УДК 517.911

©2005 р. О.Є. Зернов, Ю.В. Кузіна

Південноукраїнський державний педагогічний університет ім. К. Д. Ушинського, Одеса

АСИМПТОТИЧНА ПОВЕДІНКА РОЗВ'ЯЗКУ СИНГУЛЯРНОЇ ЗАДАЧІ КОШІ $F(t,x,x')=0,\quad x(0)=0$

Проведено якійсний аналіз задачі Коші для сингулярного диференціального рівняння, не розв'язаного відносно похідної. Доведено існування та єдиність розв'язку задачі Коші в малому околі початкової точки.

For the problem a qualitative analysis was performed. The existence and the uniqueness of a solution $x:(0,\rho]\to\mathbb{R}$ ($\rho>0$ is small enough) were proved.

Сингулярна задача Коші для диференціальних рівнянь вигляду $x'=f(t,x)$ вивчена досить детально, особливо питання існування та кількості розв'язків [3], [11], [12], [15] та інші. В той же час для диференціальних рівнянь вигляду $F(t,x,x')=0$ навіть регулярна задача Коші вивчена порівняно мало [17], [18], а також [1], [14], [19], [20]. Значна увага зверталась на питання розв'язності та збіжності до розв'язку послідовностей наближень. Що ж до асимптотичної поведінки розв'язків, то вона практично не досліджена. Для сингулярної задачі Коші потрібно відповісти на всі перелічені питання навіть у найпростіших випадках. Тому автори обрали об'єктом дослідження асимптотичну поведінку розв'язків задачі Коші для рівнянь вигляду $F(t,x,x')=0$, як регулярних, так і сингулярних. Ця робота продовжує аналіз, розпочатий у [6]-[10]. Використано методи якісної теорії диференціальних рівнянь [2], [3], [13], а також [4], [5]. Запропонована схема міркувань дозволила довести існування та єдиність неперервно диференційовного розв'язку, яке визначено в досить малому правому півоколі початкової точки та має у цьому півоколі потрібні асимптотичні властивості. Одночасно досліджено й асимптотичну поведінку першої похідної знайденого розв'язку.

Розглядається задача Коші

$$\sum_{0\leqslant i+j+k\leqslant m} a_{ijk}t^i x^j (x')^k + f(t,x,x') = 0, \quad (1)$$

$$x(0)=0, \quad (2)$$

де $t\in(0,\tau)$, $x:(0,\tau)\to\mathbb{R}$ –невідома дійсна функція змінної t, всі a_{ijk} – сталі (i,j,k – невід'ємні цілі числа),

$$a_{000}=0,\quad a_{001}=\ldots=a_{00m}=0,$$
$$a_{101}=\ldots=a_{10(l-1)}=0,\quad a_{10l}\neq 0$$

(m, l – натуральні, $2\leqslant l\leqslant m-1$), $f:\mathcal{D}\to\mathbb{R}$ – неперервна функція,

$$\mathcal{D}=\{(t,x,y): t\in(0,\tau),\ |x|<r_1 t,\ |y|<r_2\},$$

яка задовольняє умову

$$|f(t,x,y)|\leqslant t^m\alpha(t),\ (t,x,y)\in\mathcal{D}.$$

Неперервна функція $\alpha:(0,\tau)\to(0,+\infty)$ така, що

$$\lim_{t\to+0}\alpha(t)=0,\ \lim_{t\to+0}\frac{\alpha(t)}{t}=\sigma,\ 0\leqslant\sigma\leqslant+\infty;$$

якщо $\sigma=+\infty$, то α – неперервно диференційовна функція, $\alpha'(t)\geqslant 0,\ t\in(0,\tau)$.

Припустимо, що

$$|f(t,x_1,y_1)-f(t,x_2,y_2)|\leqslant$$
$$\leqslant L_1 t(|x_1-x_2|+|y_1-y_2|),$$
$$(t,x_i,y_i)\in\mathcal{D},\quad i\in\{1,2\},$$

де L_1 – деяка стала.

