УДК 123.456

©2005 р. А.О. Губка, М.І. Матійчук

Чернівецький національний університет ім. Юрія Федьковича, Чернівці

КРАЙОВА ЗАДАЧА ДЛЯ ПАРАБОЛІЧНИХ СИСТЕМ З ІНТЕГРАЛЬНИМИ УМОВАМИ

Установлено коректність загальної параболічної задачі з інтегральними умовами в крайових операторах.

The correctness of the boundary value problem for the parabolic systems with integral conditions in the boundary operators has been established.

Загальні параболічні крайові задачі з диференціальними крайовими умовами були об'єктом дослідження С.Д. Ейдельмана [1], С.Д. Івасишена [2], М.І. Матійчука [4] та інших. Задачі з нелокальними умовами за часовою змінною вивчено багатьма авторами, зокрема у працях Б.І. Пташника [3] та М.І. Матійчука [5].

У даній статті розглядається параболічна задача з крайовими умовами, які містять інтегральні оператори.

1. У шарі $\Pi^+ = (0,T) \times E_n^+$, $E_n^+ = \{x \in E_n,\ x_n \geq 0\}$ розглядається загальна параболічна крайова задача з інтегральними умовами на гіперплощині

$$Lu \equiv \frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{|k|\leq 2b} A_k(t,x)D_x^k u = f(t,x), \quad (1)$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad (2)$$

$$B_i(t,x,D_x)u|_{x_n=0} + \int_0^\infty P_i(t,x,D_x)u(t,x)dx_n =$$

$$= g_i(t,x'), \quad i = \overline{1,bN}, \quad (3)$$

$$B_i \equiv \sum_{|k|\leq r_i} b_{ik}(t,x)D_x^k,\ P_i \equiv \sum_{|k|\leq r_i} p_{ik}(t,x)D_x^k,$$

$$0 \leq r_i < 2b, \quad x' = (x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}).$$

Теорема 1(про коректність). *Нехай задача (1)-(3) в області Π^+ задовольняє умову рівномірної параболічності та умову Лопатинського, $A_k, f \in C_x^{(\alpha)}(\Pi^+)$, $\varphi \in C^{(2b+\alpha)}(E_n^+)$, $g_i \in C^{(2b-r_i+\alpha)}(\Pi')$, $\Pi' = (0,T)\times E_{n-1}$, $b_{ik}, p_{ik} \in C^{(2b-r_i+\alpha)}(\Pi^+)$, причому p_{ik} абсолютно сумовні за просторовою змінною x_n, виконується умова узгодженості на початковій гіперплощині*

$$B_i(0,x,D_x)\varphi|_{x_n=0} + \int_0^\infty P_i(0,x,D_x)\varphi(x)dx_n =$$

$$= g_i(0,x'), \quad i = \overline{1,bN}.$$

Тоді розв'язок задачі (1)-(3) зображається сумою інтеграла Пуассона, об'ємного і поверхневого інтегралів

$$u(t,x) = \int_{E_n} Z(t,0,x,\xi)\varphi(\xi)d\xi +$$

$$+ \int_0^t d\tau \int_{E_n} Z(t,\tau,x,\xi)f(\tau,\xi)d\xi +$$

$$+ \sum_{j=1}^{bN} \int_0^t d\tau \int_{E_{n-1}} \varepsilon_j^{(\alpha_j)}(t,\tau,x,\xi')\mu_j(\tau,\xi')d\xi', \quad (4)$$

де μ_j визначаються за допомогою резольвенти R_{ij} рівностями

$$\mu_j(t,x') = D_\Lambda^{(\alpha_j)}\overline{g}_j(t,x') +$$

$$+ \sum_{i=1}^{bN} \int_0^t d\tau \int_{E_{n-1}} R_{ij}(t,\tau,x',\xi')D_\Lambda^{(\alpha_j)}\overline{g}_i(\tau,\xi')d\xi',$$

$\overline{g}_i$ визначені нижче, і справджується нерівність

$$|u|_{2b+\alpha} \leq C\left(|\varphi|_{2b+\alpha} + |f|_\alpha + \sum_{j=1}^{bN} |g_j|_{2b-r_j+\alpha}\right). \quad (5)$$

Доведення. Доведення полягатиме у знаходженні й оцінці розв'язку вихідної задачі.

Для задачі (1)-(3) розв'язок будемо шукати у вигляді суми

$$u(t,x) = u_1(t,x) + u_2(t,x), \qquad (6)$$

де $u_1(t,x)$ – розв'язок задачі Коші

$$Lu_1 = f(t,x), \quad u_1|_{t=0} = \varphi(x), \qquad (7)$$

$u_2(t,x)$ – розв'язок крайової задачі

$$Lu_2 = 0, \quad u_2|_{t=0} = 0,$$

$$B_i u_2|_{x_n=0} + \int\limits_0^\infty P_i u_2 dx_n = \overline{g}_i(t,x'),\ i = \overline{1,bN},$$

$$\overline{g}_i(t,x') \equiv g_i(t,x') - B_i u_1|_{x_n=0} - \int\limits_0^\infty P_i\, u_1(t,x) dx_n.$$

Для задачі Коші (7) скористаємось наступною теоремою.

