УДК 517.956.4

©2005 р. Н.М. Гома, В.В. Городецький

Чернівецький національний університет ім. Юрія Федьковича, Чернівці

ЕВОЛЮЦІЙНІ РІВНЯННЯ З ГАРМОНІЙНИМ ОСЦИЛЯТОРОМ У ПРОСТОРАХ ТИПУ S ТА S'

Знайдено зображення гладких розв'язків еволюційних рівнянь з оператором, який трактується як гармонійний осцилятор нескінченного порядку. Описані множини початкових значень таких розв'язків. Встановлена коректна розв'язність задачі Коші для відповідного рівняння у просторах ультрарозподілів типу S'.

The representation of a smooth solutions is found for the evolutionary equations with operator, which is described as harmonic oscillator of the infinite order. The sets of the initial values of such solutions are described. The correct solvability of the Cauchy problem is established for the corresponding equation on the spaces of ultra-distributions of type S'

У розвитку багатьох важливих напрямів математики і фізики значну роль відіграли поняття та методи, які виникли при вивченні рівняння Штурма-Ліувілля та пов'язаного з цим рівнянням оператора Штурма-Ліувілля $A = -\dfrac{d^2}{dx^2} + q(x)$. Вони були джерелом нових ідей та задач для спектральної теорії операторів і суміжних розділів аналізу. Г. Гарднер, М. Крускал і Р. Міура знайшли зв'язок спектральної теорії операторів Штурма-Ліувілля з деякими нелінійними еволюційними рівняннями з частинними похідними. Ж. Дельсарт та Б.М. Левітан у теорії операторів узагальненого зсуву використали оператори перетворення, які виникли в процесі вивчення рівнянь Штурма-Ліувілля. В.А. Марченко застосував оператори перетворення при дослідженні обернених задач спектрального аналізу та асимптотичної поведінки спектральної функції оператора Штурма-Ліувілля.

Оператор Штурма-Ліувілля породжує різні крайові задачі: регулярні (x перебігає скінченний інтервал) та сингулярні (випадок нескінченного проміжку). Вони, як відомо, відрізняються постановками задач, методами дослідження та сферами застосувань. Функція q називається потенціалом; якщо $q(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$, то оператор A називається гармонійним осцилятором. Відомо [1], що гармонійний осцилятор є невід'ємним самоспряженим оператором у просторі $L_2(\mathbb{R})$. Еволюційне рівняння вигляду

$$u'(t) + Au(t) = 0, \quad t \in (0, T], \qquad (1)$$

з таким оператором відноситься до рівнянь параболічного типу, коефіцієнти яких необмежено зростають при $|x| \to \infty$. У книзі [1] доведено, що інтегровний з квадратом модуля по x розв'язок $u(t, x)$ рівняння (1) завжди має граничне значення у просторах узагальнених функцій нескінченного порядку типу S' і за ним завжди однозначно відновлюється, тобто простори типу S' є просторами початкових даних гладких розв'язків задачі Коші для рівняння (1) (простори типу S вперше були введені І.М. Гельфандом та Г.Є. Шиловим в [2]). У даній праці розглядається еволюційне рівняння

$$u'(t) + \varphi(A)u(t) = 0, \quad t \in (0, T], \qquad (2)$$

де $\varphi(A)$ трактується як гармонійний осцилятор нескінченного порядку. Знайдено зображення гладких розв'язків вказаного рівняння, описано множини початкових значень таких розв'язків, на підставі чого встановлюється коректна розв'язність задачі Коші для рівняння (2) у просторах ультрарозподілів типу S'.

1. Простори основних та узагальнених елементів. Нехай $A \geq 0$ — самоспряжений оператор з дискретним спектром у сепарабельному гільбертовому просторі H зі скалярним добутком $(\cdot,\cdot)$ та нормою $\|\cdot\|$, $\{e_k, k\geq 1\}$ — ортонормований базис з його власних векторів, $\{\lambda_k, k\geq 1\}$ — послідовність відповідних власних чисел, розміщених у порядку зростання; при цьому кожне власне число береться стільки разів, якою є його кратність, і $\sum\limits_{k:\lambda_k\neq 0}\lambda_k^{-p}<\infty$ при деякому $p>0$.

Позначимо

$$\Phi_m=\{\varphi\in H\,:\,\varphi=\sum_{k=1}^{m}c_{k,\varphi}e_k, c_{k,\varphi}\in\mathbb{C}\},$$

$$\Phi=\lim_{m\to\infty}\operatorname{ind}\Phi_m.$$

Отже, послідовність $\{\varphi_\nu,\nu\geq 1\}\subset\Phi$ збігається в Φ до елемента $\varphi\in\Phi$, якщо

$$\exists\, m\ \exists\,\nu_0\ \forall\,\nu\geq\nu_0:\ \{\varphi_\nu,\varphi,\nu\geq 1\}\subset\Phi_m;$$

$$c_{k,\varphi_\nu}\underset{\nu\to\infty}{\to}c_{k,\varphi},\quad\forall\, k\in\mathbb{N}.$$

Очевидно, що Φ лежить щільно в H.

Символом Φ' позначимо простір усіх антилінійних неперервних функціоналів на Φ зі слабкою збіжністю:

$$(\Phi'\ni f_n\underset{n\to\infty}{\overset{\Phi'}{\to}}f)\Leftrightarrow(<f_n,\varphi>\underset{n\to\infty}{\to}<f,\varphi>,$$

$$\forall\,\psi\in\Phi).$$

Зіставлення $H\ni\varphi\to f_\varphi\in\Phi':<f_\varphi,\psi>=(\varphi,\psi),\forall\,\psi\in\Phi$, визначає вкладення $H\subset\Phi'$. Елементи з Φ' називаються узагальненими.

Нехай s — простір усіх числових послідовностей $\{s_k,k\geq 1\}$ з покоординатною збіжністю. Відображення

$$\Phi'\ni f\overset{F}{\to}\{c_k(f)=<f,e_k>,k\in\mathbb{N}\}\in s$$

є ізоморфізмом [1]; при цьому збіжність в Φ' рівносильна покоординатній збіжності відповідних послідовностей в s. Зауважимо, що F відображає Φ у множину фінітних послідовностей в s, а H — в l_2.

Нехай $f\in\Phi'$. Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}c_ke_k$, де $c_k=<f,e_k>$, називається рядом Фур'є елемента $f\in\Phi'$, а числа c_k — його коефіцієнтами Фур'є. Для довільного елемента $f\in\Phi'$ його ряд Фур'є збігається в Φ' до f. Навпаки, довільний ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}c_ke_k$ збігається в Φ' до деякого елемента $f\in\Phi'$ і цей ряд є рядом Фур'є для f [1]. Отже, Φ' можна розуміти як простір формальних рядів вигляду $\sum\limits_{k=1}^{\infty}c_ke_k$.

Введемо тепер деякі класи нескінченно диференційовних елементів оператора A. Позначимо

$$H_\infty(A)=\lim_{\alpha\to\infty}\operatorname{pr}H_\alpha(A),\quad H_\alpha(A)=D(A^\alpha)$$

($D(A^\alpha)$ — область визначення оператора A^α),

$$(\varphi,\psi)_{H_\alpha}=(\varphi,\psi)+(A^\alpha\varphi,A^\alpha\psi),$$

$$\forall\,\{\varphi,\psi\}\subset D(A^\alpha),$$

$$G_{\beta,B}(A):=\{\varphi\in H_\infty(A)\,|\,\exists\, c,B>0:$$

$$\|A^n\varphi\|\leq cB^nn^{n\beta},n\in\mathbb{Z}_+,\beta>0\}.$$

Простір $G_{\beta,B}\supset\Phi$ є банаховим відносно норми

$$\|\varphi\|_{\beta,B}=\sup_n(\|A^n\varphi\|/(B^nn^{n\beta})).$$

Простір $G_{\{\beta\}}(A):=\lim\limits_{B\to\infty}\operatorname{ind}G_{\beta,B}(A)$ називається простором Жевре типу Рум'є порядку β, породженим оператором A.

