УДК 517.929

©2005 р. Я.Й.Бігун

Чернівецький національний університет ім. Юрія Федьковича, Чернівці

УСЕРЕДНЕННЯ В БАГАТОЧАСТОТНИХ СИСТЕМАХ ІЗ ЛІНІЙНО ПЕРЕТВОРЕНИМ АРГУМЕНТОМ ТА ІНТЕГРАЛЬНИМИ КРАЙОВИМИ УМОВАМИ

Розглянуто систему диференціальних рівнянь із лінійно перетвореним аргументом у повільних і швидких змінних. Проведено усереднення за швидкими змінними як системи, так і інтегральних крайових умов. Доведено існування розв'язку крайової задачі та одержано явно залежну від малого параметра оцінку похибки методу усереднення.

We consider a system of differential equations with linearly transformed in a fast and slow variables. A system and the integral boundary conditions are averagined by the fast variables. We prove the existence of a solution of a value problem. For error of the method, an estimate evidently dependent of a small parameter is obtained.

Вступ. Багаточастотними системами моделюються різноманітні коливні процеси в механіці, екології, біології та ін. Такі системи характеризуються складною поведінкою внаслідок резонансних явищ, які описуються майже чи точною раціональною співвимірністю частот. Суттєво спрощуються такі системи, якщо провести їх усереднення і розділити повільні та швидкі змінні. Побудові схем усереднення та їх обґрунтуванню присвячена значна кількість праць, зокрема монографії [1 – 4] та ін.

Особливістю дослідження багаточастотних систем з інтегральними крайовими умовами є те, що процедуру усереднення можна застосовувати як для рівнянь, так і для крайових умов. Для систем без запізнення така задача вивчалась у [4 – 6]. Такі ж системи із запізненням аргументу розглядалися в [7], але усереднення в крайових умовах не здійснювалось. У даній роботі усереднюються за швидкими змінними система і всі крайові умови. В підсумку одержується задача, в якій повільні змінні знаходяться незалежно від швидких. Знайдені умови існування розв'язку крайової задачі в малому околі розв'язку усередненої задачі. Фактор запізнення аргументу важливий для задач екології [9], для коливних систем з інерційними ланками керування [10], в транспортних задачах [11], де запізнення описується лінійно перетвореним аргументом.

1. Постановка задачі. Розглянемо систему з n повільними x і m $(m \geq 1)$ швидкими змінними φ вигляду

$$\frac{dx}{d\tau} = X(\tau, x, x_\lambda, \varphi, \varphi_\theta, \varepsilon),$$

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{\omega(\tau)}{\varepsilon} + Y(\tau, x, x_\lambda, \varphi, \varphi_\theta, \varepsilon), \qquad (1)$$

де $x \in D$ – область в $\mathbb{R}^n$, $\varphi \in \mathbb{R}^m$, малий параметр $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, $\tau = \varepsilon t \in [0, L]$; $\lambda, \theta \in (0, 1)$, $x_\lambda(\tau) = x(\lambda\tau)$, $\varphi_\theta(\tau) = \varphi(\theta\tau)$. Якщо $m \geq 2$, то систему (1) називають багаточастотною [1 – 4].

Задамо крайові умови

$$\int_0^L f(\tau, x, x_\lambda, \varphi, \varphi_\theta, \varepsilon)d\tau = d_1(\varepsilon), \qquad (2)$$

$$\int_0^1 [A_1(\tau, x, x_\lambda, \varepsilon)\varphi + A_2(\tau, x, x_\lambda, \varepsilon)\varphi_\theta +$$

$$+ g(\tau, x, x_\lambda, \varphi, \varphi_\theta, \varepsilon)]d\tau = d_2(\varepsilon), \qquad (3)$$

де f і g – 2π-періодичні функції змінних φ_ν, $\varphi_{\theta\nu}$, $\nu = 1, \ldots, m$; d_1 і d_2 – визначені на $(0, \varepsilon_0]$ функції.