Теорема 2 (про коректність задачі Коші). *Нехай коефіцієнти системи (1) визначені в шарі $\Pi = (0,T)\times E_n$, неперервні по t, причому рівномірно щодо x при $|k| = 2b$. За аргументом x всі коефіцієнти гельдерові, тобто $A_k \in C_x^{(\alpha)}(\Pi)$. Система рівномірно параболічна. Тоді розв'язок задачі Коші (1)-(2) визначається сумою потенціалів [1,с. 237] :*

$$u(t,x) = \int\limits_{E_n} Z(t,0,x,\xi)\varphi(\xi)d\xi +$$

$$+ \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{E_n} Z(t,\tau,x,\xi) f(\tau,\xi) d\xi, \qquad (8)$$

причому якщо початкова функція $\varphi \in C(E_n)$, то розв'язок є неперервним, а його похідні – розривні на початковій гіперплощині і задовольняють нерівність

$$\left|D_x^k u(t,x)\right| \le C\left(|\varphi|_c \cdot t^{-\frac{|k|}{2b}} + |f|_\alpha\right). \qquad (9)$$

Якщо $\varphi \in C^{(2b+\alpha)}(E_n)$, то $u \in C^{(2b+\alpha)}(\Pi)$ і

$$|u|_{2b+\alpha} \le C(|\varphi|_{2b+\alpha} + |f|_\alpha). \qquad (10)$$

Продовживши коефіцієнти системи $A_k(t,x)$, праву частину $f(t,x)$ і початкову функцію $\varphi(x)$ з півпростору $x_n > 0$ на весь простір E_n зі збереженням гладкості, розв'язок u_1 задачі Коші (7) при виконанні умов теореми 2 зобразиться у вигляді (8), де Z – фундаментальна матриця розв'язків задачі Коші, що задовольняє нерівність [1, с. 73]:

$$\left|D_x^k Z(t,\tau,x,\xi)\right| \le C(t-\tau)^{-\frac{n+|k|}{2b}} e^{-c\rho(t,\tau,x,\xi)},$$

$$(|k| \le 2b),$$

$$\rho(t,\tau,x,\xi) = \left(\frac{|x-\xi|}{(t-\tau)^{1/2b}}\right)^q,\ q = \frac{2b}{2b-1}.$$

Розв'язок крайової задачі u_2 шукаємо за допомогою поверхневих потенціалів з невідомою щільністю μ_j:

$$u_2(t,x) = \sum_{j=1}^{bN} V_j(t,x) =$$

$$= \sum_{j=1}^{bN} \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{E_{n-1}} \varepsilon_j^{(\alpha_j)}(t,\tau,x,\xi')\mu_j(\tau,\xi')d\xi',$$

де

$$\varepsilon_j^{(\alpha_j)}(t,\tau,x,\xi') = G_j^{(\alpha_j)}(t-\tau, x-\xi',\tau,\xi') -$$

$$-W_j(t,\tau,x,\xi'), \quad 0 < \alpha_j < 1,$$

$$W_j(t,\tau,x,\xi') = \int\limits_\tau^t d\beta \int\limits_{E_n^+} Z(t,\beta,x,y) \times$$

$$\times L(\beta,y,D_y) G_j^{(\alpha_j)}(\beta-\tau, y-\xi',\tau,\xi')dy,$$

і для яких виконуються співвідношення [4, с. 87]:

$$\lim_{x_n\to 0} B_i(t,x,D_x)V_j(t,x) = \delta_{ij} I_\Lambda^{(\alpha_j)}\mu_j(t,x') +$$

$$+ \int\limits_o^t d\tau \int\limits_{E_{n-1}} \Big\{ B_i^{(0)} \Big[G_j^{(\alpha_j)}(t-\tau, x'-\xi',\tau,\xi') -$$

$$- G_j^{(\alpha_j)}(t-\tau, x'-\xi', t, y')\Big]\Big|_{y'=x'} +$$

$$+B_i^{(1)}(t,x',D_{x'})G_j^{(\alpha_j)}(t-\tau,x'-\xi',\tau,\xi')-$$
$$-\,B_i(t,x',D_{x'})W_j(t,\tau,x',\xi')\}\,\mu_j(\tau,\xi')d\xi', \tag{11}$$

де δ_{ij} – символ Кронекера,

$$B_i^{(0)}\equiv\sum_{|k|=r_i}b_{ik}(t,x')D_{x'}^k,\ B_i^{(1)}\equiv\sum_{|k|<r_i}b_{ik}(t,x')D_{x'}^k.$$

Тут $I_\Lambda^{(\alpha_j)}$ – оператор дробового інтегрування,

$$G_j^{(\alpha_j)}(t,x,\tau,\xi')=I_\Lambda^{(\alpha_j)}G_j(t,x,\tau,\xi')$$

– функції типу ядер Пуассона, для яких справджуються нерівності [4, с.85]:

$$\left|D_x^kG_j^{(\alpha_j)}\right|\le C_k\frac{e^{-c\rho(t,\tau,x,\xi)}}{(t-\tau)^{\frac{n-1+2b-r_j+|k|-2b\alpha_j}{2b}}}. \tag{12}$$

