УДК 517.51

©2005 р. О.О. Карлова, О.В. Собчук

Чернівецький національний університет ім. Юрія Федьковича, Чернівці

ДЕЯКІ ВЛАСТИВОСТІ PP-ПРОСТОРІВ

Доводиться замкненість класу PP-просторів відносно зліченних добутків, сепарабельність компактного PP-простору та метризовність зліченно компактного гаусдорфового PP-простору і метризовність псевдокомпактного PP-простору.

It is obtained that the class of PP-spaces is closed under countable products. Besides it is proved that a compact PP-space is separable and a countable compact Hausdorff or a pseudo-compact PP-space is metrizable.

У теорії нарізно неперервних відображень важливе місце посідають дослідження берівської класифікації нарізно неперервних функцій, які беруть свій початок з класичної праці А. Лебеґа [1] і були продовжені у працях багатьох математиків.

Аналіз методу В. Рудіна [2], який базується на паракомпактності метризовного простору і був застосований до дослідження берівської класифікації дійснозначних нарізно неперервних відображень, заданих на добутку метризовного і топологічного просторів, привів до поняття PP-простору, яке було введене О. Собчуком у [3]. У зв'язку з цим природним є дослідження властивостей PP-просторів і взаємозв'язків класу PP-просторів з іншими класами просторів.

Нагадаємо [3], що топологічний простір X називається *PP-простором*, якщо існує послідовність $((h_{i,n} : i \in I_n))_{n=1}^{\infty}$ локально скінченних розбиттів одиниці на X і існує послідовність $((x_{i,n} : i \in I_n))_{n=1}^{\infty}$ сімей точок з X, такі, що для довільного $x \in X$ і для довільного околу U точки x існує номер n_o, такий, що для всіх $n \geq n_o$ і для всіх $i \in I_n$ з умови $x \in \mathrm{supp} h_{i,n} = \{x \in X : h_{i,n}(x) \neq 0\}$ випливає, що $x_{i,n} \in U$.

Зауважимо, що це означення рівносильне такому: топологічний простір X є PP-простором, якщо існує послідовність $((U_{i,n} : i \in I_n))_{n=1}^{\infty}$ локально скінченних покриттів цього простору функціонально відкритими множинами і існує послідовність $((x_{i,n} : i \in I_n))_{n=1}^{\infty}$ сімей точок з X, такі, що для довільного $x \in X$ і для довільного околу U точки x існує номер n_o, такий, що для всіх $n \geq n_o$ і для всіх $i \in I_n$ з умови $x \in U_{i,n}$ випливає, що $x_{i,n} \in U$.

У [4] було з'ясовано, що паракомпактні σ-метризовні простори, а також топологічні векторні простори, які подаються як об'єднання зростаючої послідовності метризовних підпросторів, є PP-просторами.

Покажемо, що клас PP-просторів замкнений відносно зліченних добутків.

Теорема 1. *Нехай X_k, $k \in \mathbb{N}$ – PP-простори. Тоді $X = \prod\limits_{k=1}^{\infty} X_k$ також PP-простір.*

Доведення. Зафіксуємо довільну точку $y \in X$, $y = (y_k)_{k=1}^{\infty}$, де $y_k \in X_k$. Оскільки X_k є PP-простором, то згідно з означенням, існують послідовність $((h_{i_k,n} : i_k \in I_{n,k}))_{n=1}^{\infty}$ локально скінченних розбиттів одиниці на X_k і послідовність $((\xi_{i_k,n} : i_k \in I_{n,k}))_{n=1}^{\infty}$ сімей точок простору X_k, такі, що для кожного $k \in \mathbb{N}$, довільної точки ξ з простору X_k і кожного околу U точки ξ існує номер n_o, такий, що для всіх номерів $n \geq n_o$ і всіх $i_k \in I_{n,k}$ з умови $\xi \in \mathrm{supp} h_{i_k,n}$ випливає, що $\xi_{i_k,n} \in U$.

Побудуємо відповідні послідовності розбиттів одиниці на X та сімей точок з X. Нехай

$$I_n = \prod_{k=1}^{\infty} I_{n,k}.$$

Для кожного $n \in \mathbb{N}$, $i \in I_n$ та $x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots) \in X$ покладемо

$$h_{i,n}(x) = h_{i_1,n}(\xi_1) \cdots h_{i_n,n}(\xi_n),$$

$$x_{i,n} = (\xi_{i_1,n}, \dots, \xi_{i_n,n}, y_{n+1}, y_{n+2}, \dots)$$

і покажемо, що визначені таким чином послідовності сімей задовольняють умову з означення PP-простору.