Якщо через $(H_\infty(A))'$, $(G_{\{\beta\}}(A))'$ позначити простори антилінійних неперервних функціоналів над $H_\infty(A)$, $G_{\{\beta\}}(A)$ відповідно, то згідно з [1], прийдемо до ланцюжка щільних і неперервних вкладень

$$\Phi\subset G_{\{1\}}(A)\subset G_{\{\beta\}}(A)\subset H_\infty(A)\subset H\subset$$

$$\subset(H_\infty(A))'\subset(G_{\{\beta\}}(A))'\subset(G_{\{1\}}(A))'\subset\Phi',$$

$$\beta>1.$$

Далі, символом $H_{\alpha,\beta}$ позначимо сукупність тих елементів $f\in\Phi'$, для яких при деякому $\alpha>0$

$$\|f\|^2_{H_{\alpha,\beta}}:=\sum_{k=1}^{\infty}\exp(2\alpha\lambda_k^{1/\beta})|c_k|^2<\infty,$$

$$c_k =< f, e_k >,$$

і покладемо $H_{\{\beta\}} := \lim\limits_{\alpha\to 0} \operatorname{ind} H_{\alpha,\beta}$. Відповідно, $(H_{\{\beta\}})' = \lim\limits_{\alpha\to 0} \operatorname{pr}(H_{\alpha,\beta})'$, причому якщо $f \in (H_{\{\beta\}})'$, то (див. [1]) для довільного $\alpha > 0$

$$\|f\|^2_{(H_{\alpha,\beta})'} = \sum_{k=1}^{\infty} \exp(-2\alpha\lambda_k^{1/\beta})|c_k|^2 < \infty,$$

$$c_k =< f, e_k > .$$

Як доведено в [1], $G_{\{\beta\}}(A) = H_{\{\beta\}}$, $(G_{\{\beta\}}(A))' = (H_{\{\beta\}})'$

Простори $G_{\{\beta\}}(A)$, $(G_{\{\beta\}}(A))'$ з точки зору поведінки коефіцієнтів Фур'є їх елементів описуються так:

$$(f \in G_{\{\beta\}}(A)) \Leftrightarrow (\exists\, \mu > 0\; \exists\, c > 0\; \forall\, k \in \mathbb{N} :$$

$$|c_k| \leq c\exp(-\mu\lambda_k^{1/\beta}));$$

$$(f \in (G_{\{\beta\}}(A))') \Leftrightarrow (\forall\, \mu > 0\; \exists\, c = c(\mu) > 0$$

$$\forall\, k \in \mathbb{N} :\, |c_k| \leq c\exp(\mu\lambda_k^{1/\beta})).$$

Простори $H_\infty(A)$, $(H_\infty(A))'$ характеризуються так:

$$(f \in H_\infty(A)) \Leftrightarrow (\forall\, m \in \mathbb{N}\; \exists\, c = c(m) > 0$$

$$\forall\, k \in \mathbb{N} :\, |c_k| \leq c\lambda_k^{-m});$$

$$(f \in (H_\infty(A))') \Leftrightarrow (\exists\, m \in \mathbb{N}\; \exists\, c > 0\; \forall\, k \in \mathbb{N} :$$

$$|c_k| \leq c\lambda_k^{m}).$$

Надалі нам знадобиться таке зауваження з праці [3].

Зауваження 1. *Якщо* $\{\varphi_n, n \geq 1\} \subset (G_{\{1\}}(A))'$, $\varphi_n \underset{n\to\infty}{\overset{\Phi'}{\to}} \varphi$ *і послідовність* $\{\varphi_n, n \geq 1\}$ *обмежена в просторі* $(G_{\{1\}}(A))'$, *то* $\varphi_n \underset{n\to\infty}{\overset{(G_{\{1\}}(A))'}{\longrightarrow}} \varphi$.

2. Функції Ерміта. Функція $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ називається ваговою, якщо вона невід'ємна і така, що абсолютно збігаються інтеграли

$$\alpha_n = \int_{\mathbb{R}} x^n F(x)dx, \quad n \in \mathbb{Z}_+,$$

які називаються степеневими моментами функції F. За F, зокрема, можна взяти таку функцію: $F(x) = \exp(-x^2)$, $x \in \mathbb{R}$. Користуючись методом математичної індукції можна довести (див. [4]), що

$$(e^{-x^2})^{(n)} = e^{-x^2} \sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^{n-k} n!}{k!(n-2k)!}(2x)^{n-2k},$$

$$n \in \mathbb{Z}_+, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Отже, функція

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2}(e^{-x^2})^{(n)}, \quad n \in \mathbb{Z}_+, \tag{3}$$

є многочленом степеня n. Цей многочлен називається стандартизованим многочленом Ерміта, а формула (3) — формулою Родріга. Многочлени $\{H_n, n \in \mathbb{Z}_+\}$ ортогональні на $\mathbb{R}$ з ваговою функцією F, при цьому

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} H_n(x)dx = \sqrt{\pi}2^n n!, \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Отже, ортонормовані многочлени Ерміта $\hat{H}_n$, $n \in \mathbb{Z}_+$, мають вигляд

$$\hat{H}_n(x) = \frac{H_n(x)}{\sqrt{\sqrt{\pi}2^n n!}} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{\sqrt{\pi}2^n n!}} e^{x^2}(e^{-x^2})^{(n)},$$

$$n \in \mathbb{Z}_+, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Многочлени $\hat{H}_n$, $n \in \mathbb{Z}_+$, побудовані за ваговою функцією $F(x) = \exp(-x^2)$, $x \in \mathbb{R}$, утворюють ортонормований базис у просторі $L_2(\mathbb{R}, \exp(-x^2))$. У просторі ж $L_2(\mathbb{R})$ ортонормований базис утворюють функції Ерміта

$$h_n(x) = e^{-x^2/2}\hat{H}_n(x) =$$

$$= (-1)^n \pi^{-1/4}(2^n n!)^{-1/2} e^{x^2/2}(e^{-x^2})^{(n)},$$

$$n \in \mathbb{Z}_+, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Здійснимо оцінку $|h_n(z)|$, де $z = x + iy \in \mathbb{C}$. Оскільки

$$|h_n(z)| = |e^{-z^2/2}| \cdot |\hat{H}_n(z)| =$$

$$= e^{-x^2/2+y^2/2} \cdot |\hat{H}_n(z)|,$$

то досить провести оцінку ортонормованих многочленів Ерміта комплексного аргументу. Для цього скористаємось таким інтегральним зображенням $\hat{H}_n$ [4]:

$$\hat{H}_n(x) = \pi^{-3/4}(2^n/n!)^{1/2}(-i)^n e^{x^2} \times$$

$$\times \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-t^2+2ixt} t^n dt, \quad x \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Під знаком інтеграла здійснимо заміну змінної інтегрування: $t = \omega\alpha$, де $\omega > 1$ — фіксований параметр. Тоді

$$\hat{H}_n(x) = \pi^{-3/4}(2^n/n!)^{1/2}(-i)^n e^{x^2}\omega^{n+1} \times$$

$$\times \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-\omega^2\alpha^2+2ix\omega\alpha}\alpha^n d\alpha, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Отже,

$$\hat{H}_n(z) = \pi^{-3/4}(2^n/n!)^{1/2}(-i)^n e^{z^2}\omega^{n+1} \times$$

$$\times \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-\omega^2\alpha^2+2iz\omega\alpha}\alpha^n d\alpha, \quad z = x + iy \in \mathbb{C}.$$

Тому

$$|\hat{H}_n(z)| \leq \pi^{-3/4}(2^n/n!)^{1/2} e^{x^2-y^2}\omega^{n+1} \times$$

$$\times \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-\omega^2\alpha^2+2\omega|\alpha y|}|\alpha|^n d\alpha.$$

Скориставшись нерівністю

$$|2\omega\alpha y| = \left|2\varepsilon\alpha\frac{\omega y}{\varepsilon}\right| \leq 2\varepsilon^2\alpha^2 + \frac{\omega^2 y^2}{2\varepsilon^2},$$