Розв'язок крайової задачі u_2 задовольняє однорідне рівняння за рахунок того, що

$$LW_j(t,\tau,x,\xi')=LG_j^{(\alpha_j)}(t,\tau,x,\xi'),\quad x_n>0.$$

При $x_n>0$ підінтегральні функції $\varepsilon_j^{(\alpha_j)}$ неперервні за сукупністю змінних, тому при $t\to0$ виконується нульова початкова умова. Задовольнимо крайові умови, користуючись співвідношенням (11):

$$B_i(t,x,D_x)u_2|_{x_n=0}+\int_0^\infty P_i(t,x,D_x)u_2(t,x)dx_n=$$
$$=\sum_{j=1}^{bN}\delta_{ij}I_\Lambda^{(\alpha_j)}\mu_j(t,x')+$$
$$+\sum_{j=1}^{bN}\int_0^t d\tau\int_{E_{n-1}}E_{ij}(t,\tau,x',\xi')\mu_j(\tau,\xi')d\xi'+$$
$$+\sum_{j=1}^{bN}\int_0^\infty dx_n\int_0^t d\tau\int_{E_{n-1}}P_i\,\varepsilon_j^{(\alpha_j)}(t,\tau,x,\xi')\times$$
$$\times\mu_j(\tau,\xi')d\xi'=\overline{g}_i(t,x'),\quad i=\overline{1,bN},$$

де

$$E_{ij}(t,\tau,x',\xi')\equiv B_i^{(0)}\Big[G_j^{(\alpha_j)}(t-\tau,x'-\xi',\tau,\xi')-$$
$$-\,G_j^{(\alpha_j)}(t-\tau,x'-\xi',t,y')\Big]\Big|_{y'=x'}+$$
$$+B_i^{(1)}G_j^{(\alpha_j)}(t-\tau,x'-\xi',\tau,\xi')-$$
$$-B_i(t,x',D_{x'})W_j(t,\tau,x',\xi'). \tag{13}$$

Враховуючи значення символу Кронекера, одержимо:

$$I_\Lambda^{(\alpha_i)}\mu_i(t,x')+\sum_{j=1}^{bN}\int_0^t d\tau\int_{E_{n-1}}\{E_{ij}(t,\tau,x',\xi')+$$
$$+\int_0^\infty P_i\varepsilon_j^{(\alpha_j)}(t,\tau,x,\xi')dx_n\Big\}\cdot\mu_j(\tau,\xi')d\xi'=$$
$$=\overline{g}_i(t,x'),\quad i=\overline{1,bN}. \tag{14}$$

Це інтегральні рівняння Вольтерри-Фредгольма 1-го роду відносно невідомих щільностей μ_j. Зведемо цю систему до еквівалентної системи рівнянь Вольтерри-Фредгольма 2-го роду. Для цього застосуємо до обох частин рівностей (14) оператор дробового диференціювання порядку α_i, оскільки він є правим оберненим до оператора дробового інтегрування:

$$\mu_i(t,x')+\sum_{j=1}^{bN}\int_0^t d\tau\int_{E_{n-1}}\Big\{D_\Lambda^{(\alpha_i)}E_{ij}(t,\tau,x',\xi')+$$
$$+D_\Lambda^{(\alpha_i)}\int_0^\infty P_i\varepsilon_j^{(\alpha_j)}(t,\tau,x,\xi')dx_n\Big\}\cdot\mu_j(\tau,\xi')d\xi'=$$
$$=D_\Lambda^{(\alpha_i)}\overline{g}_i(t,x'),\qquad i=\overline{1,bN} \tag{15}$$

при умові, що $\mu_i\in C_{x'}^{(\alpha)}$.

Позначимо ядро інтегрального оператора через

$$K_{ij}(t,\tau,x',\xi')\equiv-\Big[D_\Lambda^{(\alpha_i)}E_{ij}(t,\tau,x',\xi')+$$
$$+D_\Lambda^{(\alpha_i)}\int_0^\infty P_i\varepsilon_j^{(\alpha_j)}(t,\tau,x,\xi')dx_n\Big].$$

Тоді система (15) перепишеться у вигляді

$$\mu_i(t,x')=D_\Lambda^{(\alpha_i)}\overline{g}_i(t,x')+$$

$$+\sum_{j=1}^{bN}\int_0^t d\tau\int_{E_{n-1}} K_{ij}(t,\tau,x',\xi')\mu_j(\tau,\xi')d\xi', \quad (16)$$

$$i=\overline{1,bN}.$$

Отже, крайова задача для u_2 звелась до системи неоднорідних інтегральних рівнянь Вольтерри-Фредгольма 2-го роду (16). Щоб однозначно знайти розв'язок системи методом послідовних наближень, оцінимо ядра K_{ij}.

Функції $E_{ij}(t,\tau,x',\xi')$ визначаються сумою трьох доданків (13). Перший доданок містить різницю функцій типу ядер Пуассона по третьому і четвертому аргументах. Оскільки коефіцієнти вихідної системи і крайового оператора B_i гельдерові, то $G_j^{(\alpha_j)}$ також задовольняє умову Гельдера. Якщо позначити цей доданок через M_1, то на основі нерівності (12) одержимо таку оцінку:

$$|M_1|\le C\frac{e^{-c\rho(t,\tau,x',\xi')}}{(t-\tau)^{\frac{n-1+2b-r_j+r_i-2b\alpha_j-\alpha}{2b}}}. \quad (17)$$