Усереднена задача набуває вигляду

$$\frac{d\overline{x}}{d\tau} = X_0(\tau, \overline{x}, \overline{x}_\lambda, \varepsilon), \tag{4}$$

$$\frac{d\overline{\varphi}}{d\tau} = \frac{\omega(\tau)}{\varepsilon} + Y_0(\tau, \overline{x}, \overline{x}_\lambda, \varepsilon), \tag{5}$$

$$\int_0^L f_0(\tau, \overline{x}, \overline{x}_\lambda, \varepsilon) d\tau = d_1(\varepsilon), \tag{6}$$

$$\int_0^L [A_1(\tau, \overline{x}, \overline{x}_\lambda, \varepsilon)\overline{\varphi} + A_2(\tau, \overline{x}, \overline{x}_\lambda, \varepsilon)\overline{\varphi}_\theta +$$

$$+ g_0(\tau, \overline{x}, \overline{x}_\lambda, \varepsilon)] d\tau = d_2(\varepsilon), \tag{7}$$

де

$$A_0(\tau, x, z, \varepsilon) = \int_0^{2\pi} \ldots \int_0^{2\pi} A(\tau, x, z, u, v, \varepsilon) du_1 \ldots dv_m.$$

Крайова задача (4) – (7) значно простіша порівняно з (1) – (3), оскільки вона звелась до двох окремих задач (4), (6) і (5), (7).

Розглянемо питання про існування розв'язку крайової задачі (1) – (3), а саме: покажемо, що існують такі початкові значення $y(\varepsilon) = \overline{y} + \mu(\xi, \varepsilon)$, $\psi(\varepsilon) = \overline{\psi} + \xi(\varepsilon)$, де $\overline{x}(0, \overline{y}, \varepsilon) = \overline{y}$, $\overline{\varphi}(0, \overline{y}, \overline{\psi}, \varepsilon) = \overline{\psi}$, що розв'язок

$$v(\tau) = [x(\tau, \overline{y} + \mu(\xi, \varepsilon), \overline{\psi} + \xi(\varepsilon), \varepsilon),$$

$$\varphi(\tau, \overline{y} + \mu(\xi, \varepsilon), \overline{\psi} + \xi(\varepsilon), \varepsilon)] \tag{8}$$

системи (1) визначений для $\tau \in [0, L]$, задовольняє крайові умови (2), (3) і лежить у деякому малому околі розв'язку усередненої задачі.

2. Припущення. Нехай $C_z^p(B, a)$ – простір p разів неперервно диференційовних функцій за змінною z в області B і обмежених у цій області разом із похідними сталою a; $\|x\| = |x_1| + \cdots + |x_n|$, $G = [0, L] \times D \times D \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \times (0, \varepsilon_0]$, $G_1 = [0, L] \times D \times D \times (0, \varepsilon_0]$.

Припустимо, що виконуються такі умови.

1^0. Для кожного $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ $A \equiv [X, Y, f, g] \in C^2_{\tau, x, x_\lambda}(G, a_1)$, $\omega \in C^{2m-1}([0, L], a_1)$; $(A_1, A_2) \in C^2_{x, x_\lambda}(G_1, a_2)$.

2^0. Вектор-функція $A(\tau, x, z, u, v, \varepsilon)$ 2π-періодична за змінними u_ν, v_ν, $\nu = 1, \ldots, m$, а її коефіцієнти Фур'є задовольняють умову

$$\sup\|A_0\| + \sup\left\|\frac{\partial A_0}{\partial \tau}\right\| + \sup\left\|\frac{\partial A_0}{\partial x}\right\| + \sup\left\|\frac{\partial A_0}{\partial z}\right\| +$$

$$+ \sum_{\|k+l\|>0} \Big[\|k\| \sup\|A_{kl}\| + \sup\left\|\frac{\partial A_{kl}}{\partial \tau}\right\| +$$

$$+ \sup\left\|\frac{\partial A_{kl}}{\partial x}\right\| + \sup\left\|\frac{\partial A_{kl}}{\partial z}\right\| +$$

$$+ \frac{1}{\|k\| + \|l\|}\Big(\sup\left\|\frac{\partial^2 A_{kl}}{\partial x \partial \tau}\right\| + \sup\left\|\frac{\partial^2 A_{kl}}{\partial z \partial \tau}\right\| +$$

$$+ \sum_{\nu=1}^n \Big(\sup\left\|\frac{\partial^2 A_{kl}}{\partial x \partial z_\nu}\right\| + \sup\left\|\frac{\partial A_{kl}^2}{\partial z \partial x_\nu}\right\|\Big)\Big)\Big] \le a_3,$$

де супремум обчислюється в області G_1.

