УДК 517.95

©2005 р. Г.П. Доманська [1], С.П. Лавренюк [1], Н.П. Процах [2]

[1] Львівський національний університет ім. Ів. Франка, Львів
[2] Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, Львів

ЗАДАЧА ДЛЯ НЕЛІНІЙНОГО ГІПЕРБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ ТРЕТЬОГО ПОРЯДКУ

Доведено розв'язність в узагальнених просторах Соболєва мішаної задачі для нелінійних рівнянь третього порядку.

The solvability in the generalized Sobolev spaces is proved for mixed problem for nonlinear equations of the third order.

Розв'язність задач для параболічних і гіперболічних рівнянь з першою та другою похідною за часовою змінною в узагальнених просторах Соболєва розглянуто в [5, 6].

У цій праці досліджено розв'язність мішаної задачі для рівнянь третього порядку з другою похідною за часовою змінною. Рівняння містять змінні степеневі нелінійності в головній частині та в молодших доданках. Застосовуючи метод Гальоркіна та властивості узагальнених просторів Лебега, доведено розв'язність цих задач в узагальнених просторах Соболєва.

Нехай $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – обмежена область з межею Γ, регулярною в сенсі Кальдерона [1, с. 45], $Q_\tau = \Omega \times (0,\tau)$, $\tau \in (0,T]$, $S_T = \Gamma \times (0,T)$, $\Omega_\tau = Q_T \cap \{t=\tau\}$, $Q_{s,\tau} = \Omega \times (s,\tau)$, $s,\tau \in [0,T]$, $s<\tau$.

Позначимо через

$$L(u,f_0) \equiv u_{tt} + \sum_{i=1}^n c_i(x,t)u_{x_i} + $$
$$+a_0(x,t)|u_t|^{q(x)-2}u_t + b_0(x,t)u - f_0(x,t) \equiv$$
$$\equiv L_1(u,f_0) + u_{tt} + a_0(x,t)|u_t|^{q(x)-2}u_t.$$

Розглянемо в області Q_T задачу

$$L(u,f_0) - \sum_{i,j=1}^n (d_{ij}(x,t)u_{x_it})_{x_j} -$$
$$-\sum_{i=1}^n (a_i(x,t)|u_{x_it}|^{p(x)-2}u_{x_it})_{x_i} -$$
$$-\sum_{i,j=1}^n (b_{ij}(x,t)u_{x_i})_{x_j} = -\sum_{i=1}^n f_{i,x_i}(x,t), \quad (1)$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x), \quad x \in \Omega, \quad (2)$$

$$u|_{S_T} = 0. \quad (3)$$

Припускатимемо, що для коефіцієнтів рівняння (1) виконуються умови:

(A): $a_i \in L^\infty(Q_T), \alpha_0 \leqslant a_i(x,t) \leqslant \alpha_1$ майже для всіх $(x,t) \in Q_T$, $i = 0, 1\ldots,n$, α_0, α_1 – додатні сталі;

(B) : b_{ij}, b_{ijt}, $b_0 \in L^\infty(Q_T)$, $b_{ij}(x,t) = b_{ji}(x,t)$ майже для всіх $(x,t) \in Q_T$, $i,j = 1,\ldots,n$;
$$\beta_0|\xi|^2 \leqslant \sum_{i,j=1}^n b_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j \leqslant \beta^0|\xi|^2$$
майже для всіх $(x,t) \in Q_T$ і для всіх $\xi \in \mathbb{R}^n$, β_0, β^0 — додатні сталі;

(C) : $c_i \in L^\infty(Q_T)$, $i = 1,\ldots,n$;

(D): $d_{ij} \in L^\infty(Q_T)$, $d_{ij}(x,t) = d_{ji}(x,t)$,
$$\sum_{i,j=1}^n d_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j \geqslant d_0 \sum_{i=1}^n |\xi_i|^2$$
майже для всіх $\xi \in \mathbb{R}^N$, $i,j = 1\ldots,n$, d_0 – додатна стала;

(P) : $p,q : \Omega \to (1,+\infty)$, $q,p \in L^\infty(\Omega)$;
$$1 < p_1 = \operatorname*{ess\,inf}_\Omega p(x) \leqslant \operatorname*{ess\,sup}_\Omega p(x) = p_2,$$
$$1 < q_1 = \operatorname*{ess\,inf}_\Omega q(x) \leqslant \operatorname*{ess\,sup}_\Omega q(x) = q_2.$$

(P1) : Виконується одна з умов

1) $p_2 \leqslant R(p_1) = \begin{cases} \frac{np_1}{n-p_1}, \ 1 \leqslant p_1 < n, \\ +\infty, \ n \leqslant p_1. \end{cases}$;

2) існують сталі s_j, s_j^* і відкриті множини $\Omega_j \subset \Omega$, $j = \overline{1, m}$, які складаються зі скінченного числа компонент з ліпшіцевою границею такі, що $\operatorname{mes}(\Omega \setminus \bigcup_{1 \leqslant j \leqslant m} \Omega_j) = 0$, $1 = s_1 < s_2 < s_1^* < s_3 < s_2^* < \dots < s_{m-1} < s_{m-2}^* < n < s_m < s_{m-1}^* < s_m^* = +\infty$ і, крім того, $s_j \leqslant p(x) \leqslant s_j^*$ майже для всіх $x \in \Omega_j$, $j = \overline{1, m}$, $s_k^* < R(s_k)$, $k = \overline{1, m-1}$.

Нехай $\quad \Omega_1 = \{x : 1 < p(x) < 2\}$,

$$\Omega_2 = \{x : \ p(x) \geqslant 2\},$$

$$Q_{1,T} = \Omega_1 \times (0, T), \quad Q_{2,T} = \Omega_2 \times (0, T),$$

$$r(x) = \begin{cases} 2, \quad \text{якщо } x \in \Omega_1, \\ p(x), \quad \text{якщо } x \in \Omega_2, \end{cases}$$

$1/r(x) + 1/r'(x) = 1$. З умови (P) випливає, що $r(x) \in L^\infty(\overline{\Omega})$. Крім того, $r(x) \in [2; \infty)$.