Розглянемо рівняння

$$P(c) = 0, \tag{3}$$

де

$$P(c) = \sum_{k=0}^{m-1} a_{10k}c^k + \sum_{k=0}^{m-1} a_{01k}c^{k+1}.$$

Припустимо, що рівняння (3) має дійсний корінь $c = c_1$, який задовольняє наступні умови:

1) c_1 – простий корінь рівняння (3), тобто, $P(c_1) = 0$, $P'(c_1) \neq 0$;

2) $0 < |c_1| < \min\{r_1, r_2\}$;

$$3) \sum_{k=0}^{m-1}(k+1)|a_{01k}||c_1|^k + L_1 + L_2 < \\ < l|a_{10l}||c_1|^{l-1}, \tag{4}$$

де

$$L_2 = \max\left\{\left|\sum_{k=l+1}^{m-1} k a_{10k} c_1^{k-1}\right|, \left|\sum_{k=0}^{m-2}(2a_{02k}c_1 + a_{11k})c_1^k\right|\right\}.$$

Нехай функція $S : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ визначена рівністю

$$S(t) = \sum_{k=1}^{m} c_k t^k, \tag{5}$$

де постійні коефіцієнти $c_1, \ldots, c_m$ обрані таким чином: c_1 – зазначений вище корінь рівняння (3), а $c_2, \ldots, c_m$ підібрані так, щоб виконувалась умова:

$$\sum_{1 \leqslant i+j+k \leqslant m} a_{ijk} t^i (S(t))^j (S'(t))^k = \\ = \beta\beta O(t^{m+1}), \quad t \to +0. \tag{6}$$

Неважко переконатися в тому, що всі коефіцієнти $c_2, \ldots, c_m$ у правій частині рівняння (5) за заданим значенням c_1 знаходяться однозначно.

Позначимо через $\mathcal{U}(\rho, M)$ множину всіх неперервно диференційовних функцій $u : (0, \rho] \to \mathbb{R}$ таких, що

$$|u(t) - S(t)| \leqslant M t^m \beta(t), \ t \in (0, \rho], \tag{7}$$

$$|u'(t) - S'(t)| \leqslant M t^{m-1} \beta(t), \ t \in (0, \rho], \tag{8}$$

де функція $\beta : (0, \tau) \to (0, +\infty)$ визначається рівністю

$$\beta(t) = \begin{cases} \alpha(t), & \text{якщо } \sigma = +\infty, \\ t, & \text{якщо } \sigma < +\infty; \end{cases}$$

тут ρ, M – стали, $\rho < \tau$.

Означення. *Для кожного $\rho \in (0, \tau)$ будемо називати ρ-розв'язком задачі (1), (2) неперервно диференційовну функцію $x : (0, \rho] \to \mathbb{R}$, яка задовольняє умови:*

1) $(t, x(t), x'(t)) \in \mathcal{D}$, $t \in (0, \rho]$;

2) x тотожно задовольняє рівняння (1) при всіх $t \in (0, \rho]$.

Теорема. *Існують такі ρ, M, що задача (1), (2) має єдиний ρ-розв'язок, який належить множині $\mathcal{U}(\rho, M)$.*

Доведення. Спочатку виберемо ρ, M. Нерівності, що визначають цей вибір, тут не наводяться через обмеженість обсягу роботи. Відзначимо лише, що M є досить великим, а ρ досить малим і вибір ρ, M забезпечує коректність усіх наступних міркувань.

Позначимо через $\mathcal{B}$ простір неперервно диференційовних функцій $x : [0, \rho] \to \mathbb{R}$ з нормою

$$\|x\|_{\mathcal{B}} = \max_{t \in [0, \rho]}(|x(t)| + |x'(t)|).$$

Нехай $\mathcal{U}$ – підмножина $\mathcal{B}$, кожний елемент $u : [0, \rho] \to \mathbb{R}$ якої задовольняє нерівності (7), (8), причому $u(0) = 0$, $u'(0) = c_1$. Множина $\mathcal{U}$ замкнена й обмежена.