3^0. Визначник Вронського $V(\tau)$, побудований за системою функцій $\{\omega(\tau), \omega(\theta\tau)\}$, відмінний від нуля, коли $\tau \in [0, L]$.

Умову 3^0 можна замінити слабкішою умовою, запропонованою для систем без запізнення в [4]. Нехай $\omega_\nu \in C^l[0, L]$, $l \ge 2m-1$, і

$$\det(V^T(\tau)V(\tau)) \ne 0, \quad \tau \in [0, L]. \tag{9}$$

4^0. Для кожного $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ існує єдиний розв'язок

$$\overline{v}(\tau) = [\overline{x}(\tau, \overline{y}, \varepsilon), \overline{\varphi}(\tau, \overline{y}, \overline{\psi}, \varepsilon)]$$

крайової задачі (4) – (7), причому траєкторія $\overline{x} = x(\tau, \overline{y}, \varepsilon)$ лежить у D разом із ρ-околом при $\tau \in [0, L]$ і $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$.

3. Крайова задача (5), (7). Існування розв'язку цієї задачі зводиться до знаходження початкового значення $\overline{\psi}(\varepsilon)$. Позначимо

$$Q_1(\varepsilon) = \int_0^L [A_1(\tau, \overline{x}(\tau), \overline{x}_\lambda(\tau), \varepsilon) +$$

$$+ A_2(\tau, \overline{x}(\tau), \overline{x}_\lambda(\tau), \varepsilon)] d\tau.$$

Лема. Нехай виконуються умови 1^0, 2^0 і 4^0 і $\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ матриця $Q_1(\varepsilon)$ невироджена. Тоді існує єдиний розв'язок крайової задачі (5), (7), причому

$$\overline{\psi}(\varepsilon) \le \|Q_1^{-1}(\varepsilon)\|(\|d_2(\varepsilon) + \frac{\sigma}{\varepsilon}), \quad \sigma = 2a_1a_2L^2.$$

Доведення. Оскільки

$$\overline{\varphi}(\tau)=\overline{\psi}+\int\limits_0^\tau\left[\frac{\omega(\tau)}{\varepsilon}+Y_0(s,\overline{x}(s),\overline{x}_\lambda(s),\varepsilon)\right]ds,$$

то після підстановки $\overline{\varphi}(\tau)$ в умову (7) одержимо початкове значення

$$\overline{\psi}(\varepsilon)=Q_1^{-1}(\varepsilon)[d_2(\varepsilon)-$$

$$-\int\limits_0^L[A_1(\tau,\overline{x}(\tau),\overline{x}_\lambda(\tau),\varepsilon)\overline{\varphi}(\tau,\overline{y},0,\varepsilon)+$$

$$+A_2(\tau,\overline{x}(\tau),\overline{x}_\lambda(\tau),\varepsilon)\overline{\varphi}_\theta(\tau,\overline{y},0,\varepsilon)]d\tau].$$

На підставі умови 1^0 одержується оцінка (9) для початкового значення.

4. Теорема про усереднення. Введемо позначення $\overline{M}_1=(\tau,\overline{y},\varepsilon)$, $M_1=(\tau,\overline{y}+\mu,\overline{\psi}+\xi,\varepsilon)$, $\tilde{M}_1=(\tau,\overline{y}+\mu,\varepsilon)$, $M_2=(\tau,x(M_1),x_\lambda(M_1),\varepsilon)$ й аналогічні позначення для $\overline{M}_2$ і $\tilde{M}_2$, $\tilde{x}(\tau)=\overline{x}(\tau,\overline{y}+\mu,\varepsilon)$. Нехай

$$Q_2(\varepsilon)=\int\limits_0^L\left[\frac{\partial f_0(\overline{M}_2)}{\partial x}\frac{\partial\overline{x}(\overline{M}_1)}{\partial\overline{y}}+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial f_0(\overline{M}_2)}{\partial x_\lambda}\frac{\partial\overline{x}_\lambda(\overline{M}_1)}{\partial\overline{y}}\right]d\tau.$$