Введемо простори: $L^{s(x)}(\Omega)$, $s(x) \in \{p(x), q(x)\}$ (узагальнений простір Лебега) [2] з нормою

$$\|v; L^{s(x)}(\Omega)\| = \inf\{\mu > 0 : \int_\Omega |v|^{s(x)}/\mu^{s(x)}\, dx \leqslant 1\};$$

$$W_{x,0}^{1,m(x)}(Q_T) = \{v : \ v_{x_i} \in L^{m(x)}(Q_T), v|_{S_T} = 0\},$$

$$\text{де } m(x) \in \{p(x), r(x)\};$$

$$W_{x,0}^{1,2}(Q_T) = \{v : \ v, \, v_{x_i} \in L^2(Q_T), \, v|_{S_T} = 0\};$$

$$W_0^{1,p(x)}(\Omega) = \{v : \ v_{x_i} \in L^{p(x)}(\Omega), \, v|_\Gamma = 0\};$$

$$W_{x,0}^{1,r(x),q(x)}(Q_T) = W_{x,0}^{1,p(x)}(Q_T) \cap$$
$$\cap L^{q(x)}(Q_T) \cap W_{x,0}^{1,2}(Q_T);$$

$$W_0^{1,r(x),q(x)}(\Omega) = W_0^{1,p(x)}(\Omega) \cap$$
$$\cap L^{q(x)}(\Omega) \cap W_0^{1,2}(\Omega).$$

Нехай $u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega) \cap W_0^{1,2}(\Omega)$. Тоді функціонали $\int\limits_{Q_T} |\nabla u|^{p(x)}\, dx\, dt$, $\int\limits_{Q_T} |\nabla u|^2\, dx\, dt$ обмежені. За властивостями інтегралів також є обмеженими $\int\limits_{Q_{2,T}} |\nabla u|^{p(x)}\, dx\, dt$, $\int\limits_{Q_{1,T}} |\nabla u|^2\, dx\, dt$. Звідси, оскільки $\int\limits_{Q_T} |\nabla u|^{r(x)}\, dx\, dt = \int\limits_{Q_{1,T}} |\nabla u|^2\, dx\, dt + \int\limits_{Q_{2,T}} |\nabla u|^{p(x)}\, dx\, dt$, то цей функціонал є обмеженим і $u \in W_{x,0}^{1,r(x)}(Q_T)$, за умови **(P1)**.

Теорема 1. *Нехай виконуються умови* $(\mathbf{A}), (\mathbf{B}), (\mathbf{C}), (\mathbf{D}), (\mathbf{P}), (\mathbf{P1})$ *і, крім того,* $f_0 \in L^{q'(x)}(Q_T)$, $f_i \in L^{r'(x)}(Q_T)$, $i = 1, \dots, n$, $u_0 \in H_0^1(\Omega)$, $u_1 \in L^2(\Omega)$. *Тоді існує єдиний розв'язок* u *задачі (1) – (3) (в сенсі розподілів) такий, що* $u \in C([0, T]; H_0^1(\Omega))$, $u_t \in W_{x,0}^{1,r(x),q(x)}(Q_T) \cap C([0, T]; (W_0^{1,r(x),q(x)}(\Omega))^*)$.

Доведення. Нехай $\{\varphi^k(x) : k \geqslant 1\}$ – база простору $W_0^{1,r(x),q(x)}(\Omega)$, ортонормована в $L^2(\Omega)$. Розглянемо послідовність функцій

$$u^N(x,t) = \sum_{k=1}^N c_k^N(t) \varphi^k(x), \ N = 1, 2, ...,$$

де $c_1^N(t), \dots, c_N^N$ є розв'язком задачі Коші

$$\int\limits_{\Omega_\tau} \Bigg[L(u^N, f_0)\varphi^k + \sum_{i,j=1}^n d_{ij}(x,t) u_{x_i t}^N \varphi_{x_j}^k +$$
$$+ \sum_{i=1}^n a_i(x,t) |u_{x_i t}^N|^{p(x)-2} u_{x_i t}^N \varphi_{x_i}^k + \sum_{i,j=1}^n b_{ij}(x,t) \times$$
$$\times u_{x_i}^N \varphi_{x_j}^k - \sum_{i=1}^n f_i(x,t) \varphi_{x_i}^k \Bigg] dx = 0; \qquad (4)$$

$$c_k^N(0) = u_{0,k}^N, \qquad c_{kt}^N(0) = u_{1,k}^N, \qquad (5)$$

$$k = \overline{1, N}, \ \tau \in [0, T].$$

Тут $u_0^N(x) = \sum\limits_{k=1}^N u_{0,k}^N \varphi^k(x)$, $\quad u_1^N(x) = \sum\limits_{k=1}^N u_{1,k}^N \varphi^k(x)$, $\lim\limits_{N \to \infty} \|u_0 - u_0^N\|_{H_0^1(\Omega)} = 0$, $\|u_1 - u_1^N\|_{L^2(\Omega)} = 0$.

На підставі теореми Каратеодорі [4, с. 54] існує розв'язок задачі (4) – (5), який має абсолютно неперервну похідну і визначений на проміжку $[0,t_0]$, $t_0\in(0,T]$. З оцінок, отриманих нижче, випливатиме, що $t_0=T$.

Домножимо кожне рівняння системи (4) відповідно на функцію $c^N_{kt}(t)e^{-\varkappa t}$, $\varkappa>0$, підсумуємо за k від 1 до N, проінтегруємо за t по проміжку $[0,\tau]$, $\tau\leqslant T$. Після виконання цих операцій одержимо рівність

$$\int\limits_{Q_\tau}\Bigg[L(u^N,f_0)u^N_t+\sum_{i,j=1}^n d_{ij}(x,t)u^N_{x_it}u^N_{x_jt}+ +\sum_{i=1}^n a_i(x,t)|u^N_{x_it}|^{p(x)}+\sum_{i,j=1}^n b_{ij}(x,t)u^N_{x_i}u^N_{x_jt}- -\sum_{i=1}^n f_i(x,t)u^N_{x_it}\Bigg]e^{-\varkappa t}\,dx\,dt=0. \qquad (6)$$

Врахувавши умови (A), (B), (C), (P), одержимо

$$\mathcal{I}_1:=\int\limits_{Q_\tau}u^N_{tt}u^N_te^{-\varkappa t}\,dx\,dt=\frac12\int\limits_{\Omega_\tau}|u^N_t|^2e^{-\varkappa\tau}\,dx+ +\frac{\varkappa}{2}\int\limits_{Q_\tau}|u^N_t|^2e^{-\varkappa t}\,dx\,dt-\frac12\int\limits_{\Omega_0}|u^N_1|^2\,dx;$$

$$\mathcal{I}_2:=\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i,j=1}^n d_{ij}(x,t)u^N_{x_it}u^N_{x_jt}e^{-\varkappa t}\,dx\,dt\geqslant \geqslant d_0\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i=1}^n(u^N_{x_it})^2e^{-\varkappa t}\,dx\,dt;$$

$$\mathcal{I}_3:=\int\limits_{Q_\tau}\Bigg[\sum_{i=1}^n a_i(x,t)|u^N_{x_it}|^{p(x)}+ +a_0(x,t)|u^N_t|^{q(x)}\Bigg]e^{-\varkappa t}\,dx\,dt\geqslant \geqslant\alpha_0\int\limits_{Q_\tau}\Bigg[\sum_{i=1}^n|u^N_{x_it}|^{p(x)}+|u^N_t|^{q(x)}\Bigg]e^{-\varkappa t}\,dx\,dt;$$

$$\mathcal{I}_4:=\int\limits_{Q_\tau}\Bigg[\sum_{i,j=1}^n b_{ij}(x,t)u^N_{x_i}u^N_{x_jt}+b_0(x,t)u^N\times \times u^N_t\Bigg]e^{-\varkappa t}\,dx\,dt\geqslant\frac{\beta_0}{2}\int\limits_{\Omega_\tau}|\nabla u^N|^2e^{-\varkappa\tau}\,dx- -\frac{\beta^0}{2}\int\limits_{\Omega_\tau}|\nabla u^N_0|^2\,dx+\frac12\int\limits_{Q_\tau}\Bigg[(\varkappa\beta_0-\beta_1)|\nabla u^N|^2- -\delta_0|u^N|^2-\frac{\beta_2}{\delta_0}|u^N_t|^2\Bigg]e^{-\varkappa t}\,dx\,dt,$$