Другий доданок є результатом дії крайового оператора, що містить тільки групу молодших. Оцінимо третій доданок. Для цього знайдемо оцінки похідних потенціалу W_j. Застосуємо до $G_j^{(\alpha_j)}$ оператор вихідної системи:

$$LG_j^{(\alpha_j)}(t,x,\tau,\xi')=\sum_{|k|=2b}[A_k(\tau,\xi')-A_k(t,x)]\times$$

$$\times D_x^k G_j^{(\alpha_j)}-\sum_{|k|\le 2b-1}A_k(t,x)D_x^kG_j^{(\alpha_j)}.$$

З урахуванням оцінки похідних функцій типу ядер Пуассона (12) і того, що коефіцієнти системи (1) гельдерові по просторовому аргументу, матимемо:

$$\left|LG_j^{(\alpha_j)}\right|\le C\Big(|x-\xi'|^{\alpha}(t-\tau)^{-\frac{n-1+2b-r_j+2b-2b\alpha_j}{2b}}+$$

$$+(t-\tau)^{-\frac{n-1+2b-r_j+2b-1-2b\alpha_j}{2b}}\Big)e^{-c\rho(t,\tau,x,\xi')}\le$$

$$\le C(t-\tau)^{-\frac{n-1+2b-r_j+2b-2b\alpha_j-\alpha}{2b}}e^{-c'\rho(t,\tau,x,\xi')}.$$

Тут ми скористались нерівністю $|z|^{\alpha}e^{-\varepsilon|z|^q}\le Const,\quad \varepsilon>0$. Для сумовності щільності $LG_j^{(\alpha_j)}$ необхідно, щоб

$$2b-r_j-2b\alpha_j-\alpha<0.$$

Покладемо

$$0<\alpha_j=\frac{2b-r_j-\varepsilon}{2b}<1,\quad \varepsilon<\alpha.$$

Тоді щільність задовольнятиме таку нерівність:

$$\left|LG_j^{(\alpha_j)}\right|\le C(t-\tau)^{-\frac{n-1+2b-\varepsilon'}{2b}}e^{-c\rho(t,\tau,x,\xi')},$$

$$\varepsilon'=\alpha-\varepsilon>0.$$

При такому виборі чисел α_j похідні потенціалу W_j оціняться:

$$\left|D_x^kW_j\right|\le\int_\tau^t d\beta\int_{E_n^+}\left|D_x^kZ(t,\beta,x,y)\right|\times$$

$$\times\left|L(\beta,y,D_y)G_j^{(\alpha_j)}(\beta-\tau,y-\xi',\tau,\xi')\right|dy\le$$

$$\le C_k\int_\tau^t\frac{d\beta}{(t-\beta)^{\frac{|k|}{2b}}(\beta-\tau)^{\frac{2b-1-\varepsilon'}{2b}}}\times$$

$$\times\int_{E_n}\frac{e^{-c\rho(t,\beta,x,y)}e^{-c\rho(\beta,\tau,y,\xi')}}{(t-\beta)^{\frac{n}{2b}}(\beta-\tau)^{\frac{n}{2b}}}dy.$$

В інтегралі по β перейдемо до B-функції через заміну $t-\beta=\eta(t-\tau)$, а для оцінки невласного об'ємного інтеграла скористаємось наступною лемою.

Лема 1 (про оцінку невласного об'ємного інтеграла). *Для інтеграла*

$$I_c(t,\tau,x,\xi)=\int_{E_n}\frac{e^{-c\rho(t,\beta,x,y)-c\rho(\beta,\tau,y,\xi)}}{(t-\beta)^{\frac{n}{2b}}(\beta-\tau)^{\frac{n}{2b}}}dy$$

справджується нерівність [1, с.39]

$$I_c(t,\tau,x,\xi)\le C_\varepsilon\frac{e^{-(c-\varepsilon)\rho(t,\tau,x,\xi)}}{(t-\tau)^{n/2b}},\ 0<\varepsilon<c.$$

На основі цієї леми остаточно одержимо:

$$\left|D_x^k W_j(t,\tau,x,\xi')\right| \le C_k C_\varepsilon B\left(\frac{2b-|k|}{2b},\frac{1+\varepsilon'}{2b}\right)\times$$

$$\times(t-\tau)^{-\frac{n-1+|k|-\varepsilon'}{2b}} e^{-(c-\varepsilon)\rho(t,\tau,x,\xi')}. \qquad (18)$$

У результаті для функції E_{ij}, враховуючи нерівності (17), (18), одержимо таку оцінку:

$$|E_{ij}(t,\tau,x',\xi')| \le C(t-\tau)^{-\frac{n-1+r_i-\varepsilon'}{2b}} e^{-c\rho(t,\tau,x',\xi')}.$$

Далі скористаємось твердженням про дію операторів дробового диференціювання та інтегрування.