де $\varepsilon = \sqrt{\dfrac{\omega^2-1}{2}}$ одержимо, що

$$\exp(-\omega^2\alpha^2 + 2\omega|\alpha y|) \leq \exp\left(-\alpha^2 + \frac{\omega^2 y^2}{\omega^2-1}\right).$$

Отже,

$$|\hat{H}_n(z)| \leq \pi^{-3/4}(2^n/n!)^{1/2} e^{x^2+y^2/(\omega^2-1)}\omega^{n+1} \times$$

$$\times \int\limits_{\mathbb{R}} |\alpha|^n e^{-\alpha^2} d\alpha.$$

Врахувавши тепер, що

$$\int\limits_{\mathbb{R}} |\alpha|^n e^{-\alpha^2} d\alpha = \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) =$$

$$= \begin{cases} \pi^{1/2}2^{-m}(2m+1)!!, & n = 2m, \\ m!, & n = 2m+1, \end{cases}$$

дістанемо оцінку:

$$|\hat{H}_n(z)| \leq e\pi^{-1/2}\omega^{n+1}e^{x^2+y^2/(\omega^2-1)},$$

$$z = x + iy \in \mathbb{C}, \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Тому

$$|h_n(z)| = e^{-x^2/2+y^2/2}|\hat{H}_n(z)| \leq$$

$$\leq e\pi^{-1/2}\omega^{n+1}e^{x^2/2+(\omega^2+1)y^2/(2\omega^2-2)} \leq$$

$$\leq e\pi^{-1/2}\omega^{n+1}\exp\left\{\frac{\omega^2+1}{2(\omega^2-1)}(x^2+y^2)\right\} =$$

$$= e\pi^{-1/2}\omega^{n+1}\exp\left\{\frac{\omega^2+1}{2(\omega^2-1)}|z^2|\right\}. \tag{4}$$

Відомо [4], що

$$\sum_{n=0}^{\infty} \hat{H}_n^2(x)\omega_0^n = \pi^{-1/2}(1-\omega_0^2)^{-1/2}\exp\left\{\frac{2x^2\omega_0}{1+\omega_0}\right\},$$

$$|\omega_0| < 1, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Візьмемо тепер $\tau > 0$ і покладемо $\omega_0 = \exp(-\tau)$. Тоді

$$\sum_{n=0}^{\infty} \hat{H}_n^2(x)e^{-n\tau} = \pi^{-1/2}(e^{2\tau}-1)^{-1/2}e^{\tau+2x^2/(e^\tau+1)}.$$

Звідси дістаємо, що

$$|\hat{H}_n(x)| \leq \pi^{-1/4}(e^{2\tau}-1)^{-1/4}e^{\tau(n+1)/2}e^{x^2/(e^\tau+1)}.$$

Отже, для функції Ерміта дійсного аргументу маємо такі оцінки:

$$|h_n(x)| = e^{-x^2/2}|\hat{H}_n(x)| \leq \pi^{-1/4} \times$$

$$\times (e^{2\tau}-1)^{-1/4}e^{\tau(n+1)/2}\exp\left\{-\frac{(e^\tau-1)}{2(e^\tau+1)}x^2\right\},$$

$$x \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Покладемо тепер у нерівності (4) $\omega = \exp(\tau/2)$, де $\tau > 0$ — фіксований параметр. Тоді

$$|h_n(z)| \leq e\pi^{-1/2}e^{\tau(n+1)/2}\exp\left\{\frac{(e^\tau+1)}{2(e^\tau-1)}|z^2|\right\},$$

$$z \in \mathbb{C}, \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

З останніх двох нерівностей і теорем типу Фрагмена-Ліндельофа (див.[2]) випливає, що

$$|h_n(z)| \leq c_{\tau,n}\exp\left\{-\left(\frac{e^\tau-1}{2(e^\tau+1)}-\varepsilon_1\right)x^2+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{e^\tau+1}{2(e^\tau-1)}+\varepsilon_2\right)y^2\right\},$$

де

$$c_{\tau,n} = \max\{e\pi^{-1/2}, \pi^{-1/4}(e^{2\tau}-1)^{-1/4}\}\times$$

$$\times\exp(\frac{n+1}{2}\tau),\ 0<\varepsilon_1<\frac{e^\tau-1}{2(e^\tau+1)}, \quad \varepsilon_2>0.$$

Покладемо

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{4}\frac{e^\tau-1}{e^\tau+1}, \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{2}\frac{e^\tau+1}{e^\tau-1}.$$

Тоді для функцій Ерміта комплексного аргументу маємо оцінки

$$|h_n(x+iy)| \leq$$

$$\leq c_{\tau,n}\exp\left\{-\frac{e^\tau-1}{4(e^\tau+1)}x^2+\frac{e^\tau+1}{e^\tau-1}y^2\right\} \equiv$$

$$\equiv c_{\tau,n}\exp\left\{-\frac{\operatorname{th}(\tau/2)}{4}x^2+\operatorname{cth}(\tau/2)y^2\right\},$$

$$n \in \mathbb{Z}_+. \tag{5}$$

3. Формальні ряди Фур'є-Ерміта. Простори типу S та S'. Нехай $H = L_2(\mathbb{R})$. Функції Ерміта $\{h_k, k \in \mathbb{Z}_+\}$ утворюють ортонормований базис у H, тому простір Φ у даному випадку складається з функцій вигляду

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{m} c_{k,\varphi}h_k(x), \quad c_{k,\varphi} \in \mathbb{C},$$

$$x \in \mathbb{R}, \quad m \in \mathbb{Z}_+.$$

Оскільки [4]

$$h_k'(x) = \sqrt{\frac{k}{2}}h_{k-1}(x) - \sqrt{\frac{k+1}{2}}h_{k+1}(x),$$

$$k \in \mathbb{N}, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$h_0'(x) = -\frac{1}{\sqrt{2}}h_1(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

то $\varphi' \in \Phi$, якщо $\varphi \in \Phi$, причому $\varphi_\nu' \to \varphi'$, $\nu \to \infty$, у просторі Φ, коли $\varphi_\nu \to \varphi$, $\nu \to \infty$, у просторі Φ. Отже, операція диференціювання визначена й неперервна в просторі Φ.

Символом Φ' позначимо простір усіх антилінійних неперервних функціоналів на Φ зі слабкою збіжністю. Елементи простору Φ' називатимемо узагальненими функціями.

Операція диференціювання у просторі Φ' визначається формулою

$$\forall f \in \Phi' : < f^{(n)}, \varphi >= (-1)^n < f, \varphi^{(n)} >,$$

$$\varphi \in \Phi, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Ця операція лінійна і неперервна в Φ', оскільки лінійною неперервною є відповідна операція в просторі Φ. Отже, кожний елемент f з простору Φ' є нескінченно диференційовним у Φ'.

Зіставлення

$$H \ni \varphi \to f_\varphi \in \Phi' :$$

$$< f_\varphi, \psi >= \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\overline{\psi(x)}dx, \quad \forall \psi \in \Phi,$$

визначає вкладення H у Φ'. Отже, $\Phi \subset H \subset \Phi'$, причому вказані вкладення є щільними і неперервними.

Ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k h_k$, де $c_k =< f, h_k >$, називається рядом Фур'є-Ерміта узагальненої функції $f \in \Phi'$, а числа c_k, $k \in \mathbb{Z}_+$, — коефіцієнтами Фур'є. У даному конкретному випадку простір Φ' можна розуміти як простір формальних рядів вигляду $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k h_k$.

І.М. Гельфанд і Г.Є. Шилов ввели в [2] серію просторів, названих ними просторами типу S. Вони складаються з нескінченно диференційовних функцій, визначених на $\mathbb{R}$, на які накладаються певні умови спадання на нескінченності й зростання похідних. Ці умови задаються за допомогою нерівностей

$$|x^k \varphi^{(m)}(x)| \leq c_{km}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \{k, m\} \subset \mathbb{Z}_+,$$

де $\{c_{km}\}$ — деяка подвійна послідовність додатних чисел. Якщо на елементи послідовності $\{c_{km}\}$ не накладаються жодні обмеження (тобто c_{km} можуть змінюватись довільним чином разом з функцією φ), то маємо, очевидно, простір Л. Шварца швидко спадних функцій. Якщо ж числа c_{km} задовольняють певні умови, то відповідні конкретні простори містяться в S і називаються просторами типу S. Означимо деякі з них.

