УДК 517.929

©2005 р. І.І. Клевчук

Чернівецький національний університет ім. Юрія Федьковича, Чернівці

КВАЗІОПТИМАЛЬНА СТАБІЛІЗАЦІЯ ЛІНІЙНИХ КЕРОВАНИХ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНИХ СИСТЕМ ІЗ ЗАПІЗНЕННЯМ

Розглядається система лінійних керованих сингулярно збурених систем із запізненням. Одержано зображення інтегральних многовидів цієї системи. Розв'язок задачі квазіоптимальної стабілізації шукається у вигляді асимптотичного розкладу за степенями ε.

We consider a linear singularly perturbed system of difference-differential equations with control. We obtain a representation of an integral manifolds of this system. We search the solution of the problem of quasioptimal stabilization in the form of expansion into a power series about ε.

Розглянемо систему

$$\frac{dx}{dt} = Lx(t) + My(t) + Ny(t-\varepsilon\Delta) + Au(t),$$

$$\varepsilon\frac{dy}{dt} = By(t) + Cy(t-\varepsilon\Delta) + Dx(t), \qquad (1)$$

де ε — малий додатний параметр, $\Delta > 0$, $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$, $u \in \mathbb{R}^r$, всі корені характеристичного рівняння $\det(B + C\exp(-\lambda\Delta) - \lambda E) = 0$ лежать в півплощині $\operatorname{Re}\lambda < 0$. Керування $u(t)$ повинно бути вибране так, щоб забезпечити асимптотичну стійкість розв'язків системи (1) і мінімізувати функціонал

$$J(u) = \int\limits_0^\infty (x'(t)Qx(t) + u'(t)Fu(t))dt, \qquad (2)$$

де Q та F – додатно визначені симетричні матриці, $x(t)$ – розв'язок системи (1) на многовиді $y_t = p(\varepsilon)x(t)$. Тут y_t – елемент простору $\mathbb{C} = \mathbb{C}[-\varepsilon\Delta, 0]$, заданий функцією $y_t(\theta) = y(t+\theta)$, $-\varepsilon\Delta \le \theta \le 0$.

Стабілізація керованих систем із запізненням розглядалася в [1, 2] та ін. При цьому задача зводилася до стабілізації системи звичайних диференціальних рівнянь. При квазіоптимальній стабілізації [3, с. 226] розв'язок шукається у вигляді асимптотичного розкладу за степенями малого параметра. У цій статті використовується метод інтегральних многовидів для сингулярно збурених систем із запізненням [4 – 7]. Знайдено зображення інтегральних многовидів і наближений розв'язок задачі квазіоптимальної стабілізації.

Поряд із системою (1) розглянемо систему

$$\frac{dx}{dt} = Lx(t) + My(t) + Ny(t-\varepsilon\Delta) + Agx(t),$$

$$\varepsilon\frac{dy}{dt} = By(t) + Cy(t-\varepsilon\Delta) + Dx(t), \qquad (3)$$

де матрицю g розмірності $r \times n$ будемо вважати параметром. Система (3) еквівалентна такій системі рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = Lx(t) + My(t) + Ny(t-\varepsilon\Delta) + Agx(t),$$

$$y_t = T(t)y_0 + \int\limits_0^t T(t-s)X_0Dx(s)ds,$$

де $X_0(\theta) = 0$, $-\varepsilon\Delta \le \theta < 0$, $X_0(0) = E$, E – одинична матриця; $T(t)$ – оператор зсуву за розв'язками рівняння

$$\varepsilon\frac{dy}{dt} = By(t) + Cy(t-\varepsilon\Delta).$$

Для оператора T справджується оцінка

$$|T(t)\varphi| \le K_1|\varphi|\exp\left[-\frac{\alpha t}{\varepsilon}\right],$$

де $t \ge 0$, $\alpha > 0$, $K_1 > 0$, $\varphi \in \mathbb{C}$, $|\cdot|$ – норма в просторі $\mathbb{C}$.

Теорема 1. *Нехай відносно системи (1) виконуються вищевказані умови. Тоді можна вказати таке* $\varepsilon_0 > 0$, *що при* $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ *існує інтегральний многовид системи (3), що може бути зображений у вигляді* $y_t = p(\varepsilon, g)x$, *де* $p(\varepsilon, g)\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ *– лінійний обмежений оператор.*

Доведення. Розглянемо систему інтегральних рівнянь

$$x(t) = H(t) - \int_t^0 H(t-s)[My(s) + Ny(s-\varepsilon\Delta)]ds,$$

$$y_t = \frac{1}{\varepsilon}\int_{-\infty}^{t} T(t-s)X_0Dx(s)ds, \qquad (4)$$

де $H(t)$ – фундаментальна матриця рівняння $\dfrac{dx}{dt} = Lx + Agx$, $H(t) = \exp[(L+Ag)t]$.