де $\delta_0>0$, $\beta_1=\operatorname*{ess\,sup}\limits_{Q_T}\sqrt{\sum\limits_{i,j=1}^n b^2_{ijt}(x,t)}$, $\beta_2=\operatorname*{ess\,sup}\limits_{Q_T}b^2_0(x,t)$, $\nabla u=(u_{x_1},u_{x_2},\ldots,u_{x_n})$;

$$\mathcal{I}_5:=\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i=1}^n c_i(x,t)u^N_{x_i}u^N_te^{-\varkappa t}\,dx\,dt\leqslant \leqslant\frac12\int\limits_{Q_\tau}(\gamma_0|\nabla u^N|^2+|u^N_t|^2)e^{-\varkappa t}\,dx\,dt,$$

де $\gamma_0=\operatorname*{ess\,sup}\limits_{Q_T}\sum\limits_{i=1}^n c^2_i(x,t)$.

Згідно з умовами теореми щодо функцій f_i, $i=0,1,\ldots,n$ одержимо

$$\mathcal{I}_6:=\int\limits_{Q_\tau}\Bigg[f_0(x,t)u^N_t+\sum_{i=1}^n f_i(x,t)u^N_{x_it}\Bigg]e^{-\varkappa t}\,dx\,dt\leqslant \leqslant\int\limits_{Q_\tau}\Bigg(\frac{\delta_1}{q(x)}|u^N_t|^{q(x)}+\frac{\delta_2}{r(x)}\sum_{i=1}^n|u^N_{x_it}|^{r(x)}\Bigg)e^{-\varkappa t}\,dx\,dt+ +\int\limits_{Q_\tau}\Bigg[\frac{M_1(\delta_1)}{q'(x)}|f_0(x,t)|^{q'(x)}+ +\frac{M_2(\delta_2)}{r'(x)}\sum_{i=1}^n|f_i(x,t)|^{r'(x)}\Bigg]e^{-\varkappa t}\,dx\,dt,$$

де $\delta_1>0$, $\delta_2>0$, $\dfrac{1}{q(x)}+\dfrac{1}{q'(x)}=1$, $\dfrac{1}{p(x)}+\dfrac{1}{p'(x)}=1$, $r'(x)=\begin{cases}2, & \text{якщо } x\in\Omega_1,\\ p'(x), & \text{якщо } x\in\Omega_2.\end{cases}$

Враховуючи оцінки інтегралів $\mathcal{I}_1$ –$\mathcal{I}_6$, з (6) матимемо нерівність

$$\int\limits_{\Omega_\tau}\left[(u^N_t)^2+\beta_0|\nabla u^N|^2\right]e^{-\varkappa\tau}\,dx+$$

$$+\int\limits_{Q_\tau}[2d_0|\nabla u_t|^2+(\varkappa\beta_0-\beta_1-\gamma_0)|\nabla u^N|^2+$$

$$+\big(\varkappa-\frac{\beta_2}{\delta_0}-1\big)|u_t^N|^2+2\alpha_0\sum_{i=1}^n|u_{x_it}^N|^{p(x)}-$$

$$-\frac{2\delta_2}{r(x)}\sum_{i=1}^n|u_{x_it}^N|^{r(x)}-\delta_0|u^N|^2+\big(2\alpha_0-\frac{2\delta_1}{q(x)}\big)\times$$

$$\times|u_t^N|^{q(x)}]e^{-\varkappa t}\,dx\,dt\leqslant\int\limits_{\Omega_0}(|u_1^N|^2+\beta^0|\nabla u_0^N|^2)\,dx+$$

$$+2\int\limits_{Q_\tau}\Big[\frac{M_1(\delta_1)}{q'(x)}|f_0(x,t)|^{q'(x)}+$$

$$+\frac{M_2(\delta_2)}{r'(x)}\sum_{i,j=1}^n|f_i(x,t)|^{r]'(x)}\Big]e^{-\varkappa t}\,dx\,dt, \quad (7)$$

$\tau\in[0,T]$, в якій сталі M_1, M_2 не залежать від N.

Використовуючи нерівність Фрідріхса [1, с. 50], виберемо δ_0 так, щоб

$$\delta_0\int\limits_{Q_\tau}|u^N|^2\,dx\,dt\leqslant\int\limits_{Q_\tau}|\nabla u^N|^2\,dx\,dt,\ \tau\in(0,T].$$

Крім того, нехай $\varkappa, \delta_1, \delta_2$ задовольняють умови $\delta_1=\frac{q_1\alpha_0}{2}$; $\delta_2=\min\{\frac{\alpha_0 p_1}{2}, d_0\}$; $\varkappa=\max\{\frac{\beta_2}{\delta_0}+3; \frac{\beta_1+\gamma_0+2}{\beta_0}\}$. Тоді з (7), умови (P1) і лем 1, 5 [7] одержуємо оцінки

$$\|u^N\|_{L^\infty((0,T);H_0^1(\Omega))}\leqslant M_3,$$

$$\|u_t^N\|_{L^\infty((0,T);L^2(\Omega))}\leqslant M_3, \quad (8)$$

$$\|u_t^N\|_{W_{x,0}^{1,r(x),q(x)}(Q_T)}\leqslant M_3, \quad (9)$$

де стала M_3 не залежить від N. Введемо оператор

$$A:\ W_{x,0}^{1,r(x),q(x)}(Q_T)\to(W_{x,0}^{1,r(x),q(x)}(Q_T))^*$$

за формулою

$$\langle Au,v\rangle_{0,T}=\int\limits_{Q_\tau}\Big[\sum_{i=1}^n a_i(x,t)|u_{x_i}^N|^{p(x)-2}u_{x_i}^N v_{x_i}+$$

$$+a_0(x,t)|u^N|^{q(x)-2}u^N v+\sum_{i,j=1}^n d_{ij}(x,t)u_{x_i}^N v_{x_j}^N\Big]dxdt,$$