Нехай $x = (\xi_1, \xi_2, \dots) \in X$ і $U = U_1 \times U_2 \times \dots \times U_m \times X_{m+1} \times \dots$ – довільний базисний окіл точки x. Для кожного $j = 1, \dots, m$ існує номер n_j, такий, що для довільного $n \geq n_j$ і для довільного $i_j \in I_{j,n}$ з того, що $\xi_j \in \mathrm{supp} h_{i_j,n}$ випливає, що $\xi_{i_j,n} \in U_j$. Покладемо $n_o = \max\{m, n_1, \dots, n_m\}$. Нехай $n \geq n_o$ і $i \in I_n$ такі, що $x \in \mathrm{supp} h_{i,n}$. Тоді, очевидно, $x_{i,n} \in U$. $\diamond$

Теорема 2. *Кожний компактний PP-простір сепарабельний.*

Доведення. Нехай X – PP-простір, $((U_{i,n} : i \in I_n))_{n=1}^{\infty}$ – послідовність локально скінченних відкритих покриттів простору X функціонально відкритими множинами і $((x_{i,n} : i \in I_n))_{n=1}^{\infty}$ – послідовність сімей точок простору X з означення PP-простору. Оскільки X – компактний простір, то для кожного n сім'я $\mathcal{U}_n = (U_{i,n} : i \in I_n)$ скінченна [5, с. 304], тобто $\mathcal{U}_n = (U_{k,n} : k = 1, \dots, m_n)$. Покладемо

$$D_n = \{x_{k,n} : k = 1, \dots, m_n\}$$

і

$$D = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n.$$

Тоді множина D зліченна, як зліченне об'єднання скінченних множин. Покажемо, що D всюди щільна множина в X. Справді, нехай $x \in X$ і U – довільний окіл точки x. Доведемо, що $U \cap D \neq \emptyset$. Оскільки X – PP-простір, то існує такий номер n_o, що для всіх номерів $n \geq n_o$ і всіх $k = 1, \dots m_n$ з того, що $x \in U_{k,n}$ випливає, що $x_{k,n} \in U$. Сім'я $\mathcal{U}_{n_o}$ утворює покриття простору X, тому існує таке k, $1 \leq k \leq m_{n_o}$, що $x \in U_{k,n_o}$, тоді $x_{k_{n_o}} \in U \cap D$, що і треба було довести. $\diamond$

Покажемо тепер, що умови типу компактності забезпечують метризовність PP-просторів. Нам буде потрібне таке допоміжне твердження.

Лема 3.*Нехай X – гаусдорфовий PP-простір і $((U_{i,n} : i \in I_n))_{n=1}^{\infty}$ – послідовність функціонально відкритих множин з означення PP-простору. Тоді для довільних різних точок $x, y \in X$ існує такий номер n_o, що для всіх $n \geq n_o$ і всіх $i \in I_n$ з того, що $x \in U_{i,n}$ випливає, що $y \notin U_{i,n}$.*

Доведення. Оскільки простір X гаусдорфовий, то існують неперетинні околи U і V точок x і y відповідно. Згідно з означенням PP-простору, існує номер n_1, такий, що для всіх $n \geq n_1$ і всіх $i \in I_n$ з того, що $x \in U_{i,n}$ випливає, що $x_{i,n} \in U$. Існує номер n_2, такий, що для всіх $n \geq n_2$ і $i \in I_n$ з того, що $y \in U_{i,n}$ випливає, що $x_{i,n} \in V$. Покладемо $n_o = \max\{n_1, n_2\}$. Тоді для всіх номерів $n \geq n_o$ і всіх $i \in I_n$, таких, що $x \in U_{i,n}$ будемо мати, що $x_{i,n} \in U$, звідки $x_{i,n} \notin V$ і $y \notin U_{i,n}$. $\diamond$

Нагадаємо, що *діагоналлю* топологічного простору X називається множина $\Delta = \{(x, x) : x \in X\}$.

Твердження 4. *Нехай X – гаусдорфовий PP-простір. Тоді X має G_δ-діагональ.*

Доведення. Для кожного $n \in \mathbb{N}$ позначимо $G_n = \bigcup\limits_{i \in I_n} (U_{i,n} \times U_{i,n})$. Зрозуміло, що всі множини G_n відкриті в добутку $X \times X$. Покажемо, що $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} G_n = \Delta$. Візьмемо дві різні точки x, y з простору X і доведемо, що $(x, y) \notin \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$. Нехай це не так, тобто для кожного номера $n \in \mathbb{N}$ виконується включення $(x, y) \in G_n$. Тоді для всіх n існує таке $i \in I_n$, що $x \in U_{i,n}$ і $y \in U_{i,n}$. З іншого боку, згідно з лемою 3, існує номер n_o, такий, що для всіх $n \geq n_o$ і всіх $i \in I_n$ з того, що $x \in U_{i,n}$ випливає, що $y \notin U_{i,n}$, що приводить до суперечності. ◇

Теорема 5. *Зліченно компактний гаусдорфовий PP-простір метризовний.*

Доведення. Нехай X – зліченно компактний PP-простір. Згідно з твердженням 4, простір X має G_δ-діагональ. Тоді з [5, с. 360] випливає, що простір X компактний. Згідно з [5, с. 392], кожний компактний простір з G_δ-діагоналлю метризовний. ◇