Існування розв'язків системи (4) доведемо за допомогою методу послідовних наближень

$$y_t^{(0)} = 0, \quad x_n(t) = H(t) - \int_t^0 H(t-s)[My^{(n)}(s) + Ny^{(n)}(s-\varepsilon\Delta)]ds,$$

$$y_t^{(n+1)} = \frac{1}{\varepsilon}\int_{-\infty}^{t} T(t-s)X_0Dx_n(s)ds,$$

$$n = 0, 1, 2, \ldots$$

Виконується нерівність $|H(t)| \leq \exp[-M_1t]$, $t \leq 0$, $M_1 > 0$.

Доведемо, що справджується оцінка

$$|y_t^{(q)} - y_t^{(q-1)}| \leq \frac{N_1}{2^q}\exp\left[\frac{\alpha + \varepsilon M_1}{2\varepsilon}(-t)\right], \quad (5)$$

де $q = 1, 2, \ldots$, $N_1 = \dfrac{4K_1M_1}{\alpha}$, $\varepsilon < \min\left(\dfrac{\alpha}{2M_1}, \dfrac{\alpha^2}{32K_1M_1^2}\right)$, $t \leq 0$.

При $q = 1$ нерівність (5) справджується.

Нехай нерівність (5) справджується при $q = n$. Тоді одержимо

$$|x_n(t) - x_{n-1}(t)| \leq \frac{2M_1N_1\varepsilon}{2^n(\alpha - \varepsilon M_1)} \times \exp\left[\frac{\alpha + \varepsilon M_1}{2\varepsilon}(-t)\right].$$

Звідси знаходимо

$$|y_t^{(n+1)} - y_t^{(n)}| \leq \int_{-\infty}^{t} \exp\left[\frac{\alpha}{\varepsilon}(s-t)\right] \times$$

$$\times \frac{2K_1M_1^2N_1}{(\alpha - \varepsilon M_1)2^n}\exp\left[\frac{\alpha + \varepsilon M_1}{2\varepsilon}(-s)\right]ds =$$

$$= \frac{4\varepsilon K_1M_1^2N_1}{(\alpha - \varepsilon M_1)^2 2^n}\exp\left[\frac{\alpha + \varepsilon M_1}{2\varepsilon}(-t)\right] \leq$$

$$\leq \frac{32K_1M_1^2\varepsilon N_1}{\alpha^2 \cdot 2^{n+1}}\exp\left[\frac{\alpha + \varepsilon M_1}{2\varepsilon}(-t)\right].$$

Із виконання нерівності (5) при $q = n$ випливає виконання при $q = n+1$. Отже, нерівність справджується при всіх натуральних q. Із (5) випливає, що послідовність $(x_n(t), y_t^{(n)})$ збігається до деякої функції $(x(t), y_t)$, яка є розв'язком системи (4).

Підставляючи в (5) $t = 0$, одержимо зображення інтегрального многовиду

$$p(\varepsilon, g) = y_0 = \frac{1}{\varepsilon}\int_{-\infty}^{0} T(-s)X_0Dx(s)ds.$$

Якщо просумувати нерівності (5) по q і підставити $t = 0$, то одержимо оцінку $|p(\varepsilon, g)| \leq N_1$.

Теорема доведена.

Зауваження 1. Оператор $p(\varepsilon, g)$ є неперервно диференційовним відносно ε, g.

Диференційовність відносно g випливає із диференційовності послідовності $(x_n(t), y_t^{(n)})$.

Аналогічно [7] знайдемо наближене зображення оператора $p(\varepsilon, g)$, звідки буде випливати диференційовність відносно ε при $\varepsilon = 0$. Інтегральний многовид системи (3) будемо шукати у вигляді $y(t) = (P_0 + \varepsilon Q)x(t) + O(\varepsilon^2)$, де $P_0 = -(B+C)^{-1}D$, а матрицю Q визначимо пізніше. Тоді

$$y(t+\theta) = P_0x(t+\theta) + \varepsilon Qx(t) + O(\varepsilon^2) =$$

$$= P_0x(t) + \theta P_0\frac{dx}{dt} + \varepsilon Qx(t) + O(\varepsilon^2) =$$

$$= P_0x(t) + \theta\Psi x(t) + \varepsilon Qx(t) + O(\varepsilon^2),$$

де $\Psi = P_0[L + Ag + (M+N)P_0]$. Звідси $y(t-\varepsilon\Delta) = (P_0 - \varepsilon\Delta\Psi + \varepsilon Q)x(t) + O(\varepsilon^2)$. Тому

$$By(t) + Cy(t-\varepsilon\Delta) + Dx(t) =$$

$$= \varepsilon(BQ + CQ - \Delta C\Psi)x(t) + O(\varepsilon^2).$$

Крім того,

$$\frac{dy}{dt} = P_0\frac{dx}{dt} + O(\varepsilon) = \Psi x(t) + O(\varepsilon).$$