Теорема 3. *Якщо* $f \in C^{(m)}(\Pi)$, *то [4, с.80]:*

$$D_\Lambda^{(\alpha)} f \in C^{(m-2b\alpha)}(\Pi),\ I_\Lambda^{(\alpha)} f \in C^{(m+2b\alpha)}(\Pi).$$

На основі цієї теореми маємо

$$\left|D_\Lambda^{(\alpha_i)} E_{ij}\right| \le C(t-\tau)^{-\frac{n-1+r_i-\varepsilon'+2b\alpha_i}{2b}} e^{-c\rho(t,\tau,x',\xi')},$$

звідки, враховуючи вибір α_i,

$$\left|D_\Lambda^{(\alpha_i)} E_{ij}\right| \le C(t-\tau)^{-\frac{n-1+2b-\alpha}{2b}} e^{-c\rho(t,\tau,x',\xi')}. \qquad (19)$$

Оцінимо другий доданок у конструкції ядер K_{ij}. Для цього розпишемо оператор дробового диференціювання:

$$D_\Lambda^{(\alpha_i)}\left(\int_0^\infty P_i(t,x,D_x)\,\varepsilon_j^{(\alpha_j)}(t,\tau,x,\xi')dx_n\right) =$$

$$= \Lambda(D)\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_i)}\int_0^t \frac{d\beta}{(t-\beta)^{\alpha_i}}\times\right.$$

$$\left.\times\int_{E_{n-1}} G(t-\beta,x'-z')\int_0^\infty P_i\,\varepsilon_j^{(\alpha_j)}(\beta,\tau,z,\xi')dz_n dz'\right).$$

За властивістю об'ємного потенціалу при застосуванні оператора $\Lambda(D)$ до цього потенціалу одержуємо щільність, якщо вона гельдерова по просторовому аргументу. Матимемо

$$D_\Lambda^{(\alpha_i)}\left(\int_0^\infty P_i(t,x,D_x)\,\varepsilon_j^{(\alpha_j)}(t,\tau,x,\xi')dx_n\right) =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha_i)}\frac{1}{(t-\tau)^{\alpha_i}}\int_0^\infty P_i\,\varepsilon_j^{(\alpha_j)}(t,\tau,x,\xi')dx_n \equiv$$

$$\equiv N_i(t,\tau,x',\xi')$$

за умови, що $N_i \in C_{x'}^{(\alpha)}$.

Оцінимо N_i. Функції $\varepsilon_j^{(\alpha_j)}$ є різницею функцій типу ядер Пуассона $G_j^{(\alpha_j)}$ і об'ємних потенціалів W_j. З урахуванням вибору чисел α_j оцінка для похідних функцій типу ядер Пуассона (12) набуде вигляду

$$\left|D_x^k G_j^{(\alpha_j)}\right| \le C_k(t-\tau)^{-\frac{n-1+|k|+\varepsilon}{2b}} e^{-c\rho(t,\tau,x,\xi)}. \qquad (20)$$

Як видно з оцінок (18), (20) більший порядок особливості мають функції типу ядер Пуассона, тому справджується нерівність:

$$\left|D_x^k \varepsilon_j^{(\alpha_j)}\right| \le C_k(t-\tau)^{-\frac{n-1+|k|+\varepsilon}{2b}} e^{-c\rho(t,\tau,x,\xi')}. \qquad (21)$$

Диференціальний оператор

$$P_i(t,x,D_x) = \sum_{|k|\le s} p_{ik}(t,x)D_x^k.$$

Тоді на основі нерівності (21)

$$\left|P_i\,\varepsilon_j^{(\alpha_j)}\right| \le C_s(t-\tau)^{-\frac{n-1+|s|+\varepsilon}{2b}} e^{-c\rho(t,\tau,x,\xi')},$$

$$\int_0^\infty \left|P_i(t,x,D_x)\varepsilon_j^{(\alpha_j)}(t,\tau,x,\xi')\right| dx_n \le$$

$$\le C_s\int_0^\infty (t-\tau)^{-\frac{n-1+|s|+\varepsilon}{2b}} e^{-c\rho(t,\tau,x,\xi')}dx_n \le$$

$$\le C_s e^{-c\rho(t,\tau,x',\xi')}(t-\tau)^{-\frac{n-1+|s|+\varepsilon-1}{2b}}\times$$

$$\times\int_0^\infty e^{-c\left(\frac{|x_n|}{(t-\tau)^{1/2b}}\right)^q}(t-\tau)^{-\frac{1}{2b}}dx_n.$$

У результаті заміни $\frac{|x_n|}{(t-\tau)^{1/2b}} = z$ одержимо інтеграл $\int\limits_0^\infty e^{-c|z|^q}dz$, який є збіжним. Отже,

$$\int_0^\infty \left|P_i\varepsilon_j^{(\alpha_j)}\right| dx_n \le C\frac{e^{-c\rho(t,\tau,x',\xi')}}{(t-\tau)^{\frac{n-1+|s|+\varepsilon-1}{2b}}}.$$

На основі цієї нерівності одержимо оцінку для N_i:

$$|N_i(t,\tau,x',\xi')| \le C\frac{e^{-c\rho(t,\tau,x',\xi')}}{(t-\tau)^{\frac{n-1+|s|+\varepsilon-1+2b\alpha_i}{2b}}},$$

звідки, враховуючи вибір α_i, матимемо:

$$|N_i(t,\tau,x',\xi')| \le C\frac{e^{-c\rho(t,\tau,x',\xi')}}{(t-\tau)^{\frac{n-1+2b+|s|-1-r_i}{2b}}}. \quad (22)$$

Для сумовності N_i потрібно, щоб

$$|s|-1-r_i<0.$$

З цієї нерівності випливає, що $|s|=r_i$, тому

$$P_i(t,x,D_x)=\sum_{|k|\le r_i} p_{ik}(t,x)D_x^k.$$

Отже, на основі нерівностей (19) та (22) для ядер K_{ij} системи (16) справджується таке:

$$|K_{ij}(t,\tau,x',\xi')| \le C_{ij}\frac{e^{-c\rho(t,\tau,x',\xi')}}{(t-\tau)^{\frac{n-1+2b-\alpha}{2b}}}.$$