$$u,v\in W_{x,0}^{1,r(x),q(x)}(Q_T),$$

де через $\langle\cdot,\cdot\rangle_{s,\tau}$ позначено скалярний добуток між просторами $(W_{x,0}^{1,r(x),q(x)}(Q_{s,\tau}))^*$ і $W_{x,0}^{1,r(x),q(x)}(Q_{s,\tau})$. Тоді з умови (**A**) й оцінки (9) випливає, що

$$\|Au_t^N\|_{(W_{x,0}^{1,r(x),q(x)}(Q_T))^*}\leqslant M_4, \quad (10)$$

де стала M_4 не залежить від N. Отже, згідно з (8) – (10), існує підпослідовність $\{u^{N_k}\}_{k=1}^\infty$ послідовності $\{u_t^N\}_{N=1}^\infty$ така, що

$$u_t^{N_k}(\cdot,T)\to\xi \text{ слабко в } L^2(\Omega),$$

$$u^{N_k}\to u *\text{–слабко в } L^\infty((0,T);H_0^1(\Omega)),$$

$$u_t^{N_k}\to u_t *\text{-слабко в } L^\infty((0,T);L^2(\Omega)),$$

$$u_t^{N_k}\to u_t \text{ слабко в } W_{x,0}^{1,r(x),q(x)}(Q_T),$$

$$u^{N_k}\to u \text{ в } L^2(Q_T),$$

$$Au_t^{N_k}\to\chi \text{ слабко в } (W_{x,0}^{1,r(x),q(x)}(Q_T))^*,$$

$$u_t^{N_k}\to u_t \text{ слабко в } W_{x,0}^{1,2}(Q_T) \quad (11)$$

при $k\to\infty$.

Нехай N_0 довільне фіксоване натуральне число. Тоді, використавши (11), з (4) одержуємо рівність

$$\int\limits_{\Omega_T}\xi v^{N_0}\,dx+\int\limits_{Q_\tau}\Big[-u_t v_t^{N_0}+\sum_{i,j=1}^n b_{ij}(x,t)u_{x_i}v_{x_j}^{N_0}+$$

$$+L_1(u,f_0)v^{N_0}-\sum_{i=1}^n f_i(x,t)v_{x_i}^{N_0}\Big]dxdt+$$

$$+\langle\chi,v^{N_0}\rangle_{0,T}=\int\limits_{\Omega_0}u_1(x)v^{N_0}(x,0)\,dx, \quad (12)$$

правильну для довільної функції $v^{N_0}\in\mathcal{M}_{N_0}$, де

$$\mathcal{M}_{N_0}=\{w\,:\,w(x,t)=\sum_{k=1}^{N_0}z_k^{N_0}(t)\varphi^k(x),$$

$$z_k^{N_0}\in C^1([0,T]),\ k=1,\dots,N_0\}.$$

Нехай $\mathcal{M}=\bigcup\limits_{N_0=1}^\infty\mathcal{M}_{N_0}$. Множина $\mathcal{M}$ щільна у просторі таких функцій v, що $v\in$

$W_{x,0}^{1,r(x),q(x)}(Q_T)$, $v_t \in L^2(Q_T)$. Тому з (12) одержуємо рівність

$$\int\limits_{\Omega_T} \xi v\, dx + \int\limits_{Q_\tau} \Big[- u_t v_t + \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}(x,t) u_{x_i} v_{x_j} +$$

$$+ L_1(u, f_0) v - \sum_{i=1}^{n} f_i(x,t) v_{x_i} \Big] dxdt +$$

$$+ \langle \chi, v \rangle_{0,T} = \int\limits_{\Omega_0} u_1(x) v(x,0)\, dx, \qquad (13)$$

правильну для довільних функцій v таких, що $v \in W_{x,0}^{1,r(x),q(x)}(Q_T)$, $v_t \in L^2(Q_T)$.

Згідно з лемою 1.2 [3, с. 20] $u \in C([0,T]; L^2(\Omega))$. Тому $u^{N_k}(\cdot, 0) \to u(\cdot, 0)$ слабко в $L^2(\Omega)$. З іншого боку $u^{N_k}(\cdot, 0) = u_0^{N_k} \to u_0$ в $L^2(\Omega)$. Отже, $u(x,0) = u_0(x)$ для майже всіх $x \in \Omega$.

З (13), випливає, що

$$u_{tt} = - \sum_{i,j=1}^{n} (b_{ij}(x,t) u_{x_i})_{x_j} - \sum_{i=1}^{n} c_i(x,t) u_{x_i} -$$

$$- b_0(x,t) u + f_0(x,t) - \sum_{i=1}^{n} f_{i,x_i}(x,t) - \chi.$$

Врахувавши гладкість правої частини цієї рівності, одержимо вкладення

$$u_{tt} \in (W_{x,0}^{1,r(x),q(x)}(Q_T))^* \subset$$
$$\subset L^{r_0}((0,T); L^{q'(x)}(\Omega) + (W_0^{1,r(x)}(\Omega))^*),$$

де $r_0 = \min\{2; \operatorname{ess\,inf}\limits_{\Omega} q'(x)\}$. Оскільки

$$u_t \in L^{r_0}((0,T); L^{q(x)}(\Omega) \cap W_0^{1,r(x)}(\Omega)),$$

то на підставі леми 1.2 [3, с. 20] $u_t \in C([0,T]; L^{q'(x)}(\Omega) + (W_0^{1,r(x)}(\Omega))^*)$, тобто $u_t(\cdot, 0)$ має сенс.

Введемо простір

$$W(Q_T) = \{ w \, : \, w \in W_{x,0}^{1,r(x),q(x)}(Q_T)),$$

$$w_t \in (W_{x,0}^{1,r(x),q(x)}(Q_T))^* \}.$$

На підставі теореми 2 [7] правильна формула

$$\langle u_{tt}, u_t e^{-\varkappa t} \rangle_{s,\tau} = \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega_\tau} u_t^2 e^{-\varkappa \tau} dx -$$

$$- \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega_s} u_t^2 e^{-\varkappa s} dx + \frac{\varkappa}{2} \int\limits_{Q_{s,\tau}} u_t^2 e^{-\varkappa t} dxdt \qquad (14)$$

майже для всіх s, τ, $s < \tau$ з проміжка $[0,T]$. Зазначимо, що

$$\langle u_{tt}, \varphi^j \rangle_{((W_0^{1,r(x),q(x)}(\Omega))^*, W_0^{1,r(x),q(x)}(\Omega))} \in L^{r_0}(0,T).$$

Враховуючи гладкість функцій u^N, з (4) отримуємо

$$\langle u_{tt}^{N_k}, \varphi^j \rangle_{((W_0^{1,r(x),q(x)}(\Omega))^*, W_0^{1,r(x),q(x))}(\Omega))} \to$$
$$\to \langle u_{tt}, \varphi^j \rangle_{((W_0^{1,r(x),q(x)}(\Omega))^*, W_0^{1,r(x),q(x))}(\Omega))}$$

слабко в $L^{r_0}(0,T)$ для всіх $j \in \mathbb{N}$. Отже, на підставі леми 1.2 [3, с. 20], одержимо

$$\int\limits_{\Omega} u_t^{N_k}(x,0) \varphi^j(x) dx \to \int\limits_{\Omega} u_t(x,0) \varphi^j(x) dx.$$

З іншого боку,

$$\int\limits_{\Omega} u_t^{N_k}(x,0) \varphi^j(x) dx \to \int\limits_{\Omega} u_1(x) \varphi^j(x) dx.$$

Тому $u_t(x,0) = u_1(x)$. Аналогічно доводимо, що $u_t(x,T) = \xi(x)$.