Підставляючи знайдені вирази в систему (3) і зберігаючи тільки члени порядку ε, одержимо

$$\varepsilon\Psi x(t) = \varepsilon(BQ + CQ - \Delta C\Psi)x(t),$$

звідки знаходимо

$$Q = (B+C)^{-1}(E + \Delta C)\Psi.$$

Отже, інтегральний многовид системи (3) можна зобразити у вигляді $y_t = p(\varepsilon, g)x$, де $p(\varepsilon, g) = P_0 + \varepsilon Q + \theta\Psi + O(\varepsilon^2)$, $-\varepsilon\Delta \le \theta \le 0$.

Аналогічно [4, 6] можна вказати таке $\varepsilon_1 > 0$, що при $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$ існує інтегральний многовид системи (3), що може бути зображений у вигляді $x = h(\varepsilon, g)y_t$, де $h(\varepsilon, g)$: $\mathbb{C} \to \mathbb{R}^n$ – лінійний обмежений оператор.

Для оператора $h(\varepsilon, g)$ справджується оцінка $|h(\varepsilon, g)| \le \varepsilon\gamma$, $\gamma > 0$, і можна одержати зображення

$$h(\varepsilon, g)y_t = \varepsilon(M+N)(B+C)^{-1}y(t) +$$

$$+ [M(B+C)^{-1}C - N(B+C)^{-1}B] \times$$

$$\times \int\limits_{-\varepsilon\Delta}^{0} y(t+\theta)d\theta + O(\varepsilon^2).$$

Для перевірки досить продиференціювати ліву і праву частину системи (3) і відкинути доданки порядку $O(\varepsilon)$. В результаті одержимо рівність

$$My(t) + Ny(t-\varepsilon\Delta) = (M+N)(B+C)^{-1} \times$$

$$\times (By(t) + Cy(t-\varepsilon\Delta)) + [M(B+C)^{-1}C -$$

$$- N(B+C)^{-1}B](y(t) - y(t-\varepsilon\Delta)).$$

Прирівнюючи коефіцієнти при $y(t)$ та $y(t-\varepsilon\Delta)$, переконуємося, що ми одержали тотожність.

Розглянемо задачу квазіоптимальної стабілізації системи (1). Підставивши $\varepsilon = 0$, одержимо вироджену систему, із якої знайдемо $y(t) = -(B+C)^{-1}Dx(t)$. Тоді перше рівняння системи (1) набуде вигляду

$$\frac{dx}{dt} = [L + (M+N)P_0]x(t) + Au(t), \qquad (6)$$

де $P_0 = -(B+C)^{-1}D$. Нехай система (6) цілком керована. Тоді існує розв'язок задачі (6), (2), причому $u(t) = g_0x(t)$, де $g_0 = -F^{-1}A'K_0$, симетрична додатно визначена матриця K_0 є розв'язком матричного алгебраїчного рівняння Ріккаті $KL_0 + L_0'K - KRK + Q = 0$, $R = AF^{-1}A'$, $L_0 = L + (M+N)P_0$.

Щоб одержати наступне наближення, побудуємо інтегральний многовид $y_t = p(\varepsilon, g_0)x$ системи (3), в якій $g = g_0$. Підставивши в перше рівняння системи (1), одержимо

$$\frac{dx}{dt} = L_1(\varepsilon)x(t) + Au(t), \qquad (7)$$

де $L_1(\varepsilon) = L_0 + \varepsilon G_1$, $G_1 = MQ + NQ - \Delta N\Psi$. Розв'язуючи задачу (7), (2), одержимо $u(t) = \overline{g}(\varepsilon)x(t)$, $\overline{g}(\varepsilon) = -F^{-1}A'\overline{K}(\varepsilon)$, де симетрична додатно визначена матриця $\overline{K}(\varepsilon)$ є розв'язком матричного алгебраїчного рівняння Ріккаті

$$KL_1(\varepsilon) + L_1'(\varepsilon)K - KRK + Q = 0. \qquad (8)$$

Розв'язок рівняння (8) має вигляд $\overline{K}(\varepsilon) = K_0 + \varepsilon H + O(\varepsilon^2)$, де матриця H задовольняє рівняння Ляпунова

$$H(L_0 - RK_0) + (L_0 - RK_0)'H = -K_0G_1 - G_1'K_0. \qquad (9)$$

Оскільки матриця $L_0 - RK_0$ стійка, то існує єдиний розв'язок рівняння (9), що має вигляд

