УДК 519.642

©2005 р. О.М. Яковлева

Південно-Український державний педагогічний університет ім. К.Д. Ушинського

ДО ТЕОРІЇ НЕТЕРА МАТРИЧНИХ НЕСКІНЧЕННИХ СИСТЕМ РІВНЯНЬ ВІНЕРА-ХОПФА ЗІ СТЕПЕНЕВО-РІЗНИЦЕВИМИ ІНДЕКСАМИ

Встановлюються умови нетеровості, дано оцінки числа лінійно незалежних розв'язків однорідних та кількості умов розв'язності неоднорідних нескінченних систем рівнянь Вінера-Хопфа зі степенево різницевими індексами, а також визначаються порядки швидкості спадання їх розв'язків при зростанні індексів.

Conditions of Neter's are established, estimations of number of linearly independent decisions homogeneous and quantities of conditions of resolvability of non-uniform infinite systems of the equations of Wiener - Hopf with sedate - difference indexes are given, and also orders of speed of decrease of their decisions are defined at increase of indexes.

Розглядається нескінченна система рівнянь вигляду

$$\sum_{\nu=0}^{s}\sum_{k=0}^{\infty} a_{n-k}^{(\nu)} k^{\nu}\varphi_k = f_n, \quad n=0, \quad 1,\dots, \tag{1}$$

де $a_n^{(\nu)}$ – відомі сталі матриці розміру m задовольняють умови

$$\left\|a_n^{(\nu)}\right\| \leqslant d_1 |n|^{-r-\alpha-1}, \quad n\neq 0, \tag{2}$$

d_1 – відома стала, яка не залежить від n, а невідомі сталі вектори f_n розміру m задовольняють умову

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left\|n^{-r} f_n\right\|^q < +\infty. \tag{3}$$

r – ціле невід'ємне число; α, q – дійсні числа: $0<\alpha<1$, $1<q\leqslant 2$.

Дослідженню нескінченних систем рівнянь Вінера-Хопфа з різницевими індексами присвячена значна кількість праць. Основні досягнення, що одержано з їх дослідження, можна знайти в працях [1-3]. Основою дослідження нескінченних систем рівнянь Вінера-Хопфа, що розглядалися в працях [1-3], є задача Рімана на одиничному колі $\gamma=\{t\in\mathbb{C} : |t|=1\}$. Дослідження систем рівнянь вигляду (1) здійснюється на основі дослідження еквівалентної їй системи сингулярних інтегральних рівнянь (ССІР) з ядром Коші на γ. Тобто між дослідженнями, що проводилися в працях [1-3], та дослідженнями, що проведені в цій роботі, є принципові відмінності.

Позначимо $\varphi_k^+ = \varphi_k$ при $k\geqslant 0$, $\varphi_k^+=0$ при $k<0$; $f_n^+ = f_n$ при $n\geqslant 0$, $f_n^+=0$ при $n<0$. Оскільки індекси n та k набувають невід'ємних значень, то різниця $n-k$ набуває всі цілі значення, тобто матриці $a_n^{(\nu)}$ визначені для всіх індексів $n=0,\ \pm1,\ \dots$. Позначимо $\varphi_n = \sum\limits_{\nu=0}^{s}\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_{n-k}^{(\nu)} k^{\nu}\varphi_k^+$ при $n<0$ та покладемо $\varphi_n^- = \varphi_n$ при $n<0$, $\varphi_n^-=0$ при $n\geqslant 0$. Тоді в термінах векторів φ_k^+, f_n^+, φ_n^- систему рівнянь (1) можна записати у вигляді

$$\sum_{\nu=0}^{s}\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{n-k}^{(\nu)} k^{\nu}\varphi_k^+ + \varphi_n^- = f_n^+, \qquad n=0,\ \pm1,\dots. \tag{4}$$