Узявши до уваги (14), аналогічно як (13) одержимо рівність

$$\frac{1}{2} \int\limits_{\Omega_\tau} u_t^2 e^{-\varkappa \tau} dx - \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega_s} u_t^2 e^{-\varkappa s} dx + \int\limits_{Q_{s,\tau}} \Big[- \frac{\varkappa}{2} u_t^2 +$$

$$+ \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}(x,t) u_{x_i} u_{x_j t} - \sum_{i=1}^{n} f_i(x,t) u_{x_i t} +$$

$$+ L_1(u, f_0) u_t \Big] e^{-\varkappa t} dxdt + \langle \chi, u_t e^{-\varkappa t} \rangle_{s,\tau} = 0 \quad (15)$$

для майже всіх s, τ, $s < \tau$ з проміжка $[0,T]$. Оскільки $u_t \in L^\infty((0,T); L^2(\Omega))$, то існує така послідовність $\{s_m\} \subset [0,T]$, $\lim\limits_{m \to +\infty} s_m = 0$ невиключних точок для функції $t \to u_t(x,t)$, що $u_t(\cdot, s_m) \to u_t(\cdot, 0)$ слабко в $L^2(\Omega)$. Тоді з (15) на підставі леми 5.3 [1, с. 20] з (15) отримуємо нерівність

$$\frac{1}{2} \int\limits_{\Omega_\tau} u_t^2 e^{-\varkappa \tau} dx + \int\limits_{Q_\tau} \Big[- \frac{\varkappa}{2} u_t^2 + \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}(x,t) u_{x_i} u_{x_j t} +$$

$$+L_1(u,f_0)u_t-\sum_{i=1}^n f_i(x,t)u_{x_it}\Bigg]e^{-\varkappa t}dxdt+$$

$$+\langle\chi,u_te^{-\varkappa t}\rangle_{0,\tau}\geqslant\int\limits_{\Omega_0}u_1^2(x)dx \qquad (16)$$

майже для всіх $\tau\in(0,T)$. Зокрема, якщо $u_1=0$, то (16) буде рівністю.

Згідно з лемою 2.2 [1, с. 57], яка залишається правильною і для оператора A, і лемою 1.3 [1, с. 84], оператор A семінеперервний. Розглянемо послідовність y_k, де

$$y_k=\langle A(u_t^{N_k})-A(v),(u_t^{N_k}-v)e^{-\varkappa t}\rangle_{0,T},\quad v\in W^{1,r(x),q(x)}_{x,0}(Q_T).$$

Очевидно,

$$0\leqslant y_k=\langle A(u_t^{N_k}),u_t^{N_k}e^{-\varkappa t}\rangle_{0,T}-$$

$$-\langle A(u_t^{N_k}),ve^{-\varkappa t}\rangle_{0,T}-\langle Av,(u_t^{N_k}-v)e^{-\varkappa t}\rangle_{0,T}=$$

$$=\int\limits_{Q_\tau}\Bigg[-L_1(u^{N_k},f_0)u_t^{N_k}+\sum_{i=1}^n f_i(x,t)u_{x_it}^{N_k}-$$

$$-u_{tt}^{N_k}u_t^{N_k}-\sum_{i,j=1}^n b_{ij}(x,t)u_{x_i}^{N_k}u_{x_jt}^{N_k}\Bigg]e^{-\varkappa t}\,dx\,dt=$$

$$=-\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_\tau}\Bigg[|u_t^{N_k}|^2+\sum_{i,j=1}^n b_{ij}(x,t)u_{x_i}^{N_k}u_{x_j}^{N_k}\Bigg]dx+$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_0}\Bigg[|u_1^{N_k}|^2+\sum_{i,j=1}^n b_{ij}(x,0)u_{0,x_i}^{N_k}u_{0,x_j}^{N_k}\Bigg]dx+$$

$$+\int\limits_{Q_\tau}\Bigg[-L_1(u^{N_k},f_0)u_t^{N_k}+\sum_{i=1}^n f_i(x,t)u_{x_it}^{N_k}-\frac{\varkappa}{2}u_t^2-$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^n(\varkappa b_{ij}(x,t)-b_{ijt}(x,t))u_{x_i}^{N_k}u_{x_j}^{N}\Bigg]e^{-\varkappa t}\,dx\,dt-$$

$$-\langle A(u_t^{N_k}),ve^{-\varkappa t}\rangle_{0,T}-\langle A(v,(u_t^{N_k}-v)e^{-\varkappa t}\rangle_{0,T}.$$

На підставі леми 5.3 [1, с. 20] і (11) при достатньо великому $\varkappa$ одержимо

$$0\leqslant\lim_{k\to\infty}\sup y_k\leqslant-\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_\tau}\Bigg[u_t^2+\sum_{i,j=1}^n b_{ij}(x,t)u_{x_i}u_{x_j}\Bigg]\times$$

$$\times e^{-\varkappa\tau}\,dx+\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_\tau}\Bigg[u_1^2+\sum_{i,j=1}^n b_{ij}(x,0)u_{0,x_i}u_{0,x_j}\Bigg]dx+$$

$$+\int\limits_{Q_\tau}\Bigg[-L_1(u,f_0)u_t+\sum_{i,j=1}^n f_i(x,t)u_{x_it}-\frac{\varkappa}{2}u_t^2-$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n(\varkappa b_{ij}(x,t)-b_{ijt}(x,t))u_{x_i}u_{x_j}\Bigg]e^{-\varkappa t}\,dx\,dt-$$

$$-\langle\chi,ve^{-\varkappa t}\rangle_{0,T}-\langle A(v),(u_t-v)e^{-\varkappa t}\rangle_{0,T}. \qquad (17)$$

Додаючи (16) до (17), отримаємо

$$\langle\chi-A(v),(u_t-v)e^{-\varkappa t}\rangle_{0,T}\geqslant 0$$

для довільної $v\in W^{1,r(x),q(x)}_{x,0}(Q_T)$. Звідси випливає, що $\chi=A(u_t)$, отже, u є розв'язком задачі (1) – (3) в сенсі розподілів.