$$H = \int\limits_0^{\infty} \exp[(L_0 - RK_0)'t](K_0G_1 + G_1'K_0) \times$$

$$\times \exp[(L_0 - RK_0)t]dt.$$

Аналогічно можна знаходити вищі наближення. Нехай відоме наближення матриці $g(\varepsilon)$ вигляду $g(\varepsilon) = g_0 + \varepsilon g_1 + \cdots + \varepsilon^{k-1} g_{k-1} + O(\varepsilon^k)$, $k = 2, 3, \ldots$. Тоді інтегральний многовид системи (3), де $g = g(\varepsilon)$, будемо шукати у вигляді $y(t) = (P_0 + \varepsilon P_1 + \cdots + \varepsilon^k P_k)x(t) + O(\varepsilon^{k+1})$. Знаходження матриці P_k зводиться до розв'язування рівняння вигляду $(B+C)P_k = \Psi_k$. Це дозволить знайти наступне наближення $K(\varepsilon) = K_0 + \varepsilon K_1 + \cdots + \varepsilon^k K_k + O(\varepsilon^{k+1})$ розв'язку матричного рівняння Ріккаті. Знаходження K_k зводиться до розв'язування рівняння Ляпунова вигляду $K_k(L_0 - RK_0) + (L_0 - RK_0)' K_k = G_k$. Звідси знайдемо наступне наближення матриці $g(\varepsilon) = -F^{-1} A' K(\varepsilon)$. Таким методом можна шукати асимптотичні наближення розв'язку.

Існування розв'язку задачі квазіоптимальної стабілізації випливає із теореми про неявну функцію [8, с. 492]. У нас $p(\varepsilon, g(\varepsilon))$ та $K(\varepsilon)$ знаходяться як неявні функції від ε.

Позначимо $\xi(\varepsilon) = p(\varepsilon)|_{\theta=0}$, $\eta(\varepsilon) = p(\varepsilon)|_{\theta=-\varepsilon\Delta}$ і розглянемо систему

$$\frac{dv}{dt} = (L + M\xi(\varepsilon) + N\eta(\varepsilon) + Ag(\varepsilon))v,$$

$$\frac{dw}{dt} = Bw(t) + Cw(t - \varepsilon\Delta) + Dh(\varepsilon)w_t. \quad (10)$$

Аналогічно [4, 6] можна показати, що система (10) за допомогою заміни $x = v + h(\varepsilon)w_t$, $y_t = w_t + p(\varepsilon)v$ зводиться до вигляду (3), де $g = g(\varepsilon)$. Із асимптотичної стійкості розв'язків системи (10) випливає асимптотична стійкість розв'язків системи (3), де $g = g(\varepsilon)$.

Зауваження 2. У випадку $N = C = 0$ система (1) буде системою звичайних диференціальних рівнянь. Тоді задача квазіоптимальної стабілізації зводиться до розв'язування відносно матриць p, K системи рівнянь

$$KL_1 + L_1' K - KAF^{-1}A'K + Q = 0,$$

$$\varepsilon p(L_1 + Ag) = Bp + D,$$

де $L_1 = L + Mp$, $g = -F^{-1}A'K$.

Зауваження 3. Для розв'язування матричних алгебраїчних рівнянь Ріккаті та Ляпунова можна застосовувати метод Ньютона-Рафсона, метод матричної сигнум-функції або QR-алгоритм [3].

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Осипов Ю.С.* О стабилизации управляемых систем с запаздыванием // Дифференц. уравнения.— 1965.— **1**, № 5.— С.605—618.

2. *Осипов Ю.С.* О стабилизации нелинейных управляемых систем с запаздыванием в критическом случае одного нулевого корня // Дифференц. уравнения.— 1965.— **1**, № 7.— С.908—922.

3. *Афанасьев В.Н., Колмановский В.Б., Носов В.Р.* Математическая теория конструирования систем управления.— М.: Высшая школа, 1989.— 447 с.

4. *Фодчук В.І., Клевчук І.І.* Розщеплення лінійних диференціально-функціональних рівнянь // Доп. АН УРСР. Сер. А.— 1986.— № 8.— С.23—25.

5. *Митропольский Ю.А., Фодчук В.И., Клевчук И.И.* Интегральные многообразия, устойчивость и бифуркация решение сингулярно возмущенных дифференциально-функциональных уравнений // Укр. мат. журн.— 1986.— **38**, № 3.— С.335—340.

6. *Клевчук И.И.* Расщепление линейных дифференциально-функциональных уравнений нейтрального типа // Нелінійні коливання.— 1999.— **2**, № 4.— С.490—500.

7. *Клевчук І.І.* Застосування асимптотичних методів до регулярно і сингулярно збурених диференціально-різницевих рівнянь // Наук. вісник Чернівецького ун-ту: Зб. наук. пр. Вип. 150. Математика.— Чернівці: Рута, 2002.— С.36—41.

8. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа.— М.: Наука, 1981.— 544 с.

Стаття надійшла до редколегії 16.03.2005