УДК 517.956.4

©2005 р. Г.П. Івасюк

Чернівецький національний університет ім. Юрія Федьковича, Чернівці

ПОЧАТКОВА ЗАДАЧА ДЛЯ МОДЕЛЬНИХ ПАРАБОЛІЧНИХ ЗА СОЛОННИКОВИМ СИСТЕМ НЕОДНОРІДНОЇ СТРУКТУРИ

Дається означення нового класу систем рівнянь, які поєднують у собі структури систем, параболічних за Солонниковим і параболічних за Ейдельманом. У модельному випадку описуються структура та властивості фундаментальної матриці розв'язків і наводяться формули для розв'язків початкової задачі.

A definition of a new class of equations systems, which combine structure of Solonnikov parabolic and Eidelman parabolic systems is given. In a model case a structure of a fundamental matrix of solutions is described and a formula for solutions of the initial problem is find.

У 1938 р. І.Г.Петровський [1] ввів досить широкий клас параболічних систем лінійних диференціальних рівнянь із частинними похідними, який на даний час найглибше і найповніше досліджений. Означення І.Г.Петровського узагальнювалось у різних напрямках. Зокрема, в 1960 р. С.Д.Ейдельман [2] розглянув новий клас систем, який узагальнював клас систем, параболічних за Петровським. У цих системах диференціювання за різними просторовими змінними мають, взагалі кажучи, різні ваги відносно диференціювання за часовою змінною, тобто системи мають векторну параболічну вагу $\overrightarrow{2b} \equiv (2b_1, \ldots, 2b_n)$. Тому такі системи названі $\overrightarrow{2b}$-параболічними. Дослідженням задачі Коші для них присвячені праці [3 – 5]. У 1964 р. В.О.Солонников [6] запропонував ще одне узагальнення параболічних за Петровським систем. У цих системах порядок оператора, який діє на невідому функцію u_j у рівнянні з номером k, може залежати як від k, так і від j. Теорія крайових задач і задачі Коші для такого класу систем детально розроблена в фундаментальній праці [7] (див. також [8]).

У даній статті розглядаються системи, які природно узагальнюють системи, параболічні за С.Д.Ейдельманом, і системи, параболічні в розумінні В.О.Солонникова (такі системи ми називаємо параболічними за Солонниковим системами неоднорідної структури). Для таких систем, як і для систем Солонникова однорідної структури, ставиться початкова задача. У модельному випадку (коли система містить тільки групу старших членів зі сталими коефіцієнтами) описуються структура та властивості фундаментальної матриці розв'язків (ФМР) і наводяться формули для розв'язків початкової задачі.

1. Означення параболічності системи. Нехай $n, N, b_1, \ldots, b_n$ – задані натуральні числа, b – найменше спільне кратне чисел $b_1, \ldots, b_n$; $m \equiv (m_1, \ldots, m_n)$, $m_0 \equiv 2b$, $m_j \equiv 2b/(2b_j)$, $j \in \{1, \ldots, n\}$; $\|\overline{\alpha}\| \equiv \sum\limits_{j=0}^{n} m_j\alpha_j$, якщо $\overline{\alpha} \equiv (\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_+^{n+1}$; $\|\alpha\| \equiv \sum\limits_{j=1}^{n} m_j\alpha_j$, якщо $\alpha \equiv (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_+^n$; $M \equiv \sum\limits_{j=0}^{n} m_j$; i – уявна одиниця; $A(t, x, \partial_t, \partial_x) \equiv \equiv (A_{kj}(t, x, \partial_t, \partial_x))_{k,j=1}^N$; $u \equiv \mathrm{col}(u_1, \ldots, u_N)$, $f \equiv \mathrm{col}(f_1, \ldots, f_N)$– невідома та задана вектор-функції.

Припустимо, що існують такі числа s_k і t_j із $\mathbb{Z}$, що степінь відносно λ многочлена $A_{kj}(t, x, p\lambda^{m_0}, i\sigma\lambda^m)$, $\sigma\lambda^m \equiv (\sigma_1\lambda^{m_1}, \ldots, \sigma_n\lambda^{m_n})$, не перевищує $s_k + t_j$ і $\sum\limits_{k=1}^{N}(s_k + t_k) = 2br$, де r – степінь $\det A(t, x, p, i\sigma)$ як многочлена від p.