Доведемо єдиність розв'язку задачі (1) – (3). Нехай існує два розв'язки $u^{(1)}$, $u^{(2)}$ задачі (1) – (3). Тоді для $u\overset{def}{=}u^{(1)}-u^{(2)}$ правильна рівність

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_\tau}u_t^2e^{-\varkappa\tau}dx+\int\limits_{Q_\tau}\Bigg[\sum_{i=1}^n a_i(x,t)(|u_{x_it}^{(1)}|^{p(x)-2}u_{x_it}^{(1)}-$$

$$-|u_{x_it}^{(2)}|^{p(x)-2}u_{x_it}^{(2)})u_{x_it}+\sum_{i,j=1}^n d_{ij}(x,t)u_{x_it}u_{x_jt}+$$

$$+\sum_{i,j=1}^n b_{ij}(x,t)u_{x_i}u_{x_jt}+\sum_{i=1}^n c_i(x,t)u_{x_i}u_t+$$

$$+a_0(x,t)(|u_t^{(1)}|^{q(x)-2}u_t^{(1)}-|u_t^{(2)}|^{q(x)-2}u_t^{(2)})+$$

$$+b_0(x,t)uu_t\Bigg]e^{-\varkappa t}\,dx\,dt=0. \qquad (18)$$

Крім того, $u(x,0)=0$.

Оцінки доданків цієї рівності аналогічні до $\mathcal{I}_1$ – $\mathcal{I}_6$, а на підставі умови **(A)**

$$\int\limits_{Q_T}\Bigg[\sum_{i=1}^n a_i(x,t)(|u_{x_it}^{(1)}|^{p(x)-2}u_{x_it}^{(1)}-|u_{x_it}^{(2)}|^{p(x)-2}\times$$

$$\times u_{x_it}^{(2)})u_{x_it}+a_0(x,t)(|u_t^{(1)}|^{q(x)-2}u_t^{(1)}-$$

$$-|u_t^{(2)}|^{q(x)-2}u_t^{(2)})u_t^N\Bigg]e^{-\varkappa t}\,dx\,dt\geqslant 0.$$

Тоді з (18) випливає нерівність

$$\int\limits_{Q_T}\Big[d_0|\nabla u_t|^2+(\varkappa\beta_0-\beta_1-\gamma_0)|\nabla u|^2+$$
$$+\left(\varkappa-\frac{\beta_2}{\delta_0}-1\right)|u_t|^2-\delta_0|u|^2\Big]e^{-\varkappa t}\,dx\,dt\leqslant 0.$$

Вибравши δ_0, $\varkappa$ такими ж як і при доведенні існування розв'язку, одержимо оцінку

$$\int\limits_{Q_T}\Big[|\nabla u|^2+|\nabla u_t|^2+|u_t|^2\Big]e^{-\varkappa t}\,dx\,dt\leqslant 0,$$

звідки $u\equiv u^{(1)}-u^{(2)}\equiv 0$ майже всюди в Q_T. Отже, $u^{(1)}=u^{(2)}$. Теорему доведено.

Нехай тепер $d_{ij}\equiv 0$ для всіх $i,j=1,\dots,n$, функція $u_1\equiv 0$, $f_i\equiv 0$ для всіх $i=1,\dots,n$. Позначимо через $W^{1,p(x),q(x)}_{x,0}(Q_T)=W^{1,p(x)}_{x,0}(Q_T)\cap L^{q(x)}(Q_T)$.

Розглянемо мішану задачу

$$L(u,f_0)-\sum_{i=1}^{n}(a_i(x,t)|u_{x_it}|^{p(x)-2}u_{x_it})_{x_i}-$$
$$-\sum_{i,j=1}^{n}(b_{ij}(x,t)u_{x_i})_{x_j}=0, \qquad (19)$$

$$u(x,0)=u_0(x),\quad u_t(x,0)=0,\quad x\in\Omega, \qquad (20)$$

$$u|_{S_T}=0. \qquad (21)$$

Теорема 2. *Нехай виконуються умови* $(\mathbf{A}),(\mathbf{B}),(\mathbf{C}),(\mathbf{P}),(\mathbf{P1})$ *і, крім того,* $a_{i,x_i},a_{it},\ b_{ijtt},\ b_{kjx_j},\ c_{kt},\ b_{0t}\in L^\infty(Q_T)$, $i=0,\dots n,\ k,j=1,\dots,n;\ f_0,f_{0t}\in L^2(Q_T),u_0\in H^2(\Omega)\cap H^1_0(\Omega)$. *Тоді існує єдиний розв'язок* u *задачі (1) – (3) (в сенсі розподілів) такий, що* $u\in C([0,T];H^1_0(\Omega))$, $u_t\in W^{1,p(x),q(x)}_{x,0}(Q_T)\cap C([0,T];L^2(\Omega))$, $u_{tt}\in L^\infty((0,T);L^2(\Omega))$.

Доведення. Нехай $\{\varphi^k(x):k\geqslant 1\}$ – база простору $H^2(\Omega)\cap H^1_0(\Omega)\cap W^{1,p(x),q(x)}(\Omega)$ ортонормована в $L^2(\Omega)$. Тоді для послідовності $\{u^N\}_{N=1}^\infty$, побудованій при доведенні теореми 1, правильні оцінки (8) – (10), в яких замість простору $W^{1,r(x),q(x)}_{x,0}(Q_T)$ буде простір $W^{1,p(x),q(x)}_{x,0}(Q_T)$. Крім того, $d_0\equiv 0$ і для послідовності $\{Au^N_t\}_{N=1}^\infty$ правильна оцінка (10) при $r(x)=p(x)$.

Продиференціюємо (4) за змінною t (зазначимо, що згідно з умовами теореми 2 це можливо):

$$\int\limits_{\Omega_\tau}\Big[\sum_{i=1}^{n}(p(x)-1)a_i(x,t)|u^N_{x_it}|^{p(x)-2}u^N_{x_itt}\varphi^k_{x_i}+$$
$$+\sum_{i=1}^{n}a_{it}(x,t)|u^N_{x_it}|^{p(x)-2}u^N_{x_it}\varphi^k_{x_i}+$$
$$+\sum_{i,j=1}^{n}b_{ij}(x,t)u^N_{x_it}\varphi^k_{x_j}+\sum_{i,j=1}^{n}b_{ijt}(x,t)u^N_{x_i}\varphi^k_{x_j}+$$
$$+(L(u^N,f_0))_t\varphi^k\Big]\,dx=0. \qquad (22)$$