Для довільних $\alpha, \beta > 0$ покладемо

$$S_\alpha^\beta(\mathbb{R}) \equiv S_\alpha^\beta := \{\varphi \in S \,|\, \exists\, c > 0\ \exists\, A > 0$$
$$\exists\, B > 0\ \forall \{k, m\} \subset \mathbb{Z}_+\ \forall\, x \in \mathbb{R} :$$
$$|x^k \varphi^{(m)}(x)| \leq c A^k B^m k^{k\alpha} m^{m\beta}\}.$$

Введені простори можна охарактеризувати так [2].

Простори S_α^β нетривіальні при $\alpha + \beta \geq 1$ і утворюють щільні в $L_2(\mathbb{R})$ множини.

S_α^β складається з тих і тільки тих нескінченно диференційовних на $\mathbb{R}$ функцій, які задовольняють нерівності

$$|\varphi^{(m)}(x)| \leq c B^m m^{m\beta} \exp(-a|x|^{1/\alpha}),$$
$$m \in \mathbb{Z}_+, \quad x \in \mathbb{R},$$

з деякими додатними сталими c, B, a, залежними лише від функції φ.

Простір S_1^1 складається з функцій, які допускають аналітичне продовження в деяку смугу $|\operatorname{Im} z| < \delta$, $z = x + iy$ (залежну від φ) і задовольняють нерівність

$$|\varphi(x + iy)| \leq c \exp(-a|x|), \quad c > 0, a > 0.$$

Якщо $0 < \beta < 1$ і $1 - \beta \leq \alpha < 1$, то S_α^β складається з тих і лише тих функцій φ, які допускають аналітичне продовження у всю комплексну площину і для яких

$$|\varphi(x + iy)| \leq c \exp(-a|x|^{1/\alpha} + b|y|^{1/(1-\beta)}),$$
$$c > 0, \quad a > 0, \quad b > 0.$$

Простір S Л. Шварца формально відповідає символу S_∞^∞.

Топологічна структура в просторах S_α^β визначається так.

Символом $S_{\alpha,A}^{\beta,B}$ позначимо сукупність функцій $\varphi \in S_\alpha^\beta$, які задовольняють умову:

$$\forall\, \bar{A} > A\ \forall\, \bar{B} > B :\ |x^k \varphi^{(m)}(x)| \leq$$
$$\leq c \bar{A}^k \bar{B}^m k^{k\alpha} m^{m\beta}, \quad \{k, m\} \subset \mathbb{Z}_+.$$

Ця множина перетворюється у повний злічено нормований простір, якщо норми в ній ввести за допомогою співвідношень:

$$\|\varphi\|_{\delta,\rho} = \sup_{x,k,m} \frac{|x^k \varphi^{(m)}(x)|}{(A + \delta)^k (B + \rho)^m k^{k\alpha} m^{m\beta}},$$

$$\{\delta, \rho\} \subset \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\right\}.$$

Якщо $A_1 < A_2$, $B_1 < B_2$, то $S_{\alpha,A_1}^{\beta,B_1}$ неперервно вкладається в $S_{\alpha,A_2}^{\beta,B_2}$ і $S_\alpha^\beta = \bigcup\limits_{A,B<>0} S_{\alpha,A}^{\beta,B}$. Отже, в S_α^β можна ввести топологію індуктивної границі просторів $S_{\alpha,A}^{\beta,B}$: $S_\alpha^\beta = \lim\limits_{\substack{A\to\infty \\ B\to\infty}} \operatorname{ind} S_{\alpha,A}^{\beta,B}$.

Якщо P — фіксований многочлен, то у просторі S_α^β визначена й неперервна операція множення на P. Зокрема, звідси випливає, що функції Ерміта h_k, $k \in \mathbb{Z}_+$, належать до простору $S_{1/2}^{1/2}$. Справді, $e^{-x^2/2} \in S_{1/2}^{1/2}$, бо $|e^{-z^2/2}| = e^{-x^2/2+y^2/2}$, якщо $z = x + iy$. Отже, $\dfrac{1}{\alpha} = \dfrac{1}{1-\beta} = 2$, тобто $\alpha = \beta = \dfrac{1}{2}$. Кожна функція Ерміта має вигляд $P(x)\exp(-x^2/2)$, де P — многочлен Ерміта. Зауважимо, що цей же факт випливає з оцінки (5).

Простір усіх лінійних неперервних функціоналів на S_α^β зі слабкою збіжністю позначається символом $(S_\alpha^\beta)'$. Елементи з $(S_\alpha^\beta)'$ називаються ультрарозподілами Жевре порядку β.

У праці [1] доведено, що $S = H_\infty(A)$, $S^{\beta/2}_{\beta/2} = G_{\{\beta\}}(A)$ при $\beta \geq 1$, де A — гармонійний осцилятор. Функції Ерміта h_k, $k \in \mathbb{Z}_+$, є власними функціями оператора A, а $\lambda_k = 2k+1$, $k \in \mathbb{Z}_+$, — його власними числами. Тоді, як випливає із загальної теорії невід'ємних самоспряжених операторів у гільбертовому просторі, елементи просторів S, S^β_α можна охарактеризувати за допомогою їхніх коефіцієнтів Фур'є за базисом $\{h_k, k \in \mathbb{Z}_+\}$ так.

Якщо $f = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k h_k \in \Phi'$, $c_k =< f, h_k >$, то правильними є такі співвідношення еквівалентності:

а) $(f \in S) \Leftrightarrow (\forall m \in \mathbb{N}\, \exists c = c(m) > 0\, \forall k \in \mathbb{Z}_+ :\ |c_k| \leq c(2k+1)^{-m})$;

б) $(f \in S') \Leftrightarrow (\exists m \in \mathbb{N}\, \exists c > 0\, \forall k \in \mathbb{Z}_+ :$ $|c_k| \leq c(2k+1)^m)$;

в) $(f \in S^\beta_\beta) \Leftrightarrow (\exists \mu > 0\, \exists c > 0\, \forall k \in \mathbb{Z}_+ :$ $|c_k| \leq c \exp\{-\mu(2k+1)^{1/(2\beta)}\})$;

г) $(f \in (S^\beta_\beta)') \Leftrightarrow (\forall \mu > 0\, \exists c = c(\mu) > 0\, \forall k \in \mathbb{Z}_+ :\ |c_k| \leq c \exp\{\mu(2k+1)^{1/(2\beta)}\})$.

4. Гармонійний осцилятор нескінченного порядку в просторах типу S. Візьмемо довільну функцію φ з простору $S^{1/2}_{1/2}(\mathbb{R}) \subset L_2(\mathbb{R})$. Кожна така функція допускає продовження у всю комплексну площину як ціла функція. Оскільки функції Ерміта $\{h_k, k \in \mathbb{Z}_+\}$ утворюють в H ортонормований базис, то правильними є розклади

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k h_k(x), \quad x \in \mathbb{R}, \tag{6}$$

$$\varphi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k h_k(z), \quad z = x + iy \in \mathbb{C}, \tag{7}$$

причому ряд (6) збігається до φ у просторі $L_2(\mathbb{R})$. Доведемо, що ряд (7) збігається до φ у просторі $S^{1/2}_{1/2}$. Для цього досить показати, що послідовність $\{S_n(z), n \in \mathbb{N}\}$ частинних сум ряду (7) збігається до φ рівномірно на кожній обмеженій множині $\mathbb{K} \subset \mathbb{C}$ і ця послідовність обмежена в просторі $S^{1/2}_{1/2}$. Першу умову замінимо рівносильною: нехай $r_{n,\varphi}(z)$ позначає залишок ряду (7); доведемо, що $r_{n,\varphi} \rightrightarrows 0$ при $n \to \infty$ на обмеженій множині $\mathbb{K} \subset \mathbb{C}$.