Нехай $A^0 \equiv (A^0_{kj})^N_{k,j=1}$ – головна частина A, тобто $A^0_{kj}(t,x,p\lambda^{m_0}, i\sigma\lambda^m) = \lambda^{s_k+t_j} A^0_{kj}(t,x,p,i\sigma)$.

Означення. Система рівнянь

$$A(t,x,\partial_t,\partial_x)u(t,x) = f(t,x), \ (t,x) \in Q, \quad (1)$$

називається параболічною за Солонниковим з неоднорідною структурою на множині Q, якщо існує така стала $\delta > 0$, що для будь-яких $(t,x) \in Q$ і $\sigma \in \mathbb{R}^n$ p-корені рівняння $\det A^0(t,x,p,i\sigma) = 0$ задовольняють нерівність

$$\operatorname{Re} p(t,x,\sigma) \le -\delta(\sigma_1^{2b_1} + \cdots + \sigma_n^{2b_n}).$$

Частинними випадками вищеозначених систем є системи, параболічні за Петровським ($m_k = 1$, $k \in \{1,\dots,n\}$, $s_j = 0$ і $t_j = 2bn_j$, $n_j \in \mathbb{N}$, $j \in \{1,\dots,N\}$), $\overrightarrow{2b}$-параболічні за Ейдельманом ($m_k > 1$ для принаймні одного $k \in \{1,\dots,n\}$, $s_j = 0$ і $t_j = 2bn_j$, $j \in \{1,\dots,N\}$) і параболічні за Солонниковим однорідної структури ($m_k = 1$, $k \in \{1,\dots,n\}$).

Наведемо приклад системи, яка не належить жодному з цих частинних випадків. Це така система з дійсними коефіцієнтами, побудована аналогічно системі (1.3) з [7]:

$$\begin{cases} a_1u_1 + a_2\partial_t u_2 - a_3(\partial^2_{x_1} - \partial^4_{x_2})u_2 = f_1, \\ a_3\partial_t u_1 - a_2(\partial^2_{x_1} - \partial^4_{x_2})u_1 + \\ +a_4(\partial_t^2 + (\partial^2_{x_1} - \partial^4_{x_2})^2)u_2 = f_2. \end{cases}$$

Для неї $n = N = 2$, $A = A^0 =$

$$= \begin{pmatrix} a_1 & a_2p + a_3(\sigma_1^2 + \sigma_2^4) \\ a_3p + a_2(\sigma_1^2 + \sigma_2^4) & a_4(p^2 + (\sigma_1^2 + \sigma_2^4)^2) \end{pmatrix},$$

$b_1 = 1$, $b_2 = 2$, $b = 2$, $m_1 = 2$, $m_2 = 1$, $r = 2$, $s_1 = -4$, $t_1 = 4$, $s_2 = 0$, $t_2 = 8$, $\det A^0 = (a_1a_4 - a_2a_3)(p^2 + (\sigma_1^2 + \sigma_2^4)^2) - (a_2^2 + a_3^2)p(\sigma_1^2 + \sigma_2^4)$.

Система є параболічною в розумінні вищенаведеного означення тоді, коли $a_1a_4 - a_2a_3 < 0$ і $a_2^2 + a_3^2 > 0$.

2. Постановка початкової задачі. Для систем (1) задавати початкові умови так, як для систем Петровського, взагалі кажучи, не можна (це пов'язано зі структурами матриці системи та її головної частини). Задаватимемо їх так само, як для систем Солонникова з однорідною структурою [7].

Нехай $B(x,\partial_t,\partial_x) \equiv (B_{kj}(x,\partial_t,\partial_x))^{r,\ \ N}_{k=1,j=1}$ – матричний диференціальний вираз, $\varphi = \operatorname{col}(\varphi_1,\dots,\varphi_r)$ – задана вектор-функція. Припустимо, що існують такі цілі числа p_k, що степінь відносно λ многочлена $B_{kj}(x,p\lambda^{m_0}, i\sigma\lambda^m)$ не перевищує $p_k + t_j$, де t_j – ті самі, що й у системі (1).

Головною частиною виразу B назвемо вираз $B^0 \equiv (B^0_{kj})^{r,\ \ N}_{k=1,j=1}$, де $B^0_{kj}(x,p\lambda^{m_0}, i\sigma\lambda^m) = \lambda^{p_k+t_j} B^0_{kj}(x,p,i\sigma)$.

