УДК 517.98

©2005 р. О.І. Гайдукевич, В.К. Маслюченко

Чернівецький національний університет ім. Юрія Федьковича, Чернівці

ПОБУДОВА ФІНАЛЬНО ЗАМКНЕНИХ І НЕ ЗАМКНЕНИХ МНОЖИН В ІНДУКТИВНИХ ГРАНИЦЯХ

Запропоновано новий метод побудови фінально замкнених і не замкнених множин в індуктивних границях, який базується на відомій лемі Рісса.

A new method of construction of final closed and not closed sets in inductive limits, which based on famous Riesz Lemma, is suggested.

1. Розглянемо векторний простір X над полем $\mathbb{K}$ дійсних або комплексних чисел, який є об'єднанням зростаючої послідовності своїх лінійних підпросторів X_n. Припустимо, що на кожному просторі X_n задано локально опуклу топологію $\mathcal{T}_n$. Тоді на просторі X виникають дві природні топології: *індуктивна топологія* $\mathcal{T}$ і *фінальна топологія* $\mathcal{S}$. Топологія $\mathcal{T}$ є локально опуклою і базу околів нуля в ній утворюють усі абсолютно опуклі і радіальні в X множини U для яких $U\bigcap X_n$ є околом нуля в просторі $(X_n,\mathcal{T}_n)$ для кожного n. При цьому локально опуклий простір $(X,\mathcal{T})$ називається *індуктивною границею* послідовності локально опуклих просторів $(X_n,\mathcal{T}_n)$. Множини з $\mathcal{T}$ ми називатимемо *відкритими*, а їх доповнення – *замкненими*. Топологія $\mathcal{S}$ – це найсильніша з топологій на X, при яких усі тотожні вкладення $j_n : X_n \hookrightarrow X$ неперервні. Вона складається з усіх тих підмножин G простору X, що $G\bigcap X_n$ – відкрита множина в $(X_n,\mathcal{T}_n)$ для кожного n. Такі множини ми називатимемо *фінально відкритими*, а їх доповнення – *фінально замкненими*. Зрозуміло, що множина F в X буде фінально замкненою тоді і лише тоді, коли для кожного n перетин $F\bigcap X_n$ замкнений у $(X_n,\mathcal{T}_n)$. Простір $(X,\mathcal{S})$ – називають *прямою границею* послідовності просторів $(X_n,\mathcal{T}_n)$ (детальніше щодо цих понять див., наприклад, [1, §5]). Оскільки всі вкладення $j_n : (X_n,\mathcal{T}_n) \hookrightarrow (X,\mathcal{T})$ неперервні, то $\mathcal{T}\subseteq\mathcal{S}$. Тому фінально відкриті чи замкнені множини називають ще *майже відкритими* чи *замкненими*. При цьому виникає природне питання: при яких умовах має місце рівність $\mathcal{T}=\mathcal{S}$, тобто коли індуктивна границя є прямою?

Найпростішим нетривіальним прикладом реалізації рівності $\mathcal{T}=\mathcal{S}$ є простір $\mathbb{K}^\infty$ всіх фінітних послідовностей скалярів, який є індуктивною границею послідовності своїх скінченновимірних просторів

$$\mathbb{K}_n=\{x=(\xi_1,...,\xi_n,0,0,...):(\xi_1,...,\xi_n)\in\mathbb{R}^n\}$$

з евклідовою топологією, і ця індуктивна границя є прямою. Втім, рівність $\mathcal{T}=\mathcal{S}$ виконується далеко не завжди. У багатьох випадках вдається побудувати навіть приклади майже замкнених і не замкнених лінійних підпросторів в X. Питання про існування таких підпросторів було поставлене ще в праці [2] і над ним у свій час працювало багато дослідників(див.[3] і вказану там літературу). Тут ми пропонуємо один (наскільки ми знаємо) новий метод побудови фінально замкнених і не замкнених множин в індуктивних границях нормованих просторів, який базується на відомій лемі Рісса [4, с.235].

2. Перейдемо до формулювання і доведення основного результату.

Теорема 1. Нехай X – векторний простір над полем $\mathbb{K}$, який є об'єднанням строго зростаючої послідовності своїх лінійних підпросторів X_n, $\|\cdot\|$ – норма на X, $\|\cdot\|_n$ – звуження норми $\|\cdot\|$ на X_n, $\mathcal{T}_n$ – топологія на X_n, яка породжена нормою $\|\cdot\|_n$, $\mathcal{T}$ – відповідна індуктивна топологія на X і простір X_1 нескінченновимірний. Тоді в індуктивній границі $(X,\mathcal{T}) = limind(X_n,\mathcal{T}_n)$ існує фінально замкнена і не замкнена множина A.