Перетворимо диференціальне рівняння (1). Нехай

$$\varphi(t, x, x') = \sum_{k=l+1}^{m-1} a_{10k} t (x')^k + \\ + \sum_{\substack{1 \leqslant i+j+k \leqslant m, \\ i+j \geqslant 2}} a_{ijk} t^i x^j (x')^k.$$

Тоді із (1) маємо

$$a_{100}t + a_{010}x + a_{10l}t(x')^l + \sum_{k=1}^{m-1} a_{01k} x (x')^k + \\ + \varphi(t, x, x') + f(t, x, x') = 0,$$

а умова (6) набуде вигляду

$$\begin{gathered} a_{100}t + a_{010}S(t) + a_{10l}t(S'(t))^l + \\ + \sum_{k=1}^{m-1} a_{01k}S(t)(S'(t))^k + \\ +\varphi(t, S(t), S'(t)) = \beta\beta O(t^{m+1}),\ t \to +0. \end{gathered} \tag{9}$$

Оскільки

$$\begin{aligned} (x')^l &= (S'(t) + (x - S'(t))^l = \\ &= (S'(t))^l + l(S'(t))^{l-1}(x' - S'(t)) + \\ &+ \sum_{k=2}^{l} C_l^k (S'(t))^{l-k}(x' - S'(t))^k, \end{aligned}$$

то

$$\begin{gathered} -a_{10l}t\, l\, (S'(t))^{l-1}(x' - S'(t)) = \\ = a_{100}t + a_{010}x + a_{10l}t(S'(t))^l + \\ +a_{10l}t \sum_{k=2}^{l} C_l^k (S'(t))^{l-k}(x' - S'(t))^k + \\ + \sum_{k=1}^{m-1} a_{01k}x(x')^k + \varphi(t, x, x') + f(t, x, x'). \end{gathered}$$

На підставі рівності (9) маємо

$$\begin{gathered} a_{10l}t(S'(t))^l = -a_{100}t - a_{010}S(t) - \\ - \sum_{k=1}^{m-1} a_{01k}S(t)(S'(t))^k - \\ -\varphi(t, S(t), S'(t)) + \beta\beta O(t^{m+1}), \end{gathered}$$

тому

$$\begin{gathered} -la_{10l}t(S'(t))^{l-1}(x' - S'(t)) = a_{010}(x - S(t)) + \\ +a_{10l}t \sum_{k=2}^{l} C_l^k (S'(t))^{l-k}(x' - S'(t))^k + \\ + \sum_{k=1}^{m-1} a_{01k}(x(x')^k - S(t)(S'(t))^k) + \\ +\varphi(t, x, x') - \varphi(t, S(t), S'(t)) + \\ +\beta\beta O(t^{m+1}) + f(t, x, x'). \end{gathered} \tag{10}$$

Далі розглядається диференціальне рівняння, яке отримано з (10):

$$\begin{gathered} x' = S'(t) - \\ -(la_{10l}t(S'(t))^{l-1})^{-1} \Bigg(a_{010}(x - S(t)) + \\ +a_{10l}t \sum_{k=2}^{l} C_l^k (S'(t))^{l-k}(u'(t) - S'(t))^k + \\ + \sum_{k=1}^{m-1} a_{01k}(x(u'(t))^k - S(t)(S'(t))^k) + \\ +\varphi(t, u(t), u'(t)) - \varphi(t, S(t), S'(t)) + \\ +\beta\beta O(t^{m+1}) + f(t, u(t), u'(t)) \Bigg) \end{gathered} \tag{11}$$

з початковою умовою (2), де $u \in \mathcal{U}$ – довільна фіксована функція.

Доведемо, що задача (11), (2) має єдиний розв'язок $x_u : (0, \rho] \to \mathbb{R}$ такий, що

$$|x_u(t) - S(t)| \leqslant Mt^m\beta(t),\ t \in (0, \rho], \tag{12}$$

$$|x_u'(t) - S'(t)| \leqslant Mt^{m-1}\beta(t),\ t \in (0, \rho]. \tag{13}$$

Якщо довизначити x_u, x_u' при $t = 0$, вважаючи $x_u(0) = 0,\ x_u'(0) = c_1$, то функція $x_u : [0, \rho] \to \mathbb{R}$ належатиме множині $\mathcal{U}$. Тоді можна запровадити оператор $\mathrm{T} : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$, вважаючи

$$\mathrm{T}u = x_u. \tag{14}$$

Покажемо далі, що цей оператор є оператором стиску. Тому, у відповідності з принципом Банаха стиснутих відображень, у нього існує єдина нерухома точка $x_0 \in \mathcal{U}$. Звідси випливає, що $x_0 : (0, \rho] \to \mathbb{R}$ – єдиний ρ-розв'язок задачі (1), (2) з потрібними властивостями.