Тоді початкові умови для системи (1) задаються у вигляді

$$B(x,\partial_t,\partial_x)u(t,x)|_{t=0} = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (2)$$

де, для забезпечення коректності початкової задачі, матриця B повинна задовольняти таку умову доповняльності: рядки матриці

$$C(x,p) \equiv B^0(x,p,0)\widehat{A^0}(0,x,p,0),$$

де $\widehat{A^0} \equiv \det A^0 (A^0)^{-1}$ – матриця, взаємна для A^0, лінійно незалежні за модулем полінома p^r в кожній точці $x \in \mathbb{R}^n$.

Умови, накладені на вираз B, дозволяють, як і в [7], для кожної системи визначити числа p_k і з точністю до деяких алгебраїчних перетворень побудувати матрицю $B^0(x,p,0)$. Матриця $B'(x,p,i\sigma) \equiv B^0(x,p,i\sigma) - B^0(x,p,0)$ відіграє роль молодшого члена, для її елементів повинна виконуватися лише одна умова: степінь відносно λ многочлена $B'_{kj}(x,p\lambda^{m_0}, i\sigma\lambda^m)$ дорівнює $p_k + t_j$.

3. ФМР модельної системи. Розглянемо в просторі $\mathbb{R}^{n+1}$ систему рівнянь, параболічну за Солонниковим неоднорідної структури зі сталими коефіцієнтами, яка містить лише групу старших членів,

$$A^0(\partial_t,\partial_x)u = f. \quad (3)$$

Як і в [7], ФМР $Z \equiv (Z_{kj})^N_{k,j=1}$ системи (1) виражається через фундаментальний розв'язок (ФР) Γ рівняння

$$\det A^0(\partial_t, \partial_x) = 0 \tag{4}$$

такими формулами:

$$Z_{kj}(t,x) = \widehat{A^0}_{kj}(\partial_t, \partial_x)\Gamma(t,x),$$

$$t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \{k,j\} \subset \{1,\dots,N\}, \tag{5}$$

в яких $\widehat{A^0}_{kj}$ – елемент взаємної матриці $\widehat{A^0}$, тобто алгебраїчне доповнення елемента A^0_{jk} матриці A^0.

Рівняння (4) є $\overrightarrow{2b}$-параболічним рівнянням узагальненого порядку $2br$ за просторовими змінними x і r за часовою змінною t. Властивості його ФР вивчені в [2 – 4]. Зокрема, для Γ справджуються оцінки

$$|\partial^{\overline{\alpha}}_{t,x}\Gamma(t,x)| \leq C_{\overline{\alpha}} t^{r-(M+\|\overline{\alpha}\|)/(2b)} E_c(t,x), \tag{6}$$

$$t > 0,\ x \in \mathbb{R}^n,\ \overline{\alpha} \in \mathbb{Z}^{n+1}_+,$$

де $\partial^{\overline{\alpha}}_{t,x} \equiv \partial^{\alpha_0}_t \partial^{\alpha_1}_{x_1} \dots \partial^{\alpha_n}_{x_n}$, $C_{\overline{\alpha}}$ і c – додатні сталі, $E_c(t,x) \equiv \exp\left\{-c\sum_{j=1}^{n} t^{1-q_j}|x_j|^{q_j}\right\}$, $q_j \equiv 2b_j/(2b_j-1)$.

З (5), (6) випливають такі оцінки для елементів ФМР Z:

$$|\partial^{\overline{\alpha}}_{t,x} Z_{kj}(t,x)| \leq C_{\overline{\alpha}} t^{-(M+\|\overline{\alpha}\|-s_j-t_k)/(2b)} E_c(t,x), \tag{7}$$

$$t > 0,\ x \in \mathbb{R}^n,\ \overline{\alpha} \in \mathbb{Z}^{n+1}_+, \{k,j\} \subset \{1,\dots,N\}.$$