Помножимо кожне рівняння (22) відповідно на функцію $c^N_{ktt}(t)e^{-\rho t}$, $\rho>0$, підсумуємо їх за k від 1 до N, проінтегруємо за t по проміжку $[0,\tau]$, $\tau\leqslant T$. Після виконання цих операцій одержимо рівність

$$\int\limits_{Q_\tau}\Big[\sum_{i=1}^{n}(p(x)-1)a_i(x,t)|u^N_{x_it}|^{p(x)-2}(u^N_{x_itt})^2+$$
$$+\sum_{i=1}^{n}a_{it}(x,t)|u^N_{x_it}|^{p(x)-2}u^N_{x_it}u^N_{x_itt}+$$
$$+\sum_{i,j=1}^{n}b_{ij}(x,t)u^N_{x_it}u^N_{x_jtt}+\sum_{i,j=1}^{n}b_{ijt}(x,t)u^N_{x_i}u^N_{x_jtt}+$$
$$+(L(u^N,f_0))_tu^N_{tt}\Big]e^{-\rho t}\,dx\,dt=0. \qquad (23)$$

Очевидно, що

$$\mathcal{I}_7:=\int\limits_{Q_\tau}u^N_{ttt}u^N_{tt}e^{-\rho t}\,dx\,dt=\frac12\int\limits_{\Omega_\tau}|u^N_{tt}|^2e^{-\rho\tau}\,dx+$$
$$+\frac{\rho}{2}\int\limits_{Q_\tau}|u^N_{tt}|^2e^{-\rho t}\,dx\,dt-\frac12\int\limits_{\Omega_0}|u^N_{tt}|^2\,dx.$$

На підставі умови (A)

$$\mathcal{I}_8:=\int\limits_{Q_\tau}\Big[(p(x)-1)\sum_{i=1}^{n}a_i(x,t)|u^N_{x_it}|^{p(x)-2}(u^N_{x_itt})^2+$$

$$+(q(x)-1)a_0(x,t)|u_t^N|^{q(x)-2}(u_{tt}^N)^2\Big]e^{-\rho t}\,dx\,dt \geqslant$$

$$\geqslant \alpha_0 \int\limits_{Q_\tau}\Big[(p(x)-1)\sum_{i=1}^{n}|u_{x_it}^N|^{p(x)}|u_{x_itt}^N|^2+$$

$$+(q(x)-1)|u_t^N|^{q(x)-2}(u_{tt}^N)^2\Big]e^{-\rho t}\,dx\,dt.$$

Згідно з умовами теореми 2

$$\mathcal{I}_9 := \int\limits_{Q_\tau}\Big[\sum_{i=1}^{n} a_{it}(x,t)|u_{x_it}^N|^{p(x)-2}u_{x_it}^N u_{x_itt}^N+$$

$$+a_{0t}(x,t)|u_t^N|^{q(x)-2}u_t^N u_{tt}^N\Big]e^{-\rho t}\,dx\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\int\limits_{Q_\tau}\Big[\delta_2\sum_{i=1}^{n}|u_{x_it}^N|^{p(x)-2}|u_{x_itt}^N|^2+\frac{\alpha_2}{\delta_2}|u_{x_it}^N|^{p(x)}+$$

$$+\delta_2|u_t^N|^{q(x)-2}|u_{tt}^N|^2+\frac{\alpha_2}{\delta_2}|u_t^N|^{q(x)}\Big]e^{-\rho t}\,dx\,dt,$$

де $\alpha_2 = \max\limits_{i=0,1,\dots,n}\operatorname*{ess\,sup}\limits_{Q_T} a_{it}^2(x,t),\ \delta_2>0$.

На підставі умови (B) та умов теореми

$$\mathcal{I}_{10} := \int\limits_{Q_\tau}\sum_{i,j=1}^{n}(b_{ij}(x,t)u_{x_it}^N + b_{ijt}(x,t)u_{x_i}^N)u_{x_jtt}^N\times$$

$$\times e^{-\rho t}\,dx\,dt = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_\tau}\Big[\sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}(x,t)u_{x_it}^N u_{x_jt}^N+$$

$$+2\sum_{i,j=1}^{n} b_{ijt}(x,t)u_{x_i}^N u_{x_jt}^N\Big]e^{-\rho\tau}\,dx+$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{Q_\tau}\Big[\sum_{i,j=1}^{n}(\rho b_{ij}(x,t)-3b_{ijt}(x,t))u_{x_it}^N u_{x_jt}^N+$$

$$+2\sum_{i,j=1}^{n}(\rho b_{ijt}(x,t)-b_{ijtt}(x,t))u_{x_i}^N u_{x_jt}^N\Big]\times$$

$$\times e^{-\rho t}\,dx\,dt \geqslant \int\limits_{\Omega_\tau}\Big[\Big(\frac{\beta_0}{2}-\delta_2\Big)|\nabla u_t^N|^2-$$

$$-\frac{\beta_1^2}{\delta_2}|\nabla u^N|^2\Big]e^{-\rho\tau}\,dx + \frac{1}{2}\int\limits_{Q_\tau}\Big[\Big(\frac{\rho\beta_0}{2}-\frac{3\beta_1}{2}-$$

$$-\delta_2)|\nabla u_t^N|^2-\Big(\frac{\rho^2\beta_1^2}{\delta_2}+\frac{\beta_3^2}{\delta_2}\Big)|\nabla u^N|^2\Big]e^{-\rho t}\,dx\,dt,$$

де $\beta_3 = \operatorname*{ess\,sup}\limits_{Q_T}\sqrt{\sum\limits_{i,j=1}^{n} b_{ijtt}^2(x,t)}$. Згідно з умовою (C) та умовами теореми щодо c_i

$$\mathcal{I}_{11} := \int\limits_{Q_\tau}\Big[\sum_{i=1}^{n} c_i(x,t)u_{x_it}^N u_{tt}^N + \sum_{i=1}^{n} c_{it}(x,t)u_{x_i}^N\times$$

$$\times u_{tt}^N\Big]e^{-\rho t}\,dx\,dt \leqslant \frac{1}{2}\int\limits_{Q_\tau}(\delta_2|\nabla u_t^N|^2+$$

$$+\gamma_1|\nabla u^N|^2+\big(\frac{\gamma_0}{\delta_2}+1\big)|u_{tt}^N|^2)e^{-\rho t}\,dx\,dt,$$

де $\gamma_1 = \operatorname*{ess\,sup}\limits_{Q_T}\sum\limits_{i=1}^{n} c_{it}^2(x,t)$. Крім того,

$$\mathcal{I}_{12} := \int\limits_{Q_\tau}(b_0(x,t)u_t^N + b_{0t}(x,t)u^N)u_{tt}^N e^{-\rho t}\,dx\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\int\limits_{Q_\tau}(2|u_{tt}^N|^2+\beta_2|u_t^N|^2+\beta_4|u^N|^2)e^{-\rho t}\,dx\,dt,$$