Зазначимо, що система рівнянь (4) одночасно розв'язна з системою рівнянь (1), оскільки її визначник розпадається на добуток визначника системи рівнянь (1) та визначника нескінченної одиничної матриці. При цьому розв'язки системи рівнянь (1) визначаються через розв'язки системи рівнянь (4) наступним чином: $\varphi_k = \varphi_k^+, k = 0, 1, \ldots$. Помноживши тепер відповідне рівняння системи (4) на $t^n, t \in \gamma$, та просумувавши одержані рівності за всіма індексами n, одержимо рівність

$$\begin{gathered}\sum_{\nu=0}^{s}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{n-k}^{(\nu)} k^{\nu}\varphi_k^+ t^n + \\ + \sum_{n=-\infty}^{\infty}\varphi_n^- t^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n^+ t^n, \quad t \in \gamma.\end{gathered} \tag{5}$$

Введемо позначення:

$$\begin{gathered} a_\nu(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n^{(\nu)} t^n, \quad \nu = \overline{0,\ s}; \\ f^+(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n^+ t^n, \\ \frac{d^\nu \varphi^+(t)}{ds^\nu} = \sum_{k=0}^{\infty}(ik)^\nu \varphi_k^+ t^k, \quad \nu = \overline{0,\ s}; \\ \varphi^-(t) = -\sum_{n=-\infty}^{-1}\varphi_n^- t^n. \end{gathered} \tag{6}$$

На основі позначень (6) та рівностей

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{n-k}^{(\nu)} k^\nu \varphi_k^+ t^n = (-i)^\nu a_\nu(t)\frac{d^\nu\varphi^+(t)}{ds^\nu},$$

$$\nu = \overline{0,\ s},$$

рівність (5) можна записати у вигляді наступної крайової задачі:

$$\begin{gathered}\sum_{\nu=0}^{s}(-i)^\nu a_\nu(t)\frac{d^\nu\varphi^+(t)}{ds^\nu} - \varphi^-(t) = \\ = f^+(t), \quad t \in \gamma,\end{gathered} \tag{7}$$

де $\varphi^+(t)$ $(\varphi^-(t))$ – крайове значення на γ невідомої вектор-функції (в.ф.) $\varphi^+(z)$ $(\varphi^-(z))$, аналітичної в середині D^+ (зовні D^-) контура γ, а $\dfrac{d^\nu\varphi^+(t)}{ds^\nu}$ означає ν-ту похідну в.ф. $\varphi^+(t)$ по дузі $s \in [0; 2\pi]$ контура γ [4, стор. 346]. Згідно з умовою (2) на основі праці [5, стор. 88] матриці-функції (м.ф.) $a_\nu(t) \in H_\alpha^{(r)}$, $\nu = \overline{0,\ s}$, а в.ф. $f^+(t)$ на підставі праці [5, стор. 210] згідно з умовою (3) належить просторові $L_p^{(r)}$, $p \geqslant 2$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$. Тепер на основі зв'язку між похідними $\dfrac{d^\nu\varphi^+(t)}{ds^\nu}$ по дузі контура γ та похідними $\varphi^{+(\nu)}(t)$ по комплексній змінній $t \in \gamma$ [4, стор. 346] крайову задачу (7) можна записати у вигляді наступної системи сингулярних інтегро-диференціальних рівнянь (ССІДР)

$$\begin{gathered} t^s a_s(t)\varphi^{+(s)}(t) - \varphi^-(t) - \\ -\sum_{\nu=0}^{s-1} A_\nu(t)\varphi^{+(\nu)}(t) = f^+(t), \quad t \in \gamma, \end{gathered} \tag{8}$$