Оскільки $\varphi \in S^{1/2}_{1/2}$, то коефіцієнти Фур'є-Ерміта функції φ задовольняють умову:

$$\exists \mu > 0\, \exists c > 0\, \forall k \in \mathbb{Z}_+ :\ |c_k(\varphi)| \leq c e^{-\mu(2k+1)}.$$

З урахуванням цих оцінок та оцінок, які задовольняють функції Ерміта комплексного аргумента дістаємо, що

$$|r_{n,\varphi}(z)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |c_k(\varphi)| \cdot |h_k(z)| \leq$$

$$\leq c_0 \sum_{k=n+1}^{\infty} e^{-\mu(2k+1)} e^{\frac{k+1}{2}\tau} e^{-ax^2+by^2},$$

де $a = \dfrac{1}{2}\sqrt{\operatorname{th}(\tau/2)}$, $b = \dfrac{1}{2}\sqrt{\operatorname{cth}(\tau/2)}$, $c_0 = c \max\{e\pi^{-1/2}, \pi^{-1/4}(e^{2\tau} - 1)^{-1/4}\}$, $\tau > 0$ — довільно фіксований параметр. Покладемо $\tau = 2\mu > 0$. Тоді

$$e^{-\mu(2k+1)} e^{\frac{k+1}{2}\tau} = e^{-\mu+\tau/2} e^{-(2\mu-\frac{\tau}{2})k} = e^{-\mu k}.$$

Отже,

$$|r_{n,\varphi}(z)| \leq c_0(\mu) \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\frac{1}{e^\mu}\right)^k e^{-ax^2+by^2} =$$

$$= c_0(\mu) \frac{e^{-\mu n}}{e^\mu - 1} e^{-ax^2+by^2} = c_1(\mu) e^{-\mu n} e^{-ax^2+by^2}. \tag{8}$$

З нерівності (8) випливає, що послідовність $\{r_{n,\varphi}, n \geq 1\}$ збігається до нуля в просторі $S^{1/2}_{1/2}$.

Відомо [1], що якщо $\varphi \in S$, то A^n, $n \in \mathbb{N}$, де A — гармонійний осцилятор, діє на φ за правилом

$$(A^n \varphi)(x) = \sum_{0 \leq p+q \leq 2n} c^{(n)}_{p,q} x^p \varphi^{(q)}(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

при цьому коефіцієнти $c^{(n)}_{p,q}$ задовольняють умову

$$|c^{(n)}_{p,q}| \leq 10^n n^{n-\frac{1}{2}(p+q)}.$$

Здійснимо оцінку $|(A^n\varphi)(z)|$, $z \in \mathbb{C}$, $\varphi \in S^{1/2}_{1/2}$, виділивши при цьому явно залежність від

n. Для цього скористаємось розкладом (7). Оскільки, за доведеним, ряд (7) збігається до φ у просторі $S_{1/2}^{1/2}$, то

$$(A^n\varphi)(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k A^n h_k(z) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} c_k (2k+1)^n h_k(z).$$

Тоді

$$|(A^n\varphi)(z)| \le \sum_{k=0}^{\infty} |c_k|(2k+1)^n |h_k(z)| \le$$

$$\le c_0 \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\mu(2k+1)} e^{\frac{k+1}{2}\tau}(2k+1)^n e^{-ax^2+by^2},$$

$$a = \frac{1}{2}\sqrt{\mathrm{th}\,(\tau/2)}, \quad b = \sqrt{\mathrm{cth}\,(\tau/2)},$$

де $\tau > 0$ — довільно фіксований параметр. Далі зауважимо, що

$$(2k+1)^n = (2k+1)^n e^{-\nu k} e^{\nu k} \le$$

$$\le e^{\nu/2}\left(\frac{n}{\nu}\right)^n e^{-n/2} e^{\nu k},$$

де $\nu > 0$ — довільно фіксований параметр. Покладемо $\nu = \mu$, $\tau = \mu$. Тоді

$$e^{-\mu(2k+1)} e^{\frac{k+1}{2}\tau}(2k+1)^n \le$$

$$\le e^{-n/2}\left(\frac{n}{\mu}\right)^n e^{-\frac{\mu}{2}k}, \quad \mu = \mu(\varphi).$$

Отже,

$$|(A^n\varphi)(z)| \le \tilde{c}_0 e^{-n/2}\left(\frac{n}{\mu}\right)^n e^{-ax^2+by^2},$$

$$n \in \mathbb{N}, \quad \tilde{c}_0 = c_0 \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\mu k/2}. \tag{9}$$

Нехай $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ — деяка ціла функція. Говоритимемо, що в просторі $S_{1/2}^{1/2}$ задано гармонійний осцилятор нескінченного порядку $f(A) := \sum_{n=0}^{\infty} b_n A^n$, якщо для довільної основної функції $\varphi \in S_{1/2}^{1/2}$ ряд

$$\psi(z) \equiv (f(A)\varphi)(z) := \sum_{k=0}^{\infty} b_k (A^k\varphi)(z)$$

зображає деяку основну функцію з простору $S_{1/2}^{1/2}$. Символом $\tilde{S}_{1/2}^{1/2}$ позначимо сукупність тих функцій $\varphi \in S_{1/2}^{1/2}$, коефіцієнти Фур'є-Ерміта яких задовольняють умову в) (див. п.3; $\beta = 1/2$) з параметром $\mu \ge \sqrt{e}$.

Теорема 1. *Якщо ціла функція f задовольняє умову*

$$\exists\, d > 0\ \exists\, q \in (0,1)\ \forall\, z = x+iy : |f(z)| \le d e^{q|z|},$$

то у просторі $\tilde{S}_{1/2}^{1/2}$ визначений і є неперервним гармонійний осцилятор нескінченного порядку $f(A)$, який відображає $\tilde{S}_{1/2}^{1/2}$ в $S_{1/2}^{1/2}$.

Доведення. Нехай $\varphi \in \tilde{S}_{1/2}^{1/2}$, $\psi = f(A)\varphi$. Доведемо, що $\psi \in S_{1/2}^{1/2}$. Коефіцієнти Тейлора b_k, $k \in \mathbb{Z}_+$, функції φ обчислюються за формулою

$$b_k = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R} \frac{\varphi(z)}{z^{k+1}}dz, \quad k \in \mathbb{Z}_+,$$

де Γ_R — коло радіуса R з центром у точці $z_0 = 0$. Звідси та з умови теореми випливає, що

$$|b_k| \le d \inf_R \frac{e^{qR}}{R^k} = d\left(\frac{qe}{k}\right)^k, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Тоді, врахувавши нерівності (9) та обмеження на μ: $\mu \ge \sqrt{e}$, знайдемо, що

$$|\psi(z)| \le d\tilde{c}_0 \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{qe}{k}\right)^k e^{-k/2}\left(\frac{k}{\mu}\right)^k e^{-ax^2+by^2} \le$$

$$\le d\tilde{c}_0 \sum_{k=0}^{\infty} q^k e^{-ax^2+by^2} = \tilde{c}_0' e^{-ax^2+by^2}.$$

Отже, $\psi \in S_{1/2}^{1/2}$. Аналогічно доводимо, що $f(A)$ кожну обмежену множину простору

$\tilde{S}^{1/2}_{1/2}$ відображає в обмежену множину простору $S^{1/2}_{1/2}$. Теорема доведена.

З теореми 1 випливає, зокрема, що в просторі $\tilde{S}^{1/2}_{1/2}$ визначений і є неперервним оператор

$$e^{qA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^n A^n}{n!}, \quad q \in (0,1),$$

де A — гармонійний осцилятор.

Зауваження 2. *Якщо посилити умову на цілу функцію f, а саме, вважати, що*

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, c_\varepsilon > 0\ \forall\, z = x + iy \in \mathbb{C}:$$

$$|f(z)| \le c_\varepsilon e^{\varepsilon |z|}, \tag{10}$$

то оператор $f(A)$ буде вже визначений у просторі $S^{1/2}_{1/2}$ і відображатиме цей простір неперервно в себе.