Ця нерівність дозволяє встановити збіжність ряду Неймана

$$R_{ij}(t,\tau,x',\xi')=K_{ij}(t,\tau,x',\xi')+$$

$$+\sum_{\nu=1}^{+\infty}\sum_{l=1}^{bN}\int_\tau^t d\beta\int_{E_{n-1}}K_{il}(t,\beta,x',y')K_{lj}^{(\nu)}(\beta,\tau,y',\xi')dy',$$

$$K_{ij}^{(1)}\equiv K_{ij}, \quad (i,j=\overline{1,bN}).$$

Оцінимо члени ряду – повторні ядра:

$$\left|K_{ij}^{(2)}\right| \le \sum_{l=1}^{bN}C_{il}C_{lj}\int_\tau^t d\beta\int_{E_{n-1}}\frac{e^{-c\rho(t,\beta,x',y')}}{(t-\beta)^{\frac{n-1+2b-\alpha}{2b}}}\times$$

$$\times\frac{e^{-c\rho(\beta,\tau,y',\xi')}}{(\beta-\tau)^{\frac{n-1+2b-\alpha}{2b}}}dy'.$$

Скористаємось лемою 1 про оцінку невласного об'ємного інтеграла, а потім в інтегралі по β зробимо заміну $t-\beta=\eta(t-\tau)$. Остаточно одержимо:

$$\left|K_{ij}^{(2)}\right| \le C_\varepsilon C_{ij}^{(2)}B\left(\frac{\alpha}{2b},\frac{\alpha}{2b}\right)\frac{e^{-(c-\varepsilon)\rho(t,\tau,x',\xi')}}{(t-\tau)^{\frac{n-1+2b-2\alpha}{2b}}}.$$

За індукцією доводимо нерівність:

$$\left|K_{ij}^{(p)}\right| \le C_\varepsilon^{p-1}C_{ij}^{(p)}B\left(\frac{\alpha}{2b},\frac{\alpha}{2b}\right)B\left(\frac{\alpha}{2b},\frac{2\alpha}{2b}\right)\cdot\ldots\cdot$$

$$\cdot B\left(\frac{\alpha}{2b},\frac{(p-1)\alpha}{2b}\right)\frac{e^{-(c-(p-1)\varepsilon)\rho(t,\tau,x',\xi')}}{(t-\tau)^{\frac{n-1+2b-p\alpha}{2b}}},$$

$$C_{ij}^{(p)}=\sum_{l=1}^{bN}C_{il}C_{lj}^{(p-1)}, \quad p=2,3,\ldots$$

За рахунок того, що кожна ітерація зменшує особливість, знайдеться $p_0=\left[\frac{n-1+2b}{\varepsilon}\right]+1$, починаючи з якого ядра не матимуть особливості:

$$\left|K_{ij}^{(p_o)}\right| \le C_\varepsilon^{p_o-1}C_{ij}^{(p_o)}B\left(\frac{\alpha}{2b},\frac{\alpha}{2b}\right)\cdot\ldots\cdot$$

$$\cdot B\left(\frac{\alpha}{2b},\frac{(p_0-1)\alpha}{2b}\right)e^{-c_{p_o}\rho(t,\tau,x',\xi')},$$

$$c_{p_o}=c-(p_o-1)\varepsilon.$$

Оцінимо наступне ядро:

$$\left|K_{ij}^{(p_o+1)}\right| \le C_\varepsilon^{p_o-1}\sum_{l=1}^{bN}C_{il}C_{lj}^{(p_o)}\times$$

$$\times B\left(\frac{\alpha}{2b},\frac{\alpha}{2b}\right)\cdot\ldots\cdot B\left(\frac{\alpha}{2b},\frac{(p_o-1)\alpha}{2b}\right)\times$$

$$\times\int_\tau^t d\beta\int_{E_{n-1}}\frac{e^{-c\rho(t,\beta,x',y')-c_{p_o}\rho(\beta,\tau,y',\xi')}}{(t-\beta)^{\frac{n-1+2b-\alpha}{2b}}}dy'.$$

У показнику експоненти відщепимо від c величину c_{p_o} і скористаємось нерівністю

$$\rho(t,\beta,x',y')+\rho(\beta,\tau,y',\xi')\ge\rho(t,\tau,x',\xi').$$

Тоді $e^{-c_{p_o}\rho(t,\tau,x',\xi')}$ винесемо за знак інтеграла, в інтегралі по E_{n-1}-простору виконаємо заміну $\frac{|x'-y'|}{(t-\beta)^{1/2b}}=z'$, у результаті чого одержимо збіжний інтеграл, а в інтегралі по β – заміну $t-\beta=\eta(t-\tau)$. Остаточно будемо мати:

$$\left|K_{ij}^{(p_o+1)}\right| \le C_\varepsilon^{p_o-1}C_{ij}^{(p_o+1)}B\left(\frac{\alpha}{2b},\frac{\alpha}{2b}\right)\cdot\ldots\cdot$$

$$\cdot B\left(\frac{\alpha}{2b},\frac{(p_0-1)\alpha}{2b}\right)B\left(\frac{\alpha}{2b},1\right)(t-\tau)^{\frac{\alpha}{2b}}e^{-c_{p_o}\rho(t,\tau,x',\xi')}.$$