де м.ф. $A_\nu(t) \in H_\alpha^{(r)}$, $\nu = \overline{0,\ s-1}$, та визначаються відомим способом через м.ф. $a_\nu(t)$, $\nu = \overline{0,\ s}$. Згідно з тотожними перетвореннями система рівнянь (1) та ССІДР (8) еквівалентні в тому сенсі, що вони одночасно розв'язні або ні й кожному розв'язку φ (нескінченно вимірний вектор, компонентами якого є невідомі вектори φ_k разміру m) системи рівнянь (1), відповідає один і тільки один розв'язок $\varphi(t) = \varphi^+(t) - \varphi^-(t)$ ССІДР (8) і навпаки. При цьому розв'язки системи рівнянь (1) виражаються через розв'язки ССІДР (8) за формулою

$$\begin{gathered}\varphi_k = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \varphi^+(t) t^{-k-1} dt, \\ k = 0,\ 1,\ \ldots.\end{gathered} \tag{9}$$

Введемо функції:

$$\begin{gathered} P(z,\ \tau) = \frac{(-1)^s}{(s-1)!}[(\tau - z)^{s-1}\ln\left(1 - \frac{z}{\tau}\right) + \\ + \sum_{k=1}^{s-1}\alpha_k \tau^{s-k-1} z^k], \quad z \in D^+, \\ \alpha_k = \sum_{j=0}^{k-1}(-1)^j C_{s-1}^j (k-j)^{-1}, \\ Q(z,\tau) = \frac{1}{\tau - z}, \quad z \in D^-. \end{gathered}$$

Тоді згідно з працею [4, стор. 406] довільну пару в.ф. $\varphi^+(z)$ та $\varphi^-(z)$ розміру m, аналітичних відповідно в областях D^+ и D^-, для яких крайові значення на γ $\varphi^{+(s)}(t)$ та $\varphi^-(t)$

відповідно до в.ф. $\varphi^{+(s)}(z)$ та $\varphi^{-}(z)$, належать простору $L_p^{(r)}$, $p \geqslant 2$, $p^{-1}+q^{-1}=1$, можна зобразити у вигляді

$$\varphi^{+}(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} P(z,\ \tau)\rho(\tau)d\tau + D_0(z),\quad z\in D^{+},$$

$$\varphi^{-}(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} Q(z,\ \tau)\rho(\tau)d\tau,\quad z\in D^{-}, \tag{10}$$

де в.ф. розмірності m $\rho(\tau)\in L_p^{(r)}$, $p\geqslant 2$, $p^{-1}+q^{-1}=1$ і вона визначається однозначно в.ф. $\varphi^{+}(z)$ та $\varphi^{-}(z)$, а в.ф. $D_0(z)$ набуває вигляду

$$D_0(z)=\sum_{k=0}^{s-1}\varphi_k z^k, \tag{11}$$

де φ_k – коефіцієнти Фур'є в.ф. $\varphi^{+}(t)$ [4, стор. 367]. Тепер на підставі зображень (10) дослідження ССІДР (8) зводиться до дослідження наступної ССІР

$$A(t)\rho(t)+\frac{B(t)}{\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{\rho(\tau)}{\tau-t}d\tau+ \int\limits_{\gamma}k(t,\ \tau)\rho(\tau)d\tau=f^{+}(t)+C_0(t),\quad t\in\gamma \tag{12}$$

де

$$A(t)=0,5[t^s a_s(t)+E],\qquad B(t)=0,5[t^s a_s(t)-E], \tag{13}$$

$$K(t,\tau)=\frac{1}{2\pi i}\sum_{\nu=0}^{s-1}A_\nu(t)\frac{\partial^\nu P(t,\tau)}{\partial t^\nu},\qquad C_0(t)=-\sum_{\nu=0}^{s-1}A_\nu(t)D_0^{(\nu)}(t), \tag{14}$$

E – одинична матриця розмірності m, а $\dfrac{\partial^\nu P(t,\tau)}{\partial t^\nu}$ та $D_0^{(\nu)}(t)$ – крайові значення на γ відповідно до функції $\dfrac{\partial^\nu P(z,\tau)}{\partial z^\nu}$ та в.ф. $D_0^{(\nu)}(z)$.