Діючи у відповідності за цим планом, покладемо:

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \{(t, x) : t \in (0, \rho],\ |x - S(t)| = Mt^m\beta(t)\}, \\ \mathcal{D}_1 &= \{(t, x) : t \in (0, \rho],\ |x - S(t)| < Mt^m\beta(t)\}, \\ \mathrm{H} &= \{(t, x) : t = \rho,\ |x - S(\rho)| < M\rho^m\beta(\rho)\} \end{aligned}$$

та розглянемо функцію

$$A_1 : (0, \rho] \times \mathbb{R} \to [0, +\infty),$$

задану рівністю

$$A_1(t, x) = (x - S(t))^2(t^m\beta(t))^{-2}.$$

Неважко переконатися в тому, що з нерівності

$$\sum_{k=0}^{m-1}(k+1)|a_{01k}||c_1|^k + \\ +\left|\sum_{k=l+1}^{m-1} ka_{10k}c_1^{k-1}\right| < ml|a_{10l}||c_1|^{l-1} \qquad (15)$$

і диференціального рівняння (11) випливає, що похідна функції A_1 від'ємна при всіх $(t,x)\in\Phi_1$. Зазначимо, що оцінка (15) одержується з умови (4). Тому (див. [4], стор. 758) серед інтегральних кривих рівняння (11), що перетинають H, знайдеться хоча б одна інтегральна крива, яка визначена при всіх $t\in(0,\rho]$ і лежить у $\mathcal{D}_1$ при всіх $t\in(0,\rho]$. Позначимо цю інтегральну криву через $J_u:(t,x_u(t))$. Отже,

$$|x_u(t)-S(t)|\leqslant Mt^m\beta(t),\ t\in(0,\rho].$$

Нескладно одержати й таку оцінку

$$|x_u'(t)-S'(t)|\leqslant Mt^{m-1}\beta(t),\ t\in(0,\rho].$$

Покладемо за означенням $x_u(0)=0$, $x_u'(0)=c_1$. Тоді $x_u\in\mathcal{U}$. Доведемо тепер, що $J_u:(t,x_u(t))$ – єдина інтегральна крива рівняння (11) з такими властивостями. Отже, доведемо, що якщо взяти будь-яку точку $(t_0,x_0)\in\overline{\mathcal{D}_1}\backslash\{(0,0)\}$, що не належить інтегральній кривій J_u, то інтегральна крива рівняння (11), яка проходить через точку (t_0,x_0), залишит множину $\overline{\mathcal{D}_1}\backslash\{(0,0)\}$ при зменшенні t та не зможе знову потрапити в цю множину при наступному зменшенні t.

З цією метою розглядаються однопараметрична сім'я кривих

$$\Phi_2(\nu)=\{(t,x):t\in(0,\rho],\ |x-x_u(t)|=\nu t\},$$

і однопараметрична сім'я множин

$$\mathcal{D}_2(\nu)=\{(t,x):t\in(0,\rho],\ |x-x_u(t)|<\nu t\},$$

де ν – параметр, $0<\nu\leqslant 1$. Нехай функція $A_2:(0,\rho]\times\mathbb{R}\to[0,+\infty)$ задана рівністю

$$A_2(t,x)=(x-x_u(t))^2t^{-2}.$$

Неважко переконатися в тому, що при виконанні умови

$$\sum_{k=0}^{m-1}|a_{01k}||c_1|^k<l|a_{10l}||c_1|^{l-1}, \qquad (16)$$

похідна функції A_2 на підставі диференціального рівняння (11) від'ємна в усіх точках множини $(0,\rho]\times\mathbb{R}$, за винятком точок кривої $J_u:(t,x_u(t))$. Зокрема, ця похідна від'ємна у кожній точці кожної кривої $\Phi_2(\nu)$, $\nu\in(0,1]$. Звідси (див. [4], с. 758-759) випливає правильність твердження, яке доводиться. Тепер визначимо оператор $\mathrm{T}:\mathcal{U}\to\mathcal{U}$ рівністю (14). Доведемо, що $\mathrm{T}:\mathcal{U}\to\mathcal{U}$ – оператор стискання.