Аналогічними міркуваннями оцінюються всі наступні ядра:

$$\left|K_{ij}^{(p_o+m)}\right| \le C^{(m)} B\left(\frac{\alpha}{2b},1\right) B\left(\frac{\alpha}{2b},1+\frac{\alpha}{2b}\right)\cdot\ldots\cdot$$
$$\cdot B\left(\frac{\alpha}{2b},1+\frac{(m-1)\alpha}{2b}\right)(t-\tau)^{\frac{m\alpha}{2b}} e^{-c_{p_o}\rho(t,\tau,x',\xi')}.$$

За критерієм Вейєрштрасса ряд-залишок $\sum\limits_{m=p_o+1}^{+\infty} K_{ij}^{(m)}$ мажоруємо збіжним числовим рядом $\sum\limits_{m=p_o+1}^{+\infty} A_m$, оцінивши експоненту одиницею, $0<\delta\le t-\tau\le T$, тоді перейдемо від B- до Г-функцій

$$A_m = C^{(m)} B\left(\frac{\alpha}{2b},1\right)\cdot\ldots\cdot B\left(\frac{\alpha}{2b},1+\frac{(m-1)\alpha}{2b}\right) =$$
$$= C^{(m)} \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2b}\right)\Gamma(1)}{\Gamma\left(1+\frac{\alpha}{2b}\right)}\cdot\ldots\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2b}\right)\Gamma\left(1+\frac{(m-1)\alpha}{2b}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{m\alpha}{2b}\right)} =$$
$$= C^{(m)} \frac{\Gamma(1)\left(\Gamma\left(\frac{\alpha}{2b}\right)\right)^m}{\Gamma\left(1+\frac{m\alpha}{2b}\right)}.$$

За ознакою Даламбера цей ряд є збіжним, що гарантує рівномірну й абсолютну збіжність відповідного функціонального ряду.

З нерівностей для повторних ядер випливає оцінка для резольвенти. Найбільшу особливість має перше повторне ядро, а найменший тип спадання мають ядра після p_o, тому

$$|R_{ij}(t,\tau,x',\xi')| \le C_{ij} \frac{e^{-c_{p_o}\rho(t,\tau,x',\xi')}}{(t-\tau)^{\frac{n-1+2b-\alpha}{2b}}}. \quad (23)$$

Отже, при $t>\tau$ ряд Неймана збігається рівномірно і абсолютно. Це дозволяє записати розв'язок системи (16) через резольвенту:

$$\mu_j(t,x') = D_\Lambda^{(\alpha_j)}\overline{g}_j(t,x') +$$
$$+\sum_{i=1}^{bN}\int_0^t d\tau \int_{E_{n-1}} R_{ij}(t,\tau,x',\xi') D_\Lambda^{(\alpha_i)}\overline{g}_i(\tau,\xi')d\xi'.$$

За допомогою відомих уже щільностей μ_j визначається розв'язок u_2, тому для розв'язку задачі (1)-(3) справедливе зображення (4).

Тепер оцінимо розв'язок крайової задачі (1)-(3). Оцінка розв'язку задачі Коші описується теоремою 2 про коректність задачі Коші:

$$|u_1|_{2b+\alpha} \le C\left(|\varphi|_{2b+\alpha} + |f|_\alpha\right).$$

Залишилось провести оцінку поверхневого інтеграла у зображенні розв'язку u_2:

$$V_j(t,x) = \int_0^t d\tau \int_{E_{n-1}} \varepsilon_j^{(\alpha_j)}(t,\tau,x,\xi') D_\Lambda^{(\alpha_j)}\overline{g}_j(\tau,\xi')d\xi' +$$
$$+\int_0^t d\tau \int_{E_{n-1}} \varepsilon_j^{(\alpha_j)}(t,\tau,x,\xi') \sum_{l=1}^{bN}\int_0^\tau d\beta \int_{E_{n-1}} R_{ij}(\tau,\beta,\xi',y')\times$$
$$\times D_\Lambda^{(\alpha_l)}\overline{g}_l(\beta,y')dy'd\xi' \equiv V_j^{(1)} + V_j^{(2)}.$$

Оцінимо $V_j^{(1)}$, скориставшись оцінкою (21) для функції $\varepsilon_j^{(\alpha_j)}$:

$$\left|V_j^{(1)}\right| \le \int_0^t d\tau \int_{E_{n-1}} \frac{e^{-c\rho(t,\tau,x,\xi')}}{(t-\tau)^{\frac{n-1+\varepsilon}{2b}}} \left|D_\Lambda^{(\alpha_j)}\overline{g}_j\right| d\xi',$$

$$\overline{g}_j(t,x') \equiv g_j(t,x') - B_j u_1|_{x_n=0} - \int_0^\infty P_j\, u_1(t,x)dx_n.$$