Розглянемо об'ємний потенціал, породжений ФР Γ,

$$V_f(t,x) \equiv \int\limits_{-\infty}^{t} d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Gamma(t-\tau, x-\xi) f(\tau,\xi) d\xi,$$

$$(t,x) \in \mathbb{R}^{n+1},$$

вважаючи, для простоти, що f – досить гладка й фінітна функція. Використовуючи властивості ФР Γ, одержуємо, що функція V_f є розв'язком рівняння

$$\det A^0(\partial_t, \partial_x) V_f = f.$$

Звідси випливає, що функції

$$u_j(t,x) \equiv \sum_{l=1}^{N} \widehat{A^0}_{jl}(\partial_t, \partial_x) V_{f_l}(t,x),$$

$$(t,x) \in \mathbb{R}^{n+1},\ j \in \{1,\dots,N\},$$

для довільних досить гладких і фінітних функцій f_l, $l \in \{1,\dots,N\}$, є компонентами розв'язку системи (3) з $f = \mathrm{col}(f_1,\dots,f_N)$. Справді,

$$\sum_{j=1}^{N} A^0_{kj}(\partial_t, \partial_x) u_j =$$

$$= \sum_{j=1}^{N} A^0_{kj}(\partial_t, \partial_x) \left(\sum_{l=1}^{N} \widehat{A^0}_{jl}(\partial_t, \partial_x) V_{f_l} \right) =$$

$$= \sum_{l=1}^{N} \left(\sum_{j=1}^{N} A^0_{kj}(\partial_t, \partial_x) \widehat{A^0}_{jl}(\partial_t, \partial_x) \right) V_{f_l} =$$

$$= \sum_{l=1}^{N} \delta_{kl} \det A^0(\partial_t, \partial_x) V_{f_l} = \sum_{l=1}^{N} \delta_{kl} f_l = f_k,$$

$$k \in \{1,\dots,N\},$$

де δ_{kl} – символ Кронекера, бо $A^0\widehat{A^0} = A^0(A^0)^{-1}\det A^0 = I \det A^0$, I – одинична матриця порядку N.

Отже, компоненти розв'язку системи (3) визначаються формулами

$$u_j(t,x) = \sum_{l=1}^{N} \widehat{A^0}_{jl}(\partial_t, \partial_x) \int\limits_{-\infty}^{t} d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Gamma(t-\tau, x-\xi) \times$$

$$\times f_l(\tau,\xi) d\xi,\ (t,x) \in \mathbb{R}^{n+1},\ j \in \{1,\dots,N\}.$$

Зауважимо, що цими формулами визначається розв'язок системи (3) і у випадку, коли функції f_l належать до значно ширших класів, ніж це ми припускали. Це можна довести, користуючись методикою дослідження $\overrightarrow{2b}$-параболічних потенціалів з [5].

4. Формули для розв'язків модельної початкової задачі. Розглянемо початкову задачу

$$\left.\begin{array}{l} A^0(\partial_t, \partial_x) u(t,x) = 0, \quad t > 0, x \in \mathbb{R}^n, \\ B^0(\partial_t, \partial_x) u(t,x)|_{t=0} = \varphi(x),\ x \in \mathbb{R}^n, \end{array}\right\} \tag{8}$$

в якій матричні диференціальні вирази A^0 і B^0 задовольняють сформульовані в пп. 1 і 2 умови.

Так само, як у [7], доводиться, що для досить гладких компонент φ_k вектор-функції φ, які можуть не дуже швидко зростати на нескінченності, компоненти розв'язку задачі (8) визначаються формулами

$$u_j(t,x) = \sum_{k=1}^{r} \int_{\mathbb{R}^n} G_{jk}(t, x-\xi)\varphi_k(\xi)d\xi,$$

$$t > 0,\ x \in \mathbb{R}^n,\ j \in \{1, \ldots, N\}, \qquad (9)$$

в яких

$$G_{jk}(t,x) \equiv \sum_{l=1}^{N} P_{lk}(\partial_t, \partial_x) Z_{jl}(t,x),$$

$$t > 0,\ x \in \mathbb{R}^n, \qquad (10)$$

де

$$P_{lk}(p\lambda^{m_0}, i\sigma^m) = \lambda^{s_l - p_k - 2b} P_{lk}(p, i\sigma), \qquad (11)$$

а Z_{jl} – елементи ФМР Z.