Теорема. *Нехай: 1) виконуються умови 1^0 – 4^0;*

2) матриці $Q_\nu(\varepsilon)$ невироджені, коли $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$ і

$$\|Q_\nu^{-1}(\varepsilon)\|\le a_4\varepsilon^{-\chi_\nu},\quad \nu=1,2;$$

$$0\le\chi_1+\chi_2\le(4m)^{-1};$$

3) $\|d_1(\varepsilon)\|\le a_1L$, $\|d_2(\varepsilon)\|\le a_5\varepsilon^{-1}$. Тоді для кожного $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$, $0<\varepsilon_0\ll1$, існує розв'язок $v(\tau)$ задачі (1) – (3) і визначена на $(0,\varepsilon_0]$ функція $\xi(\varepsilon)$ така, що

$$\|x(\tau)-\overline{x}(\tau)\|+\|\varphi(\tau)-\overline{\varphi}(\tau)-\xi(\varepsilon)\|\le c_1\varepsilon^\alpha$$

для всіх $\tau\in[0,L]$, $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$,

$$\|\xi(\varepsilon)\|\le c_1^*\varepsilon^{\alpha-\chi_1-1}.$$

Тут $\alpha=(2m)^{-1}-\chi_2$, сталі c_1 і c_1^* не залежать від ε.

Доведення. Із рівняння (5) випливає, що $\forall\overline{y}$, $\overline{y}+\mu\in D$ і $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$

$$\|\overline{x}(\tau,\overline{y}+\mu,\varepsilon)-\overline{x}(\tau,\overline{y},\varepsilon)\|\le\|\mu\|c_2\le0.5\rho_1=\rho_1,$$

якщо $\|\mu\|\le\rho c_2^{-1}$, $c_2=\exp[(1+\lambda^{-1})a_1L]$.

Нехай $\|\mu\|\le c_3\varepsilon^\alpha$ для деякого $c_3>0$. На підставі теореми про обґрунтування методу усереднення [8] для системи (1) з початковими умовами, для кожного $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0(\rho_1)]$, всіх $\tau\in[0,L]$, $\xi\in R^m$

$$\|x(\tau)-\overline{x}(\tau)\|\le\|x(\tau)-\tilde{x}(\tau)\|+\|\tilde{x}(\tau)-\overline{x}(\tau)\|\le$$

$$\le c_4\varepsilon^{1/(2m)}+c_2c_3\varepsilon^\alpha\le c_5\varepsilon^\alpha, c_5=2c_2c_3,\quad(11)$$

якщо $\varepsilon_0\le\min\left(\varepsilon_0(\rho/2),\left(\frac{c_2c_3}{c_4}\right)^{\frac{1}{\chi_1+\chi_2}},\left(\frac{c_1}{c_2c_3}\right)^{\frac12}\right)$.

Покажемо, що для кожних $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$ і $\xi\in R^m$ знайдеться єдине значення $\mu=\mu(\xi,\varepsilon)$ таке, що задовольняється крайова умова (2). На підставі умови 1^0 одержимо

$$\mu=-Q_2^{-1}(\varepsilon)\int\limits_0^L[f_0(M_2)+f(\tilde{M}_2)+P_1(\tau,\mu,\varepsilon)+$$

$$+\sum_{\|k\|+\|l\|>0}f_{kl}(M_2)e^{i(k,\varphi)+i(l,\varphi_\theta)}]d\tau\equiv\Phi_1(\mu,\xi,\varepsilon),$$

де

$$P_1(\tau,\mu,\varepsilon)=f_0(\tilde{M}_2)-f_0(\overline{M}_2)-$$

$$-\frac{\partial f_0}{\partial\overline{x}}(\overline{M}_2)\frac{\partial\overline{x}(\overline{M}_1)}{\partial\overline{y}}-\frac{\partial f_0}{\partial x_\lambda}(\overline{M}_2)\frac{\partial\overline{x}_\lambda}{\partial\overline{y}}(\overline{M}_1).$$