де $\beta_4 = \operatorname*{ess\,sup}\limits_{Q_T} b_{0t}^2(x,t)$;

$$\mathcal{I}_{13} := -\int\limits_{Q_\tau} f_{0t}(x,t)u_{tt}^N e^{-\rho t}\,dx\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \tfrac{1}{2}\int\limits_{Q_\tau}(|u_{tt}^N|^2+|f_{0t}(x,t)|^2)e^{-\rho t}\,dx\,dt.$$

Враховуючи оцінки інтегралів $\mathcal{I}_7$ –$\mathcal{I}_{13}$, з (23) одержимо нерівність

$$\int\limits_{\Omega_\tau}\Big[(u_{tt}^N)^2+(\beta_0-2\delta_2)|\nabla u_t^N|^2\Big]e^{-\rho\tau}\,dx+$$

$$+\int\limits_{Q_\tau}\Big[\Big(\rho-\frac{\gamma_0}{\delta_2}-4\Big)|u_{tt}^N|^2+(2\alpha_0(p(x)-1)-$$

$$-\delta_2)\sum_{i=1}^{n}|u_{x_it}^N|^{p(x)-2}|u_{x_itt}^N|^2+(2\alpha_0(q(x)-1)-$$

$$-\delta_2)|u_t^N|^{q(x)-2}|u_{tt}^N|^2+(\rho\beta_0-3\beta_1-3\delta_2)|\nabla u_t^N|^2\Big]\times$$

$$\times e^{-\rho t}\,dx\,dt \leqslant \int\limits_{\Omega_0}|u_{tt}^N|^2\,dx+\int\limits_{Q_\tau}\Big[\frac{\alpha_2}{\delta_2}\sum_{i=1}^{n}|u_{x_it}^N|^{p(x)}+$$

$$+\frac{\alpha_2}{\delta_2}\sum_{i=1}^{n}|u_t^N|^{q(x)}+\left(\frac{2\rho^2\beta_1^2}{\delta_2}+\frac{2\beta_3^2}{\delta_2}+\gamma_1\right)|\nabla u^N|^2+$$

$$+\beta_2|u_t^N|^2+\beta_4|u^N|^2\Big]e^{-\rho t}\,dx\,dt+$$

$$+\frac{2\beta_1}{\delta_2}\int\limits_{\Omega_\tau}|\nabla u^N|^2e^{-\rho\tau}\,dx, \qquad (24)$$

де $\tau\in[0,T]$.

Знову, використовуючи (4), отримаємо рівність

$$\int\limits_{\Omega_0}\Big[|u_{tt}^N|^2-\sum_{i,j=1}^{n}(b_{ij}(x,0)u_{0,x_i}^N)_{x_j}u_{tt}^N+\sum_{i=1}^{n}c_i(x,0)\times$$

$$\times u_{0,x_i}^N u_{tt}^N+b_0(x,0)u_0^N u_{tt}^N-f_0(x,0)u_{tt}^N\Big]\,dx=0.$$

Звідси

$$\int\limits_{\Omega_0}|u_{tt}^N|^2\,dx\leqslant 5\int\limits_{\Omega_0}\Big[(n^3\beta_5+\tfrac{\gamma_1}{2})|\nabla u_0^N|^2+$$

$$+\beta_6\sum_{i=1}^{n}|u_{0,x_ix_j}^N|^2+\beta_2|u_0^N|^2+f_0^2(x,0)\Big]\,dx,$$

де $\beta_5=\operatorname*{ess\,sup}_{\Omega}\sum\limits_{i,j=1}^{n}b_{ijx_j}^2(x,0)$, $\beta_6=\operatorname*{ess\,sup}_{\Omega}\sum\limits_{i,j=1}^{n}b_{ij}^2(x,0)$.

Тоді, враховуючи умови теореми щодо функції u_0, одержимо

$$\int\limits_{\Omega_0}|u_{tt}^N|^2\,dx\leqslant K_1, \qquad (25)$$

причому стала K_1 не залежить від N. Виберемо в (24) $\delta_2=\min\{\frac{\beta_0}{4},\alpha_0(p_1-1);\alpha_0(q_1-1)\}$, $\rho=\max\{\frac{\gamma_0}{\delta_2}+5;\frac{3\beta_1+3\delta_2+1}{\beta_0}\}$. Отже, враховуючи (8), (9), (19), одержимо оцінку

$$\int\limits_{\Omega_\tau}(|u_{tt}^N|^2+|\nabla u_t^N|^2)\,dx+\int\limits_{Q_\tau}(|u_{tt}^N|^2+$$

$$+|\nabla u_t^N|^2)\,dx\,dt\leqslant K_2,\ \tau\in[0,T], \qquad (26)$$

де стала K_2 не залежить від N.

На підставі оцінок (8) – (10), (26) можемо стверджувати існування такої підпослідовності $\{u^{N_k}\}_{k=1}^{\infty}$ послідовності $\{u^N\}_{N=1}^{\infty}$, що

$$u^{N_k}\to u\ *\text{–слабко в } L^\infty((0,T);H_0^1(\Omega)),$$

$$\nabla u_t^{N_k}\to\nabla u_t\ *\text{–слабко в}$$

$$L^\infty((0,T);L^2(\Omega))\cap L^{q(x)}(Q_T),$$

$$u_{tt}^{N_k}\to u_{tt}\text{ – слабко в } L^\infty((0,T);L^2(\Omega)),$$

$$Au_t^{N_k}\to\chi\text{ – слабко в } (W_{x,0}^{1,p(x),q(x)}(Q_T))^*$$

при $k\to\infty$. Далі, аналогічно як в теоремі 1, доводимо, що u задовольняє включення $u\in C([0,T];H_0^1(\Omega))$, $u_t\in L^\infty((0,T);H_0^1(\Omega))\cap L^{q(x)}(Q_T)\cap C([0,T];L^2(\Omega))$ і початкові умови (20), а також, що $\chi=A(u_t)$. Отже, u буде розв'язком (у сенсі розподілів) задачі (19) – (21).

Єдиність розв'язку u доводимо аналогічно до відповідного доведення теореми 1. Теорему доведено.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Гаевский Х., Грегер К., Захариас К.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. – М, 1978.

2. *Kováčik O., Rákosnik J.* On spaces $L^{p(x)}$ and $W^{l,p(x)}$ // Czechosl. Math. J. – 1991. – Vol. 41. – N 4. – P. 592-618.

3. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. – М., 1972.

4. *Коддингтон Э. А., Левинсон Н.* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. – М., 1958.

5. *Бугрій О., Лавренюк С.* Мішана задача для параболічного рівняння, яке узагальнює рівняння політропної фільтрації // Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2000. – Вип. 56. – С. 33–43.

6. *Лавренюк С. П., Процах Н. П.* Мішана задача для одного параболічного рівняння // Мат. методи та фіз. - мех. поля. – 2000. – Т. 43, N 3. – С. 56–63.

Стаття надійшла до редколегії 10.06.2005