Теорема 6. *Псевдокомпактний PP-простір метризовний.*

Доведення. Нехай X – псевдокомпактний PP-простір і $((U_{i,n} : i \in I_n))_{n=1}^{\infty}$ – послідовність локально скінченних покриттів простору X функціонально відкритими множинами з означення PP-простору. Оскільки простір X псевдокомпактний, то згідно з [5, с. 311] для кожного $n \in \mathbb{N}$ множина I_n скінченна. Згідно з означенням PP-простору, $U_{i,n} = h_{i,n}^{-1}((0,1])$, де $h_{i,n} : X \to [0,1]$ – неперервні функції. Для всіх $n, m \in \mathbb{N}$ і всіх $i \in I_n$ покладемо

$$V_{i,n,m} = h_{i,n}^{-1}((1/m, 1]),$$

$$F_{i,n,m} = h_{i,n}^{-1}([1/m, 1]).$$

Зрозуміло, що

$$V_{i,n,m} \subseteq F_{i,n,m} \subseteq U_{i,n}.$$

Для кожного $x \in X$ і $n, m \in \mathbb{N}$ позначимо

$$I_{n,m}(x) = \{i \in I_n : x \in V_{i,n,m}\}$$

і

$$F_m(x) = \bigcap_{n \le m} \bigcap_{i \in I_{n,m}(x)} F_{i,n,m}.$$

Зауважимо, що множини $F_m(x)$ є замкненими околами точки x, причому $F_{m+1}(x) \subseteq F_m(x)$. Покажемо, що

$$F(x) = \bigcap_{m=1}^{\infty} F_m(x) = \{x\}.$$

Справді, візьмемо $y \in X$ так, щоб $x \neq y$ і доведемо, що $y \notin F(x)$. Згідно з лемою 3, існують номер n_o і $i_o \in I_{n_o}$, такі, що $x \in U_{i_o,n_o}$, а $y \notin U_{i_o,n_o}$. Оскільки $x \in U_{i_o,n_o}$, то існує номер $m_o \ge n_o$ такий, що $h_{i_o,n_o}(x) > \dfrac{1}{m_o}$, тобто $x \in V_{i_o,n_o,m_o}$, звідки випливає, що $i_o \in I_{n_o,m_o}$. Оскільки $x \in V_{i_o,n_o,m_o} \subseteq F_{i_o,n_o,m_o} \subseteq U_{i_o,n_o}$, а $y \notin U_{i_o,n_o}$, то $y \notin F_{i_o,n_o,m_o}$. Отже, $y \notin F_{m_o}(x)$, тобто, $y \notin F(x)$.

Покажемо, що система

$$\mathcal{W} = \{V_{i,n,m} : x \in V_{i,n,m}\}$$

утворює базу околів точки x. Нехай U – довільний окіл точки x в X. Перенумеруємо для зручності систему $\mathcal{W}$, адже вона є зліченною. Нехай $\mathcal{W} = \{V_n : n \in \mathbb{N}\}$. Система $\{W_n = V_n \setminus \overline{U} : n \in \mathbb{N}\}$ є спадною і локально скінченною в X, причому $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} W_n = \emptyset$, тому існує таке n_o, що $W_n = \emptyset$ для всіх $n \ge n_o$. Таким чином, $V_n \setminus \overline{U} = \emptyset$, тобто $V_n \subseteq \overline{U}$ для всіх $n \ge n_o$.

Для $n, m \in \mathbb{N}$ покладемо $\mathcal{V}_{n,m} = \{V_{i,n,m} : i \in I_n\}$. Зауважимо, що система $\mathcal{V}_{n,m}$ скінченна і $\mathcal{V} = \bigcup\limits_{n,m} \mathcal{V}_{n,m}$ є передбазою в просторі X. Тоді

$$\tilde{\mathcal{V}} = \{V_1 \bigcap \cdots \bigcap V_n : V_1, \ldots, V_n \in \mathcal{V}\}$$

є зліченною базою простору X. З метризаційної теореми Нагати-Смирнова [5, с. 417] випливає, що простір X метризовний. ◇

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Lebesgue H.* Sur l'aproximation des fonctions // Bull. Sci. Math.— 1898.— **22**.— P. 278—287.
2. *Rudin W.* Lebesgue first theorem // Math. Analysis and Applications, Part B. Edited by Nachbin. Adv. in Math. Supplem.Studies 78.— Academic Press, 1981.— P.741—747.
3. *Sobchuk O.* *PP*-spaces and Baire classification // International Conference on Functional Analysis and its Applications, dedicated to the 110th anniversary of Stefan Banach. Book of abstracts (May 28-31, 2002).— Lviv, 2002.— P. 189.
4. *Собчук О.В.* Берівська класифікація і простори Лебеґа // Наук. вісн. Чернівецького ун-ту.— 2001.— вип. 111. – С. 110 - 113.
5. *Энгелькинг Р.* Общая топология.— М.: Мир, 1986.— 752 с.

Стаття надійшла до редколегії 13.10.2005