Доведення. Для кожного номера $n = 2,3,...$ візьмемо елемент x_n, такий, що $x_n \in X_n \setminus X_{n-1}$ і $\| x_n \| = 1$. Оскільки простір X_1 нескінченно-вимірний, то за лемою Рісса існує така послідовність елементів $x_{1,k}$ простору X_1, що $\| x_{1,k} \| = 1$ для кожного k і $\| x_{1,k} - x_{1,j} \| \geq 1/2$ при $k \neq j$. Покладемо $x_{n,k} = (1/n)x_{1,k}$, $y_{n,k} = x_{n,k} + (1/k)x_n$ при $n \in \mathbb{N}\setminus\{1\}$ і $k \in \mathbb{N}$ і розглянемо множини $F_n = \{y_{n,k} : k \in \mathbb{N}\}$ при $n \geq 2$. Очевидно, що $F_n \subseteq X_n \setminus X_{n-1}$ для кожного $n \geq 2$. Покажемо, що множина F_n замкнена в просторі $(X_m, \mathcal{T}_m)$ для довільних номерів n і m, таких, що $2 \leq n \leq m$. Нехай $N = 8n$. Розглянемо різні номери k і j, які $\geq N$. Тоді

$$\| y_{n,k} - y_{n,j} \| \geq \| x_{n,k} - x_{n,j} \| - (1/k) \| x_n \| -$$
$$-(1/j) \| x_n \| \geq 1/2n - 1/k - 1/j \geq 1/4n.$$

Звідси, очевидно, випливає, що множина $B_n = \{y_{n,k} : k \geq N\}$ замкнена в X_m. Скінченна множина $A_n = \{y_{n,k} : k < N\}$ також є замкненою в X_m. Але $F_n = A_n \bigcup B_n$, отже, і F_n замкнена в X_m.

Покладемо $A = \bigcup\limits_{n=2}^{\infty} F_n$. Для кожного номера $n \in \mathbb{N}$ маємо $A_n = A \bigcap X_n \bigcup\limits_{i=2}^{n} F_i$ при $n \geq 2$ і $A_1 = A \bigcap X_1 = \varnothing$ при $n = 1$. Звідси негайно випливає, що для кожного n множина A_n замкнена в X_n, тобто, A – фінально замкнена.

Покажемо, що A – не замкнена в $(X,\mathcal{T})$. Для цього розглянемо нульовий вектор 0 простору X. Очевидно, $0 \notin A$. Покажемо, що 0 належить замиканню $\overline{A}$ множини A у просторі $(X,\mathcal{T})$.

Нехай $E = \{e = (\varepsilon_k)_{k=1}^{\infty} : (\forall k)(\varepsilon_k > 0)\}$ і $B_n = \{x \in X_n : \| x \| \geq 1\}$. Кожній послідовності $e = (e_k)_{k=1}^{\infty} \in E$ співставимо множину $U_e = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} (\varepsilon_1 B_1 + ... + \varepsilon_n B_n)$. Відомо [1, с.47], що система $\{U_e : e \in E\}$ утворює базу околів нуля в просторі $(X,\mathcal{T})$. Отже, досить показати, що $U_e \bigcap A \neq \emptyset$ для кожного $e \in E$.

Візьмемо $e = (\varepsilon_k)_{k=1}^{\infty} \in E$ і знайдемо елемент $x \in U_e \bigcap A$. Спочатку беремо такий номер $m \geq 2$, що $1/m \leq \varepsilon_1$. Ясно, що $x_{m,k} \in \varepsilon_1 B_1$ для кожного k. Далі візьмемо настільки великий номер j, що $1/j \leq \varepsilon_m$. Тоді, очевидно, $(1/j)x_m \in \varepsilon_m B_m$. В такому разі

$$y_{m,j} \in \varepsilon_1 B_1 + \varepsilon_m B_n \subseteq \varepsilon_1 B_1 + ... + \varepsilon_m B_m \subseteq U_e,$$

Отже, елемент $x = y_{m,j}$ і є шуканим.

Таким чином, $0 \in \overline{A} \setminus A$, отже, множина A не є замкненою в $(X,\mathcal{T})$.

Користуючись цим прийомом, можна навести приклад строгої індуктивної границі $X = l_2^{\infty}$ нормованих рефлексивних просторів, в якій існують фінально замкнені і не замкнені множини. Зауважимо, що згідно з одним результатом Б.Макарова [5] в такому просторі X не існує фінально замкненого і не замкненого лінійного підпростору чи навіть опуклої множини.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Маслюченко В.К.* Лінійні неперервні оператори.— Чернівці: Рута, 2002.— 72с.

2. *Dieudonné J., Schwartz L.* La dualité dans les espaces (F) et (LF) // Ann.Inst. Fourier.— 1949.— **1.**— P.61—101.

3. *Смолянов О.Г.* Почти замкнутые подпространства строгих индуктивных пределов последовательностей пространств Фреше // Мат. сборник.— 1969.— **80**, № 4.— С.513—520.

4. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Елементы теории функций и функционального анализа.— М.: Наука, 1968.— 496 с.

5. *Макаров Б.М.* Об индуктивных пределах нормированных пространств // ДАН СССР.— 1958.— № 6.— С.1092—1094.

Стаття надійшла до редколегії 14.10.2005