [2]. Тому для збіжності ряду (1) досить довести, що послідовність його частинних сум є фундаментальною, тобто що для неї виконується умова

$$\begin{gathered} \forall u \in H^\alpha \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall m \geq N \ \forall p = 1, 2, \ldots \\ p_u \left(\sum_{n=m+1}^{m+p} \psi_n(z) D_\alpha^n f(z) \right) < \varepsilon \end{gathered} \tag{4}$$

Оскільки ф.с.р. $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n z^n \in H$, то за властивістю С) виберемо монотонно спадну послідовність додатних чисел $(c_n)_{n=0}^{\infty}$ таку, що числовий ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ збігається і ф.с.р. $g(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{f_n}{c_n} z^n \in H$.

Зафіксуємо довільний елемент $u(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n z^n \in H^\alpha$. Для нього виберемо ф.с.р.

$v(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} v_n z^n \in H^\alpha$ згідно з умовою (2). Позначимо $p_v(g) = S$.

Зафіксуємо довільне $\varepsilon > 0$. Нехай N – таке натуральне число, що

$$\forall m \geq N \text{ і } \forall p = 1, 2, \ldots$$
$$\sum_{n=m+1}^{m+p} c_n < \frac{\varepsilon}{S}. \tag{5}$$

Тоді, використовуючи (2) і (5), одержимо, що для довільного $m \geq N$ і довільного $p \in \mathbb{N}$:

$$p_u \left(\sum_{n=m+1}^{m+p} \psi_n(z) D_\alpha^n f(z) \right) =$$
$$= p_u \left(\sum_{n=m+1}^{m+p} \psi_n(z) \sum_{k=n}^{\infty} f_k \frac{\alpha_{k-n}}{\alpha_k} z^{k-n} \right) \leq$$
$$\leq \sum_{n=m+1}^{m+p} \sum_{k=n}^{\infty} |f_k| \left| \frac{\alpha_{k-n}}{\alpha_k} \right| p_u(z^{k-n} \psi_n(z)) \leq$$
$$\leq \sum_{n=m+1}^{m+p} \sum_{k=n}^{\infty} |f_k||v_k| = \sum_{n=m+1}^{m+p} \sum_{k=n}^{\infty} c_k \frac{|f_k|}{c_k} |v_k| \leq$$
$$\leq \sum_{n=m+1}^{m+p} c_n S < \varepsilon.$$

Отже, умова (4) виконується, чим і завершується доведення теореми.

Оскільки властивість C) притаманна більшості просторів ф.с.р., ізоморфних просторам послідовностей, що входять до класифікації [1], то з цієї теореми одержуємо критерії застосовності диференціальних операторів нескінченного порядку відносно узагальненого диференціювання до різних класів підпросторів простору цілих функцій [1].

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Коробейник Ю.Ф.* Операторы сдвига на числовых семействах.— Ростов-на-Дону: Изд-во Ростовского ун-та, 1983.— 160с.

2. *Köthe G.* Topologische lineare Räume. Bd.1.— Berlin, 1960.— 307 p.

3. *Лінчук С.С.* Про застосовність диференціальних операторів нескінченного порядку відносно узагальненого диференціювання // Міжнародна конференція пам'яті В.Я. Буняковського (Київ, 16–21 серпня 2004 р.): Тези доповідей.— Київ, 2004.— С.89—90.

Стаття надійшла до редколегії 15.02.2005