Надалі вважатимемо, що функція f задовольняє умову (10). Звуження оператора $f(A)$ на простір $S^{1/2}_{1/2}(\mathbb{R})$ позначатимемо символом $\tilde{A}_f$ ($S^{1/2}_{1/2}(\mathbb{R})$ складається з функцій простору $S^{1/2}_{1/2}$, звужених на дійсну вісь). Вважатимемо також, що на дійсній вісі функція f додатково задовольняє умову:

$$\exists\, d_0 > 0\ \forall\, x \in \mathbb{R}:\ f(x) \ge d_0 |x|. \tag{11}$$

5. Задача Коші для еволюційних рівнянь з гармонійним осцилятором нескінченного порядку. Розглянемо еволюційне рівняння вигляду

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \tilde{A}_f u = 0, \quad (t,x) \in (0,T] \times \mathbb{R} = \Omega. \tag{12}$$

Під розв'язком рівняння (12) розумітимемо функцію u, яка задовольняє умови:

1) $u(t,\cdot) \in S^{1/2}_{1/2}$ при кожному $t \in (0,T]$;

2) $u(\cdot,x)$ диференційовна по t при кожному $x \in \mathbb{R}$;

3) u задовольняє рівняння (12).

Теорема 2. *Кожна функція u вигляду*

$$u(t,x) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-tf(2k+1)} c_k h_k(x) =< g, G_{t,x}(\cdot) >,$$

$$G_{t,x}(y) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-tf(2k+1)} h_k(x) h_k(y),$$

$$g = \sum_{k=0}^{\infty} c_k h_k \in (S^{1/2}_{1/2})',$$

$$c_k =< g, h_k >, \quad k \in \mathbb{Z}_+,$$

є розв'язком рівняння (12) (у вказаному розумінні).

Доведення. Передусім нагадаємо, що кожну узагальнену функцію $g \in (S^{1/2}_{1/2})' \subset \Phi'$ можна ототожнити з її рядом Фур'є-Ерміта, тобто

$$g = \sum_{k=0}^{\infty} c_k h_k(x), \quad c_k =< g, h_k >, \quad k \in \mathbb{Z}_+,$$

причому коефіцієнти c_k задовольняють нерівності:

$$\forall\, \mu > 0\ \exists\, c = c(\mu) > 0\ \forall\, k \in \mathbb{Z}_+:$$

$$|c_k| \le c \exp\{\mu(2k+1)\}. \tag{13}$$

Доведемо, що $u(t,\cdot) \in S^{1/2}_{1/2}$ при кожному $t > 0$. Для цього в нерівності (13) покладемо $\mu = td_0/2$, де $d_0 > 0$ — стала з нерівності (11). Тоді

$$|c_k(u)| \equiv |e^{-tf(2k+1)} c_k| \le$$

$$\le c e^{-td_0(2k+1)} e^{\mu(2k+1)} = c e^{-td_0(2k+1)/2}.$$

Звідси, з урахуванням твердження в) з п.3 дістаємо, що $u(t,\cdot) \in S^{1/2}_{1/2}$ при кожному $t > 0$.

Оскільки функції Ерміта задовольняють умову $|h_k(x)| \le 1$, $\forall\, k \in \mathbb{Z}_+$, $x \in \mathbb{R}$, то з нерівності

$$|e^{-tf(2k+1)} h_k(x)| \le e^{-td_0(2k+1)},\ t > 0,\ x \in \mathbb{R},$$

випливає, що $G_{t,x} \in S^{1/2}_{1/2}$ при кожному $t > 0$ та $x \in \mathbb{R}$.

Доведемо, що для функції u правильним є зображення:

$$u(t,x) =< g, G_{t,x}(\cdot) >, \quad (t,x) \in \Omega.$$

Для цього досить установити, що послідовність частинних сум

$$S_{n,t,x}(y) := \sum_{k=0}^{\infty} \exp\{-tf(2k+1)\} h_k(x) h_k(y)$$

збігається до $G_{t,x}$ при $n \to \infty$ у просторі $S_{1/2}^{1/2}$ (при фіксованих $t > 0$, $x \in \mathbb{R}$), або, що

$$r_{n,t,x}(y) := \sum_{k=n+1}^{\infty} \exp\{-tf(2k+1)\} h_k(x) h_k(y)$$

збігається до нуля при $n \to \infty$ у просторі $S_{1/2}^{1/2}$. Отже, доведемо, що $r_{n,t,x}(z) \rightrightarrows 0$ при $n \to \infty$ на кожній обмеженій множині $\mathbb{K} \subset \mathbb{C}$ ($z = y + iw \in \mathbb{C}$). Для цього скористаємось оцінками функцій Ерміта комплексного аргумента:

$$|r_{n,t,x}(z)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} e^{-tf(2k+1)} |h_k(z)| \leq$$

$$\leq c_0 \sum_{k=n+1}^{\infty} e^{-td_0(2k+1) + \frac{k+1}{2}\tau} e^{-ay^2 + bw^2}.$$

Оскільки $\tau > 0$ — довільно фіксований параметр, то покладемо $\tau = 2td_0$. Тоді

$$|r_{n,t,x}(z)| \leq c_0 \sum_{k=n+1}^{\infty} e^{-td_0 k} e^{-ay^2 + bw^2} =$$

$$= \tilde{c}_0 e^{-td_0 n} e^{-ay^2 + bw^2}, \qquad (14)$$

де $\tilde{c}_0 = \dfrac{c_0}{e^{td_0} - 1}$, сталі $\tilde{c}_0$, d_0, a, b не залежать від n, x. З оцінки (14) випливає, що послідовність $\{r_{n,t,x}, n \geq 1\}$ обмежена в просторі $S_{1/2}^{1/2}$ і збігається рівномірно до нуля при $n \to \infty$ на множині $\mathbb{K} \subset \mathbb{C}$.

Тоді

$$u(t,x) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-tf(2k+1)} c_k(f) h_k(x) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} e^{-tf(2k+1)} < g, h_k(y) > h_k(x) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} e^{-tf(2k+1)} < g, h_k(y) > h_k(x) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} < g, \sum_{k=0}^{n} e^{-tf(2k+1)} h_k(x) h_k(y) >=$$

$$= \lim_{n\to\infty} < g, S_{n,t,x}(\cdot) >=< g, \lim_{n\to\infty} S_{n,t,x}(\cdot) >=$$

$$=< g, G_{t,x}(\cdot) > .$$

Далі доведемо, що $G_{t,x}$, як абстрактна функція аргументу t у просторі $S_{1/2}^{1/2}$, диференційовна по t (при кожному фіксованому $x \in \mathbb{R}$ та $t > 0$). Оскільки $S_{1/2}^{1/2} = H_{\{1\}} = \bigcup_{\mu>0} H_{\mu,1} \equiv \bigcup_{\mu>0} \cup H_{\mu}$, то для цього досить показати, що

$$\Phi_{\Delta t,t,x}(y) :=$$

$$:= \frac{1}{\Delta t}[G_{t+\Delta t,x}(y) - G_{t,x}(y)] \underset{\Delta t \to 0}{\longrightarrow} \frac{\partial}{\partial t} G_{t,x}(y)$$

у просторі $H_{\{1\}}$ (якщо $\Delta t < 0$, то вважаємо Δt таким, що $t + \Delta t \geq t/2$). Це означає, що

1) множина функцій $\{\Phi_{\Delta t,t,x}, |\Delta t| \leq \varepsilon_0, \Delta t \neq 0\}$ ($\varepsilon_0 > 0$ — досить мале довільно фіксоване число) обмежена в просторі $H_{\{1\}}$, тобто

$$\exists\, c > 0\ \forall\, \Delta t (|\Delta t| \leq \varepsilon_0, \Delta t \neq 0):$$

$$\|\Phi_{\Delta t,t,x}\|^2_{H_\mu} \leq c$$

при деякому $\mu > 0$ та фіксованих $t > 0$, $x \in \mathbb{R}$;

2) $\Phi_{\Delta t,t,x} \to \dfrac{\partial}{\partial t} G_{t,x}$ при $\Delta t \to 0$ у просторі $H_{\{1\}}$, тобто

$$\left\| \Phi_{\Delta t,t,x} - \frac{\partial}{\partial t} G_{t,x} \right\|^2_{H_\mu} \to 0, \quad \Delta t \to 0,$$

при деякому $\mu > 0$ та фіксованих $t > 0$, $x \in \mathbb{R}$.