Нехай $u_i\in\mathcal{U},\ i\in\{1,2\}$, – довільні фіксовані функції,

$$\|u_1-u_2\|_{\mathcal{B}}=h,\quad h>0.$$

Позначимо $\mathrm{T}u_1=x_1,\ \mathrm{T}u_2=x_2$. Покладемо

$$\Phi_3=\{(t,x):t\in(0,\rho],\ |x-x_2(t)|=th\},\\ \mathcal{D}_3=\{(t,x):t\in(0,\rho],\ |x-x_2(t)|<th\}.$$

Нехай функція $A_3:(0,\rho]\times\mathbb{R}\to[0,+\infty)$ задана рівністю

$$A_3(t,x)=(x-x_2(t))^2t^{-2}.$$

Позначимо через $(11)_*$ рівняння (11), в якому $u=u_1$. Неважко перевірити, що при виконанні умови (4) похідна функції A_3 на підставі диференціального рівняння $(11)_*$ від'ємна при всіх $(t,x)\in\Phi_3$. Звідси випливає (див. [4], стор. 758), що якщо $P_0(t_0,x_0)\in\Phi_3$ – будь-яка точка, то інтегральна крива $J_0:(t,x_0(t))$, яка проходить через точку P_0, розташована так:

$$\begin{cases}\text{якщо } t_0-\delta<t<t_0, \text{то } (t,x_0(t))\ \overline{\in}\ \overline{\mathcal{D}_3};\\ \text{якщо } t_0<t<t_0+\delta, \text{то } (t,x_0(t))\in\mathcal{D}_3.\end{cases}$$

(тут $\delta>0$ – достатньо мале, $0<t\leqslant\rho$). Отже, при досить малих $|t-t_0|$ інтегральна крива $J_0:(t,x_0(t))$ лежить в $\mathcal{D}_3$ при $t>t_0$ і лежить поза $\overline{\mathcal{D}_3}$ при $t<t_0$. При цьому

$$|x_1(t)-x_2(t)|\leqslant|x_1(t)-S(t)|+\\ +|x_2(t)-S(t)|\leqslant 2Mt^m\beta(t)<th,$$

якщо $t\in(0,t(h)]$, де $t(h)\in(0,\rho)$ визначається за умовою

$$t^{m-1}\beta(t)<\frac{h}{2M}\quad\text{при}\quad t\in(0,t(h)].$$

Це означає, що інтегральна крива $J_1 : (t, x_1(t))$ рівняння $(11)_*$ лежить у $\mathcal{D}_3$ при $t \in (0, t(h)]$. Якщо t монотонно збільшується від $t = t(h)$ до $t = \rho$ то, на підставі доведеного, інтегральна крива $J_1 : (t, x_1(t))$ не може мати спільних точок з Φ_3. Тому дана інтегральна крива лежить у $\mathcal{D}_3$ при всіх $t \in (0, \rho]$. Отже,

$$|x_1(t) - x_2(t)| < th, \quad t \in (0, \rho]. \tag{17}$$

Якщо покласти в (11) відповідно $u = u_i$, $x = x_i$, $i \in \{1, 2\}$, то отримаємо дві тотожності, які правильні при всіх $t \in (0, \rho]$.

З цих тотожностей та враховуючи (17), отримаємо нерівність

$$|x_1'(t) - x_2'(t)| \leqslant (c_* + \bar{\bar{\mathrm{o}}}(1))\mathrm{h}, \quad \mathrm{t} \in (0, \rho], \tag{18}$$

де

$$c_* = (l|a_{10l}||c_1|^{l-1})^{-1} \times \\ \times \left(\sum_{k=0}^{m-1} (k+1)|a_{01k}||c_1|^k + L_1 + L_2 \right).$$

У відповідності з (4), $c_* < 1$.