Оскільки $f_0\in C_{x,x_\lambda^2}$, то

$$\|P_1(\tau,\mu,\varepsilon)\|\le\frac12c_6n\|\mu\|^2,$$

де

$$c_6=\sum_{\nu=1}^n\sup_{z\in D\times D\times(0,\varepsilon_0]}\left\|\frac{\partial^2f_0(z,x,x_\lambda,\varepsilon)}{\partial z_\nu\partial z}\right\|,$$

$$z=[x,x_\lambda].$$

Застосуємо оцінку осциляційного інтеграла

$$\left\|\int\limits_0^L g_{kl}(\tau,\varepsilon)\exp\Big(\frac{i}{\varepsilon}\int\limits_0^\tau[(k,\omega(s))+\right.$$

$$+(l,\omega(\theta s)\theta)]ds\Big)d\tau\Big\| \le$$

$$\le c_7\varepsilon^{1/(2m)}\Big(\sup_{G_2}\|g_{kl}\|+\frac{1}{\|k\|+\|l\|}\sup_{G_2}\Big\|\frac{dg_{kl}}{d\tau}\Big\|\Big),$$

$$G_2[0,L]\times(0,\varepsilon_0],$$

де

$$g_{kl}(\tau)=f_{kl}(\tau,x(\tau),x_\lambda(\tau),\varphi(\tau),\varphi_\theta(\tau),\varepsilon)\times$$

$$\times\exp[i(k,\eta(\tau))+i(l,\eta(\theta\tau))],$$

$$\eta=\varphi-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^\tau\omega(s)ds.$$

Одержимо

$$\Big\|\sum_{\|k\|+\|l\|>0}\int_0^L f_{kl}(\tau,x,x_\lambda,\varepsilon)e^{i(k,\varphi)+i(l,\varphi_\theta)}d\tau\Big\|\le$$

$$\le c_7a_3(1+a_3)\varepsilon^{1/(2m)}. \quad (11)$$

Отже,

$$\|\Phi_1\|\le a_4\varepsilon^{-\chi_2}[(2a_1c_4+a_3c_7(1+a_3))\varepsilon^{\frac{1}{2m}}+$$

$$+\frac{1}{2}c_6m\|\mu\|^2]=c_8\varepsilon^{\alpha_1}=\overline{c}_8\varepsilon^{-\chi_2}\|\mu\|^2.$$

Виберемо $c_3=2c_8$ і нехай $4\overline{c}_8c_3\varepsilon_0^\alpha\le 1$. Тоді $\|\Phi_1\|\le 2c_8\varepsilon^{\alpha_1}$ і для всіх $\xi\in R^m$ і $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$ $\Phi_1(\cdot,\xi,\varepsilon)$: $S_1\to S_1$, де S_1 – куля в R^n з радіусом $2c_8\varepsilon^\alpha$.

Покажемо, що Φ_1 є відображенням стиску. Маємо

$$\frac{\partial\Phi_1}{\partial\mu}=-Q_2^{-1}(\varepsilon)\int_0^L\Big[\frac{\partial f(M_2)}{\partial x}\frac{\partial}{\partial\mu}(x-\tilde{x})+$$

$$+\frac{\partial f(M_2)}{\partial x_\lambda}\frac{\partial}{\partial\mu}(x_\lambda-\tilde{x})+\frac{\partial f(M_2)}{\partial\varphi}\frac{\partial}{\partial\mu}(\varphi-\tilde{\varphi})+$$

$$+\frac{\partial f(M_2)}{\partial\varphi_\theta}\frac{\partial}{\partial\mu}(\varphi_\theta-\tilde{\varphi}_\theta)+\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial\tilde{x}}{\partial\mu}+\frac{\partial f}{\partial x_\lambda}\frac{\partial\tilde{x}_\lambda}{\partial\mu}+$$

$$+\frac{\partial f}{\partial\varphi}\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial\mu}+\frac{\partial f}{\partial\varphi_\theta}\frac{\partial\tilde{\varphi}_\theta}{\partial\mu}+\frac{\partial}{\partial\mu}P_1\Big]d\tau.$$