Нехай $g_j \in C^{(2b-r_j+\alpha)}$. Оператори B_j і P_j є диференціальними операторами порядку r_j, тому при їх застосуванні до $u_1 \in C^{(2b+\alpha)}$, одержимо функції класу $C^{(2b-r_j+\alpha)}$. Отже, $\overline{g}_j \in C^{(2b-r_j+\alpha)}$. За теоремою 3 про дію оператора дробового диференціювання $D_\Lambda^{(\alpha_j)}\overline{g}_j \in C^{(2b-r_j+\alpha-2b\alpha_j)}$, тобто $D_\Lambda^{(\alpha_j)}\overline{g}_j \in C^{(\alpha')}$ і

$$\left|D_\Lambda^{(\alpha_j)}\overline{g}_j\right|_{\alpha'} \le C|g_j|_{2b-r_j+\alpha}.$$

Тоді

$$\left|V_j^{(1)}\right| \le C|g_j|_{2b-r_j+\alpha} \int_0^t \frac{d\tau}{(t-\tau)^{\frac{\varepsilon}{2b}}} \int_{E_{n-1}} \frac{e^{-c\rho(t,\tau,x,\xi')}}{(t-\tau)^{\frac{n-1}{2b}}} d\xi' \le$$
$$\le C_1|g_j|_{2b-r_j+\alpha},$$

оскільки підінтегральні функції є сумовні. Для оцінки $V_j^{(2)}$ оцінимо спочатку підінтегральну суму, скориставшись нерівністю для резольвенти (23):

$$\left|\sum_{l=1}^{bN}\int_0^\tau d\beta\int_{E_{n-1}} R_{jl}(\tau,\beta,\xi',y')D_\Lambda^{(\alpha_l)}\overline{g}_l(\beta,y')dy'\right|\le$$

$$\le C\sum_{l=1}^{bN}|g_l|_{2b-r_l+\alpha}\int_0^\tau \frac{d\beta}{(\tau-\beta)^{\frac{2b-\alpha}{2b}}}\times$$

$$\times\int_{E_{n-1}}\frac{e^{-c_{p_0}\rho(\tau,\beta,\xi',y')}}{(\tau-\beta)^{\frac{n-1}{2b}}}dy'\le C\tau^{\frac{\alpha}{2b}}\sum_{l=1}^{bN}|g_l|_{2b-r_j+\alpha}.$$

Тоді

$$\left|V_j^{(2)}\right|\le\sum_{l=1}^{bN}|g_l|_{2b-r_l+\alpha}\int_0^t\frac{\tau^{\frac{\alpha}{2b}}d\tau}{(t-\tau)^{\frac{\varepsilon}{2b}}}\int_{E_{n-1}}\frac{e^{-c\rho(t,\tau,x,\xi')}}{(t-\tau)^{\frac{n-1}{2b}}}d\xi'\le$$

$$\le CB\Big(\frac{\alpha}{2b}+1,-\frac{\varepsilon}{2b}+1\Big)\,t^{\frac{\alpha-\varepsilon}{2b}+1}\sum_{l=1}^{bN}|g_l|_{2b-r_l+\alpha}.$$

В інтегралах по E_{n-1}-простору зробивши заміну, одержали збіжні інтеграли, а в інтегралі по τ внаслідок заміни $t-\tau=t\eta$ – B-функцію. У результаті для розв'язку крайової задачі (1)-(3) одержуємо нерівність (5).

Теорему доведено.

2. Для рівняння теплопровідності розглянемо задачу Коші з інтегральною умовою, яка полягає у побудові обмеженого в шарі $\Pi=\{(t,x):t\ge 0,x\in E_1\}$ розв'язку неоднорідного рівняння теплопровідності

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(t,x)\qquad(24)$$

з початковою та інтегральною умовами

$$u(t,x)|_{t=0}=\varphi(x),\quad x\in E_1\qquad(25)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}u(t,x)\,dx=\psi(t),\quad t\ge 0.\qquad(26)$$

Правильна

Теорема 4. *Якщо* $f\in C_x^{(\alpha)}(\Pi)\bigcap L_1(E_1)$, $\varphi\in L_1(E_1)$, $\psi\in C^{(1)}([0,+\infty))$, *виконується умова узгодження у початковий момент часу*

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)\,dx=\psi(0),$$

то розв'язок задачі Коші (24)-(26) зображається у вигляді

$$u(t,x)=\int_{-\infty}^{+\infty}G(t,x-\xi)\varphi(\xi)d\xi+$$

$$+\int_0^t d\tau\int_{-\infty}^{+\infty}G(t-\tau,x-\xi)f(\tau,\xi)d\xi+$$

$$+\int_0^t G(t-\tau,x)\psi'(\tau)d\tau-\int_0^t G(t-\tau,x)\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau,\xi)d\xi d\tau,$$

де

$$G(t,x)=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$$

— функція Гріна.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Эйдельман С.Д.* Параболические системы.— М.: Наука, 1964.— 444 с.

2. *Ивасишен С.Д.* Матрица Грина параболических задач.—К.: Вища школа, 1990.— 199 с.

3. *Пташник Б.И.* Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными.—К.: Наук. думка, 1984.— 264 с.

4. *Матійчук М.І.* Параболічні сингулярні крайові задачі.—К.: Ін-т математики НАН України, 1999.— 176 с.

5. *Матійчук М.І.* Про крайові задачі для параболічних рівнянь з інтегральними умовами // Міжнародна конференція "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та перспективи її розвитку" (19–26 червня): Тези доп.— Чернівці, 2005.— С. 29.

Стаття надійшла до редколегії 17.10.2005