Оскільки

$$\Phi_{\Delta t,t,x}(y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\Delta t}[e^{-(t+\Delta t)f(2k+1)} -$$

$$-e^{-tf(2k+1)}] h_k(x) h_k(y) =$$

$$= -\sum_{k=0}^{\infty} f(2k+1) e^{-(t+\theta\Delta t)f(2k+1)} h_k(x) h_k(y),$$

$$0 < \theta < 1,$$

то
$$c_k(\Phi_{\Delta t,t,x}) =$$
$$= -f(2k+1)\exp\{-(t+\theta\Delta t)f(2k+1)\}h_k(x),$$
(якщо $\Delta t < 0$, то внаслідок домовленості щодо Δt маємо, що $t+\theta\Delta t > t+\Delta t \geq t/2$). Тоді для довільного фіксованого $\mu < \frac{d_0 t}{4}$ (d_0 — стала з нерівності (11)) справджуються співвідношення:
$$\|\Phi_{\Delta t,t,x}\|^2_{H_\mu} =$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \exp\{2\mu(2k+1)\}\cdot|c_k(\Phi_{\Delta t,t,x})|^2 =$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} f^2(2k+1)\exp\{2\mu(2k+1)\}\times$$
$$\times\exp\{-2(t+\theta\Delta t)f(2k+1)\}\cdot|h_k(x)|^2 \leq$$
$$\leq \sum_{k=0}^{\infty} f^2(2k+1)\exp\{2\mu(2k+1)\}\times$$
$$\times\exp\{-tf(2k+1)\}.$$
Оскільки
$$f^2(2k+1)\exp\{-tf(2k+1)\} = f^2(2k+1)\times$$
$$\times\exp\{-\frac{t}{2}f(2k+1)\}\exp\{-\frac{t}{2}f(2k+1)\} \leq$$
$$\leq \frac{8}{t^2}\exp\{-\frac{t}{2}f(2k+1)\} \leq$$
$$\leq \frac{8}{t^2}\exp\{-\frac{t}{2}d_0(2k+1)\},$$
то
$$\|\Phi_{\Delta t,t,x}\|^2_{H_\mu} \leq$$
$$\leq \frac{8}{t^2}\sum_{k=0}^{\infty}\exp\{-(\frac{td_0}{2}-2\mu)(2k+1)\} < +\infty.$$
Отже, множина функцій $\{\Phi_{\Delta t,t,x}, |\Delta t| \leq \varepsilon_0, \Delta t \neq 0\}$ обмежена в просторі $H_{\{1\}}$.

Функція $G_{t,x}(y)$ диференційовна по t (при кожному $x\in\mathbb{R}$ і $y\in\mathbb{R}$). Справді, нехай $t\in[\varepsilon,T]$, де $\varepsilon>0$. Доведемо, що ряд
$$-\sum_{k=0}^{\infty} f(2k+1)\exp\{-tf(2k+1)\}h_k(x)h_k(y),$$
$$t\in[\varepsilon,T], \tag{15}$$
збігається рівномірно по t (при фіксованих x і y), оскільки тоді
$$\frac{\partial G_{t,x}(y)}{\partial t} = -\sum_{k=0}^{\infty} f(2k+1)\times$$
$$\times\exp\{-tf(2k+1)\}h_k(x)h_k(y),\ t\in[\varepsilon,T]. \tag{16}$$
Оскільки $|h_k(x)|\leq 1$, $k\in\mathbb{Z}_+$, $x\in\mathbb{R}$, то для $t\geq\varepsilon$ маємо, що
$$|-f(2k+1)\exp\{-tf(2k+1)\}h_k(x)h_k(y)| \leq$$
$$\leq f(2k+1)\exp\{-\varepsilon f(2k+1)\} \leq$$
$$\leq \frac{2}{3}\exp\{-\frac{\varepsilon}{2}(2k+1)\}.$$
Отже, ряд (15) збігається рівномірно при $t\geq\varepsilon$. Цим доведено, що функція $G_{t,x}$ диференційовна по t на відрізку $[\varepsilon,T]$. Оскільки $\varepsilon>0$ — довільне, то функція $G_{t,x}$ диференційовна по t на проміжку $(0,T]$, а співвідношення (16) є правильним при кожному $t\in(0,T]$.

Тоді
$$\Psi_{\Delta t,t,x}(y) := \Phi_{\Delta t,t,x}(y) - \frac{\partial}{\partial t}G_{t,x}(y) =$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty}[\exp\{-tf(2k+1)\} - \exp\{-(t+\theta\Delta t)\times$$
$$\times f(2k+1)\}]f(2k+1)h_k(x)h_k(y).$$
Звідси випливає, що
$$\|\Psi_{\Delta t,t,x}\|^2_{H_\mu} =$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty}\exp\{2\mu(2k+1)\}\cdot|c_k(\Psi_{\Delta t,t,x})|^2 =$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty}\exp\{2\mu(2k+1)\}\cdot|\exp\{-tf(2k+1)\}-$$
$$-\exp\{-(t+\theta\Delta t)f(2k+1)\}|^2 f^2(2k+1)\times$$
$$\times|h_k(x)|^2 \leq \sum_{k=0}^{\infty}\exp\{2\mu(2k+1)-2tf(2k+1)\}\times$$
$$\times|e^{-\theta\Delta t f(2k+1)}-1|^2\cdot f^2(2k+1) \leq$$
$$\leq \theta^4(\Delta t)^2\varepsilon_0^2\sum_{k=0}^{\infty}\exp\{2\mu(2k+1)-2tf(2k+1)\}\times$$

$$\times f^6(2k+1)\exp\{2\theta\varepsilon_0 f(2k+1)\}.$$

Далі вважаємо, що $\varepsilon_0 < t/2$ ($t > 0$ — фіксоване). Тоді

$$f^6(2k+1)\exp\{-tf(2k+1)+2\theta\varepsilon_0 f(2k+1)\} \leq$$

$$\leq f^6(2k+1)\exp\{-(t-2\varepsilon_0)f(2k+1)\} \leq$$

$$\leq \frac{6!}{(t-2\varepsilon_0)^6}.$$

Оскільки $\mu < td_0/4$, то

$$\|\Psi_{\Delta t,t,x}\|^2_{H_\mu} \leq \frac{6!\varepsilon_0^2\Delta t^2}{(t-2\varepsilon_0)^6}\sum_{k=0}^{\infty}\exp\{2\mu(2k+1)-$$

$$-tf(2k+1)\} \leq \tilde{c}(\Delta t)^2,$$

де

$$\tilde{c} = \frac{6!\varepsilon_0^2}{(t-2\varepsilon_0)^6}\sum_{k=0}^{\infty}\exp\{-(td_0-2\mu)\times$$

$$\times f(2k+1)\} < \infty.$$

Звідси вже випливає, що $\|\Psi_{\Delta t,t,x}\|_{H_\mu} \to 0$ при $\Delta t \to 0$, тобто $\Phi_{\Delta t,t,x} \to \frac{\partial}{\partial t}G_{t,x}$ при $\Delta t \to 0$ у просторі $H_{\{1\}} = S^{1/2}_{1/2}$.