Із (17), (18) маємо

$$|x_1(t) - x_2(t)| + |x_1'(t) - x_2'(t)| \leqslant \\ \leqslant (c_* + \bar{\bar{\mathrm{o}}}(1))\mathrm{h}, \quad \mathrm{t} \in (0, \rho]. \tag{19}$$

Позначимо

$$\theta = \frac{c_* + 1}{2}.$$

Очевидно, що $0 < \theta < 1$. За припущенням, ρ – настільки мале, що в (19)

$$\bar{\bar{\mathrm{o}}}(1) < \frac{1}{2}(1 - \mathrm{c}_*)$$

при $t \in (0, \rho]$. Тому з (19) випливає, що

$$|x_1(t) - x_2(t)| + |x_1'(t) - x_2'(t)| \leqslant \theta h, \\ t \in (0, \rho]. \tag{20}$$

Крім того, $x_i(0) = 0$, $x_i'(0) = c_1$, $i \in \{1, 2\}$, бо $x_i \in \mathcal{U}$, $i \in \{1, 2\}$. Отже,

$$\max_{t \in [0, \rho]} (|x_1(t) - x_2(t)| + |x_1'(t) - x_2'(t)|) \leqslant \theta h,$$

або

$$\|x_1 - x_2\|_{\mathcal{B}} \leqslant \theta h,$$

що в підсумку дає

$$\|\mathrm{T}u_1 - \mathrm{T}u_2\|_{\mathcal{B}} \leqslant \theta \|u_1 - u_2\|_{\mathcal{B}}, \quad 0 < \theta < 1.$$

Проведені міркування не залежать від вибору елементів $u_i \in \mathcal{U}$, $i \in \{1, 2\}$. Отже, $\mathrm{T} : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ – оператор стиску.

У відповідності з принципом Банаха стиснутих відображень оператор $\mathrm{T} : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ має в $\mathcal{U}$ єдину нерухому точку, тобто, існує єдиний елемент $x_0 \in \mathcal{U}$, такий що $\mathrm{T}x_0 = x_0$. Отже, задача Коші (1), (2) має єдиний ρ-розв'язок $x_0 : (0, \rho] \to \mathbb{R}^n$ з властивостями

$$|x_0(t) - S(t)| \leqslant Mt^m \beta(t), \\ |x_0'(t) - S'(t)| \leqslant Mt^{m-1} \beta(t), \quad t \in (0, \rho].$$

Теорему доведено.

Приклад. Розглянемо задачу Коші

$$t(x')^4 = -t + x - t^3 + x(x')^4 + t^3 x' + \\ + t^3 (x')^5 - t^3 (x')^4, \\ x(0) = 0. \tag{21}$$

З одного боку, задачу (21) можна записати у вигляді

$$t(x')^4 = -t + x + x(x')^4 + f(t, x, x'), \\ x(0) = 0,$$

де

$$f(t, x, x') = -t^3 + t^3 x' + t^3 (x')^5 - t^3 (x')^4.$$

Тут

$$P(c) = -1 + c + c^5 - c^4, \ m = 5.$$

Рівняння $P(c) = 0$ перетворимо до вигляду

$$(c - 1)(c^4 + 1) = 0,$$

звідки маємо, $c_1 = 1$. Потім знаходимо $S(t) = t$. Згідно з доведеною теоремою, задача (21) має єдиний ρ-розв'язок $x : (0, \rho] \to \mathbb{R}$ такий, що

$$|x(t) - t| \leqslant Mt^5 \cdot t, \\ |x'(t) - 1| \leqslant Mt^4 \cdot t, \ t \in (0, \rho];$$

тут $\rho \leqslant 1$.

З іншого боку, задачу (21) можна записати у вигляді

$$(t^3 x' + x - t - t^3)(1 + (x')^4) = 0, \\ x(0) = 0$$

і знайти загальний розв'язок цього диференціального рівняння:

$$x = t + Ce^{\frac{1}{2t^2}},$$

C – довільна стала з $\mathbb{R}$. Звідси випливає, що для будь-якого $\rho > 0$ задача (21) має єдиний розв'язок $x : (0, \rho] \to \mathbb{R}$, а саме: $x(t) = t$, що узгоджується з твердженням доведеної теореми.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Витюк А. Н.* Обобщенная задача Коши для системы дифференциальных уравнений, не решенной относительно производных// Дифференц. уравн.— 1971.— **7**, N9.— C.1575—1580.

2. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости.— М.: Наука, 1967.— 472 с.

3. *Еругин Н. П.* Книга для чтения по общему курсу дифференциальных уравнений.— Минск: Наука и техника, 1972.— 664 с.

4. *Зернов А. Е.* О разрешимости и асимптотических свойствах решений одной сингулярной задачи Коши// Дифференц. уравн.— 1992.— **28**, N5.— C.756—760.

5. *Зернов А. Е.* Качественный анализ неявной сингулярной задачи Коши// Укр. мат. журн.— 2001.– **54**, N3.— C.302—310.

6. *Зернов О. Є., Кузіна Ю. В.* Про існування, єдиність й асимптотику розв'язку задачі $F(t, x, x') = 0$, $x(0) = 0$// Науковий вісник Чернівецького університету.— 2002. Вип. 150. Математика.— Чернівці: Рута, 2002.— C.27—30.

7. *Зернов А. Е., Кузина Ю. В.* Асимптотическое поведение решений задачи Коши $x' = f(t, x, x')$, $x(0) = 0$// Укр. мат. журн.— 2002.— **54**, N12.— C.1698—1703.

8. *Зернов А. Е., Кузина Ю. В.* качественный анализ сингулярной задачи Коши для дифференциального уравнения, не разрешенного относительно производной// Дифференц. уравн.— 2003.— **39**, N8.— C.1—8.

9. *Зернов А. Е., Кузина Ю. В.* Существование и асимптотическое поведение решений задачи Коши $x(x')^\gamma = f(t, x, x')$, $x(0) = 0$// Нелінійні коливання.— 2003.— **6**, N2.— C.178—190.

10. *Зернов А. Е., Кузина Ю. В.* Качественное исследование сингулярной задачи Коши $\sum\limits_{k=1}^{n} (a_{k1}t + a_{k2}x)(x')^k = b_1 t + b_2 x + f(t, x, x'), x(0) = 0$// Укр. мат. журн.— 2003.— **55**, N10.— C.1433—1438.

11. *Кигурадзе И. Т.* О задаче Коши для сингулярных систем обыкновенных дифференциальных уравнений// Дифференц. уравн.— 1965.— **1**, N10.— C.1271—1291.

12. *Кигурадзе И. Т.* Некоторые сингулярные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений.— Тбилиси: Изд-во Тбилисского ун-та, 1975.— 352 с.

13. *Немыцкий В. В., Степанов В. В.* Качественная теория дифференциальных уравнений.— М.–Л.: ГИТТЛ, 1949.— 550 с.

14. *Рудаков В. П.* О существовании и единственности решения систем дифференциальных уравнений первого порядка, частично разрешенных относительно производных// Известия высших учебных заведений. Математика.— 1971.— N9.— C.79—84.

15. *Чечик В. А.* Исследование систем обыкновенных дифференциальных уравнений с сингулярностью// Труды Московского математического об-ва.— 1959.— N8.— C.155—198.

16. *Anichini G., Conti G.* Boundary value problems for implicit ODE's in a singular case// Differential Equations and Dynamical Systems. – 1999. – **7**, N4. – P. 437–459.

17. *Conti R.* Sulla risoluzione dell'equazione $F(t, x, \frac{dx}{dt}) = 0$// Ann. mat. pura ed appl.— 1959.— N48.— P.97—102.

18. *Frigon M., Kaczynski T.* Boundary value problems for systems of implicit differential equations// J. Math. Anal. and Appl.— 1993.— **179**, N2.— P.317—326.

19. *Kowalski Z.* An iterative method of solving differential equations// Ann. polon. math.— 1963.— **12**, N3.— P.213—230.

20. *Kowalski Z.* A difference method of solving the differential equation $y' = h(t, y, y, y')$// Ann. polon. math.— 1965.— **16**, N2.— P.121—148.

Надійшла до редколегії 28.01.2004