На підставі оцінок похідних усередненої системи за параметром μ та умови 1^0 одержимо

$$\Big\|\frac{\partial}{\partial\mu}P_1\Big\|\le\Big\|\frac{\partial f_0(\tilde{M}_2)}{\partial x}\Big(\frac{\partial\tilde{x}}{\partial\mu}-\frac{\partial\overline{x}}{\partial\mu}\Big)+$$

$$+\Big(\frac{\partial f_0(\tilde{M}_2)}{\partial x}-\frac{\partial f_0(\overline{M}_2)}{\partial x}\Big)\frac{\partial\overline{x}}{\partial\mu}+\frac{\partial f_0(\tilde{M}_2)}{\partial x_\lambda}\times$$

$$\times\Big(\frac{\partial\tilde{x}_\lambda}{\partial\mu}-\frac{\partial\overline{x}}{\partial\mu}\Big)+\Big(\frac{\partial f_0(\tilde{M}_2)}{\partial x_\lambda}-\frac{\partial f_0(\overline{M}_2)}{\partial x_\lambda}\frac{\partial\overline{x}_\lambda}{\partial\mu}\Big\|\le$$

$$\le c_9\|\mu\|.$$

Використаємо оцінку похибки методу усереднення [7, 8]

$$\|v-\tilde{v}\|+\Big\|\frac{\partial}{\partial\mu}(v-\tilde{v})\Big\|+\Big\|\frac{\partial}{\partial\xi}(v-\tilde{v})\Big\|\le c_3\varepsilon^{1/(2m)},$$

$$\tau\in[0,L],\varepsilon\in(0,\varepsilon_0],\|\mu\|\le c_3\varepsilon^{\alpha_1}. \quad (12)$$

Тоді, аналогічно, як одержано нерівність (11), будується наступна оцінка

$$\Big\|\int_0^L\Big(\frac{\partial f^*}{\partial x}\frac{\partial\tilde{x}}{\partial\mu}+\frac{\partial f^*}{\partial x_\lambda}\frac{\partial\tilde{x}_\lambda}{\partial\mu}+\frac{\partial f^*}{\partial\varphi}\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial\mu}+$$

$$+\frac{\partial f^*}{\partial\varphi_\theta}\frac{\partial\tilde{\varphi}_\theta}{\partial\mu}\Big)d\tau\Big\|\le c_{10}\varepsilon^{\frac{1}{2m}},$$

де $f^*(\tau,x,x_\lambda,\varphi,\varphi_\theta,\varepsilon)=f(\tau,x,x_\lambda,\varphi,\varphi_\theta,\varepsilon)-f_0(\tau,x,x_\lambda,\varepsilon)$.

У підсумку одержимо

$$\Big\|\frac{\partial\Phi_1}{\partial\mu}\Big\|\le a_4\varepsilon^{-\chi_2}((a_2c_4+c_{10})\varepsilon^{\chi_2}+c_9)\varepsilon^{\alpha_1}\le\frac{1}{2},$$

якщо $(a_2a_4+c_{10})\varepsilon_0^{\chi_2}\le c_9$ і $\varepsilon_0^{\alpha_1}\le(4a_4c_9)^{-1}$.

Отже, для довільного $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$, всіх $\xi\in R^m$ існує єдине початкове значення $\mu=\mu(\xi,\varepsilon)$ така, що розв'язок системи (1) задовольняє крайову умову (2). З'ясуємо питання про існування значення $\xi\in R^m$ такого, щоб задовольнялася також умова (3).

Із крайових умов (3) і (7) випливає

$$\xi=Q_1^{-1}(\varepsilon)\Big\{\int_0^L[A_1(M_2)(\varphi-\tilde{\varphi})+$$

$$+A_2(M_2)(\varphi_\theta-\tilde\varphi_\theta)]d\tau+$$

$$+\int\limits_0^L[(A_1(M_2)-A_1(\overline{M}_2))\tilde\varphi+(A_2(M_2)-$$

$$-A_2(\overline{M}_2))\tilde\varphi_\theta]d\tau+$$

$$+\int\limits_0^1[A_1(\overline{M}_2)P_2(\tau,\mu,\varepsilon)+A_2(\overline{M}_2)P_3(\tau,\mu,\varepsilon)]d\tau+$$

$$+\int\limits_0^L(g(\tau,x,x_\lambda,\varphi,\varphi_\theta,\varepsilon)-g(\tau,x,x_\lambda,\varepsilon))d\tau+$$

$$\left.+\int\limits_0^L(g_0(\tau,x,x_\lambda,\varepsilon)-g_0(\tau,\overline{x},\overline{x}_\lambda,\varepsilon))d\tau\right\}\equiv$$

$$\equiv Q_1^{-1}(\varepsilon)\sum_{\nu=1}^{5}R_\nu\equiv\Phi_2(\xi,\varepsilon).$$