З (7), (10) і (11) випливають такі оцінки для ядер G_{jk}:

$$|\partial_{t,x}^{\overline{\alpha}} G_{jk}(t,x)| \leq C_{\overline{\alpha}} t^{1-(M+\|\overline{\alpha}\|-t_j-p_k)/(2b)} \times$$

$$\times E_c(t,x), \quad t > 0, x \in \mathbb{R}^n, \overline{\alpha} \in \mathbb{Z}_+^{n+1}. \qquad (12)$$

Для прикладу розглянемо початкову задачу для одного $\overrightarrow{2b}$-параболічного рівняння порядку $r \geq 1$ за змінною t, яка має вигляд

$$\sum_{\|\overline{\alpha}\|=2br} a_{\overline{\alpha}} \partial_{t,x}^{\overline{\alpha}} u = 0, \quad \partial_t^{j-1} u|_{t=0} = \varphi_j,$$

$$j \in \{1, \ldots, r\}, \qquad (13)$$

де припускається, що $a_{(r,0)} = 1$.

Для цієї задачі $N = 1$, $s_1 = 0$, $t_1 = 2br$, $p_k = 2b(k-1-r)$, $k \in \{1, \ldots, r\}$, $B^0(p, i\sigma) = \mathrm{col}(1, p, \ldots, p^{r-1})$.

Формула (9) для розв'язку задачі (13) набуває вигляду

$$u(t,x) = \sum_{k=1}^{r} \int_{\mathbb{R}^n} G_k(t, x-\xi)\varphi_k(\xi)d\xi,$$

$$t > 0, x \in \mathbb{R}^n.$$

Вирази для ядер G_k можна одержати із загальних формул (10) або скористатися результатами з [4], згідно з якими

$$G_k(t,x) = \partial_t^{r-k}\Gamma(t,x) + \theta(r-k-1) \times$$

$$\times \sum_{\substack{\|\overline{\alpha}\|=2b(r-k) \\ \alpha_0 < r-k}} a_{\overline{\alpha}_k} \partial_{t,x}^{\overline{\alpha}} \Gamma(t,x),$$

де Γ – ФР рівняння (8), θ – функція Хевісайда, $\overline{\alpha}_k \equiv (\alpha_0 + k, \alpha)$.

Якщо врахувати, що для Γ справджуються оцінки (6), то для ядер G_k одержаться такі оцінки: $|\partial_{t,x}^{\overline{\alpha}} G_k(t,x)| \leq C_{\overline{\alpha}} t^{k-(M+\|\overline{\alpha}\|)/(2b)} E_c(t,x)$, $t > 0, x \in \mathbb{R}^n, \overline{\alpha} \in \mathbb{Z}^{n+1}, k \in \{1, \ldots, r\}$.

Легко переконатися, що ці оцінки є наслідками оцінок (12).

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Петровский О.Г.* О проблеме Коши для систем линейных уравнений с частными производными в области неаналитических функций // Бюлл. МГУ. Математика и механика. – 1938. – **1**, № 7. – С. 1 – 72.
2. *Эйдельман С.Д.* Об одном классе параболических систем // Докл. АН СССР. – 1960. – **133**, № 1. – С. 40 – 43.
3. *Ивасишен С.Д., Эйдельман С.Д.* $\overrightarrow{2b}$-параболические системы // Тр. семинара по функц. анализу. – К.: Ин-т математики АН УССР, 1968. – Вып. 1. – С. 3 – 175, 271 – 273.
4. *Івасишен С.Д., Кондур О.С.* Про матрицю Гріна задачі Коші та характеризацію деяких класів розв'язків для $\overrightarrow{2b}$-параболічних систем довільного порядку // Мат. студії. – 2000. – **14**, № 1. – С. 73 – 84.
5. *Eidelman S.D., Ivasyshen S.D., Kochubei A.N.* Analytic Methods in the Theory of Differential and Pseudo-Differential Equations of Parabolic Type. – Basel-Boston-Berlin: Birkhäuser Verlag, 2004. – 390 p. – (Operator Theory: Advances and Applications. Vol. 152).
6. *Солонников В.А.* О краевых задачах для общих параболических систем // Докл. АН СССР. – 1964. – **157**, № 1. – С. 56 – 59.
7. *Солонников В.А.* О краевых задачах для линейных параболических систем дифференциальных уравнений общего вида // Тр. Мат. ин-та им. В.А.Стеклова АН СССР. – 1965. – **83**. – С. 3 – 163.
8. *Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – М.: Наука, 1967. – 736 с.

Стаття надійшла до редколегії 21.08.2005