Як було доведено раніше, для функції u правильним є зображення: $u(t,x) =< g, G_{t,x}(\cdot) >$, $(t,x) \in \Omega$. Оскільки $\Phi_{\Delta t,t,x} \to \frac{\partial}{\partial t}G_{t,x}$ при $\Delta t \to 0$, то з властивості неперервності функціоналу g випливають співвідношення:

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}[u(t+\Delta t,x)-u(t,x)] =$$

$$= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t} < g, G_{t+\Delta t,x}(\cdot)-G_{t,x}(\cdot) >=$$

$$= \lim_{\Delta t\to 0} < g, \Phi_{\Delta t,t,x}(\cdot) >=$$

$$=< g, \lim_{\Delta t\to 0}\Phi_{\Delta t,t,x}(\cdot) >=< g, \frac{\partial}{\partial t}G_{t,x}(\cdot) > .$$

Внаслідок формули (16) маємо, що

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} =< g, -\sum_{k=0}^{\infty} f(2k+1)\times$$

$$\times\exp\{-tf(2k+1)\}h_k(x)h_k(y) >=$$

$$= -\sum_{k=0}^{\infty} f(2k+1)c_k(g)\exp\{-tf(2k+1)\}h_k(x). \tag{17}$$

З іншого боку,

$$\tilde{A}_f u = \sum_{n=0}^{\infty} b_n A^n u =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} b_n A^n\left(\sum_{k=0}^{\infty} e^{-tf(2k+1)}c_k h_k\right).$$

Як було доведено раніше, ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} e^{-tf(2k+1)}c_k h_k$ зображає функцію u з простору $S^{1/2}_{1/2}$ і збігається до u за топологією простору $S^{1/2}_{1/2}$ (при кожному $t > 0$), тому

$$A^n\left(\sum_{k=0}^{\infty} e^{-tf(2k+1)}c_k h_k\right) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-tf(2k+1)}\times$$

$$\times c_k A^n h_k = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-tf(2k+1)}c_k(g)(2k+1)^n h_k.$$

Отже,

$$\tilde{A}_f u = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \sum_{k=0}^{\infty} e^{-tf(2k+1)}c_k(g)(2k+1)^n h_k =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} e^{-tf(2k+1)}c_k(g)h_k\sum_{n=0}^{\infty} b_n(2k+1)^n =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} f(2k+1)e^{-tf(2k+1)}c_k(g)h_k. \tag{18}$$

Із співвідношень (17) та (18) випливає, що функція u є розв'язком рівняння (12). Теорема доведена.

Зазначимо, що рівняння (12) відноситься до рівнянь, коефіцієнти яких необмежено зростають при $|x| \to \infty$.

Теорема 3. *Нехай $u(t,x)$, $(t,x) \in \Omega$, — розв'язок рівняння (12). Граничне значення $u(t,\cdot)$ при $t \to +0$ існує в просторі $(S^{1/2}_{1/2})'$, тобто $u(t,\cdot) \underset{t\to+0}{\overset{(S^{1/2}_{1/2})'}{\longrightarrow}} g = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k h_k$.*

Доведення. Передусім зазначимо, що $u(t,\cdot) \to f$ при $t \to +0$ у просторі Φ', оскільки $\exp\{-tf(2k+1)\}c_k \to c_k$ при $t \to +0$, $\forall\, k \in \mathbb{Z}_+$. Внаслідок зауваження 1, для доведення теореми досить показати, що множина $\{u(t,\cdot), t > 0\}$ обмежена в просторі $(S_{1/2}^{1/2})' = (G_{\{1\}}(A))' = H'_{\{1\}} = \lim\limits_{\mu\to 0} \operatorname{pr} H'_\mu$. Для цього зафіксуємо довільне $\mu > 0$ і візьмемо $0 < \beta < \mu$. Оскільки $g = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k h_k \in (S_{1/2}^{1/2})'$, то для заданого β існує стала $c_\beta > 0$ така, що $|c_k| \le c_\beta \exp\{\beta(2k+1)\}$, $k \in \mathbb{Z}_+$. Отже, $\forall\, t > 0:\ \exp\{-tf(2k+1)\}|c_k| \le$ $\le c_\beta \exp\{\beta(2k+1)\}, \quad k \in \mathbb{Z}_+$. Звідси дістаємо, що

$$\forall\, t > 0:\ \|u(t,\cdot)\|^2_{H'_\mu} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} |c_k(u)|^2 \exp\{-2\mu(2k+1)\} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} |c_k|^2 \exp\{-2\mu(2k+1) - 2t(2k+1)\} \le$$

$$\le c_\beta^2 \sum_{k=0}^{\infty} \exp\{-2(\mu-\beta)(2k+1)\} < +\infty.$$

Цим доведено, що множина $\{u(t,\cdot), t > 0\}$ обмежена в кожному просторі H'_μ, а, значить, і в просторі $H'_{\{1\}} = \lim\limits_{\mu\to 0} \operatorname{pr} H'_\mu = (S_{1/2}^{1/2})'$.

Теорема доведена.

Теорема 3 дозволяє ставити задачу Коші для рівняння (12) так. Для (12) задамо початкову умову

$$u(t,\cdot)|_{t=0} = g, \tag{19}$$

де $g \in (S_{1/2}^{1/2})'$. *Під розв'язком задачі Коші (12), (19) розумітимемо розв'язок рівняння (12), який задовольняє початкову умову (19) у тому розумінні, що* $u(t,\cdot) \to g$ *при* $t \to +0$ *у просторі* $(S_{1/2}^{1/2})'$.

Теорема 4. *Задача Коші (12), (19) коректно розв'язна у просторі початкових даних* $(S_{1/2}^{1/2})'$. *Її розв'язок зображається формулою* $u(t,x) =< g, G_{t,x}(\cdot) >$, $g = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k h_k \in (S_{1/2}^{1/2})'$, $(t,x) \in \Omega$.

Доведення. Те, що функція u є розв'язком задачі Коші (12), (19), випливає з теорем 2,3. Властивість єдиності розв'язку задачі Коші (12), (19) дістаємо з таких міркувань. Якщо $g = 0$, то $c_k =< g, h_k >= 0$, $\forall\, k \in \mathbb{Z}_+$. Отже, $u = 0$.

Доведемо, що розв'язок вказаної задачі неперервно залежить від початкової умови. Нехай $\{g, g_n, n \ge 1\} \subset (S_{1/2}^{1/2})'$, причому $g_n \to g$ при $n \to \infty$ у просторі $(S_{1/2}^{1/2})'$. Звідси, зокрема, випливає, що $c_k(g_n) =< g_n, h_k > \to < g, h_k >= c_k(g)$, $n \to \infty, \forall\, k \in \mathbb{Z}_+$, бо $h_k \in S_{1/2}^{1/2}, \forall\, k \in \mathbb{Z}_+$. Крім того, $\{u, u_n, n \ge 1\} \subset S_{1/2}^{1/2}$ при кожному $t > 0$, де u_n — розв'язок задачі Коші для (12), що відповідає початковій функції $g_n \in (S_{1/2}^{1/2})'$. Тоді

$$\forall\, \varphi = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(\varphi) h_k \in S_{1/2}^{1/2}:$$

$$< u_n, \varphi >= (u_n, \varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-tf(2k+1)} \times$$

$$\times c_k(g_n)\overline{c_k(\varphi)} \underset{n\to\infty}{\to} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-tf(2k+1)} c_k(g)\overline{c_k(\varphi)} =$$

$$= (u, \varphi) =< u, \varphi > .$$

Отже, $u_n \to u$ при $n \to \infty$ у просторі $(S_{1/2}^{1/2})'$, що й потрібно було довести.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Горбачук В.И., Горбачук М.Л.* Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений.— К.: Наук. думка, 1984.— 283 с.

2. *Гельфанд И.М., Шилов Г.Е.* Пространства основных и обобщенных функций.— М.: Физматгиз, 1958.— 307 с.

3. *Горбачук В.И.* О разрешимости задачи Дирихле для дифференциально-операторного уравнения второго порядка в различных пространствах // Прямые и обратные задачи спектральной теории дифференциальных операторов: Сб. науч. тр.— К.: Ин-т математики АН УССР, 1985.— С.8—22.

4. *Суетин П.К.* Классические ортогональные многочлены.— М.: Наука, 1976.— 328 с.

Стаття надійшла до редколегії 14.03.2005