Із умови 1^0 і нерівності (12) маємо

$$\|R_1\|\le a_2c_4L\varepsilon^{1/(2m)}.$$

Враховуючи оцінку (11) одержимо

$$\|R_5\|\le 2a_1c_5L\varepsilon^\alpha.$$

На підставі умови 1^0 і 3) теореми

$$\|R_2\|\le c_{10}\varepsilon^\alpha\|\xi\|+c_{11}\varepsilon^\alpha.$$

Оскільки

$$P_2(\tau\mu,\varepsilon)=\int\limits_0^\tau[Y_0(s,\tilde x,\tilde x_\lambda,\varepsilon)-Y_0(s,\overline{x},\overline{x}_\lambda,\varepsilon)]ds,$$

аналогічний вигляд має P_3, то

$$\|R_3\|\le c_{12}\varepsilon^\alpha c_{12}=c_2c_3mL^2.$$

Оцінка векторної функції R_4 така ж, як і (11),

$$\|R_4\|\le a_3c_7(1+a_3)\varepsilon^{1/(2m)}.$$

Таким чином, на підставі оцінок R_ν, $\nu\in 1,\dots,5$, одержимо

$$\|\Phi_2(\xi,\varepsilon)\|\le c_{13}\varepsilon^{\alpha-\chi_1}\|\xi\|+c_{14}\varepsilon^{\alpha-\chi_1-1}$$

для всіх $(\xi,\varepsilon)\in R^m\times(0,\varepsilon_0]$. Нехай

$$\|\xi\|\le 2c_{14}\varepsilon^{\alpha-\chi_1-1},\varepsilon_0\le(2c_3)^{1/(\chi_1-\alpha+1)}.$$

Тоді $\forall\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$ Φ_2; $s_2\to S_2$, де S_2 – куля радіуса $2c_{14}\varepsilon^{\alpha-\chi_1-1}$. Оскільки відображення неперервне по ψ, то за теоремою Брауера [12], існує розв'язок $\psi=\psi(\varepsilon)$. Тому існує і розв'язок (8) системи (1), який задовольняє крайові умови (2), (3).

Оскільки

$$\|\tilde\varphi-\overline{\varphi}\|\le\|\xi\|+c_{15}\varepsilon^\alpha, c_{15}=2ma_1a_2\sigma_3nL,$$

то $\|\varphi(\tau)-\overline{\varphi}(\tau)\|\le c_4\varepsilon^{1/2m}+2c_{14}\varepsilon^{\alpha-\chi_1-1}+c_{15}\varepsilon^\alpha$. Отже,

$$\|\varphi(\tau)-\overline{\varphi}(\tau)-\xi\|\le 2c_{15}\varepsilon^\alpha, \qquad (13)$$

якщо $c_4\varepsilon_0^{\chi_1}\le c_{15}$.

Із оцінок (11) і (13) випливає оцінка (10) із сталою $c_1=c_5+c_{15}$. Якщо $\varepsilon_0^\alpha\le\rho/(2c_1)$, то розв'язок $v(\tau)$ системи визначений на проміжку $[0,L]$.

Теорему доведено.

Наслідок. Нехай замість крайової умови (3) задана умова

$$\int\limits_0^L[A_1(\tau,\varepsilon)\varphi+A_2(\tau,\varepsilon)\varphi_\theta]d\tau=d_2(\varepsilon). \qquad (14)$$

Тоді

$$\xi=-Q_1^{-1}(\varepsilon)[\int\limits_0^L(A_1(\tau,\varepsilon)(\varphi-\tilde\varphi)+$$

$$+A_2(\tau,\varepsilon)(\varphi_\theta-\tilde\varphi_\theta)d\tau+\int\limits_0^L(\int\limits_0^\tau(Y_0(s,\tilde x(s),\tilde x_\lambda(s),\varepsilon)-$$

$$-Y_0(s,\overline{x}(s),\overline{x}_\lambda(s),\varepsilon))ds)d\tau$$

і

$$\|\Phi_2(\mu,\xi,\varepsilon)\|\le c_{16}\varepsilon^{\frac{1}{2m}-\chi_1}+c_{17}\varepsilon^{\alpha-\chi_1},$$

де $c_{16}=2a_2c_1c_4L$, $c_{17}=a_1a_4c_1c_1mL^2$.

Якщо $c_{16}\varepsilon_0^{\chi_2}\le c_{17}$, то

$$\|\Phi_2\|\le 2c_{17}\varepsilon^{\alpha-\chi_1}.$$

Нехай $\|\xi\|\le 2c_{17}\varepsilon^{\alpha-\chi_1}$, тоді Φ_2: $S_2\to S_2$ при $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$. Крім того,

$$\frac{\partial\Phi_2}{\partial\xi}=-Q_1^{-1}(\varepsilon)\int\limits_0^L[A_1(\tau,\varepsilon)\frac{\partial}{\partial\xi}(\varphi-\tilde\varphi)+$$

$$+A_2(\tau,\varepsilon)\frac{\partial}{\partial\xi}(\varphi_\theta-\tilde{\varphi}_\theta)]d\tau.$$

Тому

$$\left\|\frac{\partial\Phi_2}{\partial\xi}\right\| \le 2a_2a_4c_3L\varepsilon^{\frac{1}{2m}-\chi_1} \le \frac{1}{2},$$

якщо $\varepsilon_0^{\frac{1}{2m}-\chi_1} \le (4a_2a_4c_3L)^{-1}$. Отже, розв'язок крайової задачі (1), (2), (14) існує і єдиний для кожного $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$ і

$$\|x(\tau)-\overline{x}(\tau)\| + \|\varphi(\tau)-\overline{\varphi}(\tau)-\xi(\varepsilon)\| \le c_1\varepsilon^\alpha,$$

$$\|\xi\| \le \varepsilon^{\alpha-\chi_1}$$

при $\tau \in [0,L]$ і $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. – М.: Наука, 1974. – 504 с.

2.*Гребеников Е.А., Митропольский Ю.А., Рябов Е.А.* Введение в резонансную аналитическую динамику. – М.: Янус-К, 1999. – 301 с.

3. *Хапаев М.М.* Усреднение в теории устойчивости. – М.: Наука, 1986. – 192 с.

4. *Самойленко А.М., Петришин Р.І.* Математичні аспекти теорії нелінійних коливань. – К.: Наукова думка, 2004. – 475 с.

5. *Петришин Р.І., Петришин Я.Р.* Усереднення крайових задач для систем диференціальних рівнянь з повільними та швидкими змінними // Нелінійні коливання. – 1998. – № 1. – С. 51 – 65.

6. *Петришин Р.І., Сопронюк Т.М.* Усереднення крайової задачі з інтегральними крайовими умовами і параметрами для імпульсної багаточастотної системи // Наук. вісн. Чернівецького ун-ту: Зб. наук. пр. Вип. 228. Математика. – Чернівці: Рута, 2004. – С. 96 – 107.

7. *Бігун Я.Й.* Усереднення коливних систем із запізненням та інтегральними крайовими умовами // Укр. мат. журн. – 2004. – **56**, № 2. – С. 257 – 263.

8. *Бигун Я.И., Самойленко А.М.* Обоснование принципа усреднения для многочастотных систем дифференциальных уравнений с запаздыванием // Дифференц. уравнения. – 1999. – **35**, № 1. – С. 8 – 14.

9. *Колесов Ю.С., Швитра Д.П.* Автоколебания в системах с запаздыванием. – Вильнюс: Мокслас, 1979. – 178 с.

10. *Рубаник В.П.* Колебания квазилинейных систем с запаздыванием. – М.: Наука, 1969. – 287 с.

11. *Гребенщиков Б.Г., Ложников А.Б.* Стабилизация системы, содержащей постоянное и линейное запаздывание // Дифференц. уравнения. – 2004. – **40**, № 12. – С. 1587 – 1595.

12. *Хатсон В., Пим Дж.* Приложения функционального анализа и теории операторов. – М.: Мир, 1983. – 432 с.

Стаття надійшла до редколегії 10.10.2005