Згідно з працею [6, стор. 406], ССІДР (8) та ССІР (12) еквівалентні лише тоді, коли будуть відомі вектори

$$\psi_k=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\varphi(t)t^{-k-1}dt,\quad k=\overline{0,\ s-1}, \tag{15}$$

де $\varphi(t)$ – розв'язки ССІДР (8), а вектори (15) називаються початковими умовами ССІДР (8). Якщо вектори (15) задано, то ССІДР (8) та ССІР (12) еквівалентні в тому сенсі, що вони одночасно розв'язні або ні й кожному розв'язку $\varphi(t)$ ССІДР (8) відповідає один і тільки один розв'язок $\rho(t)$ ССІР (12) і навпаки. При цьому розв'язки ССІДР (8) виражаються через розв'язки ССІР (12) за формулою

$$\varphi(t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}[P(t,\tau)-Q(t,\tau)]\rho(\tau)d\tau+D_0(t),\quad t\in\gamma, \tag{16}$$

де $P(t,\tau)$, $Q(t,\tau)$ та $D_0(t)$ – крайові значення на γ відповідно до функцій $P(z,\tau)$, $Q(z,\tau)$ та в.ф. $D_0(z)$.

З викладеного вище випливає, що система рівнянь (1) та ССІР (12) будуть еквівалентними лише тоді, коли будуть відомі вектори (5). Не важко показати, що $\psi_k=\varphi_k$, $k=\overline{0,\ s-1}$, де φ_k – розв'язки системи рівнянь (1). Вектори φ_k, $k=\overline{0,\ s-1}$, будемо називати початковими умовами системи рівнянь (1). Таким чином, якщо будуть задані початкові умови φ_k, $k=\overline{0,\ s-1}$, системи рівнянь (1), то вона і ССІР (12) еквівалентні в тому сенсі, що вони одночасно розв'язні або ні й кожному розв'язку φ системи рівнянь (1) відповідає один і тільки один розв'язок $\rho(t)$ ССІР (12) і навпаки. При цьому розв'язки системи рівнянь (1) виражаються через розв'язки ССІР (12) за формулами (16), (9). Тому дослідження системи рівнянь (1) будемо здійснювати на основі дослідження ССІР (12), а систему рівнянь (1) будемо називати нетеровою, якщо є нетеровою ССІР (12) і часткові індекси ССІР (12) будемо називати частковими індексами системи рівнянь (1).

Розглянемо спочатку випадок нульових початкових умов: $\varphi_k = 0$, $k = \overline{0,\ s-1}$. У цьому випадку визначена формулою (11) в.ф. $D_0(z) \equiv 0$. Тоді визначена формулою (14) в.ф. $C_0(t) \equiv 0$, тобто однорідній системі рівнянь (1) відповідає однорідна ССІР (12)

Теорема 1. *Якщо початкові умови нульові й матриці $a_n^{(\nu)}$ задовольняють умови (2), то система рівнянь (1) є нетеровою тоді й тільки тоді, коли виконується умова*

$$\det a_s(t) \neq 0, \quad t \in \gamma. \tag{17}$$

Якщо умова (17) виконана, то часткові індекси системи рівнянь (1) визначаються за формулами $\varkappa_j = \varkappa_j^{(1)} - s$, $j = \overline{1,\ m}$, де $\varkappa_j^{(1)}$, $j = \overline{1,\ m}$, – часткові індекси м.ф. $a_s^{-1}(t)$.

Доведення. Згідно з умовами теореми, система рівнянь (1) та ССІР (12) еквівалентні. Тоді, згідно з працею [2], ССІР (12) є нетеровою тоді й тільки тоді, коли $\det[A(t) + B(t)] = t^s a_s \neq 0$, $\det[A(t) - B(t)] = 1 \neq 0$ на γ. З цього факту випливає умова (17). Якщо умова (17) виконана, то, згідно з працею [2], часткові індекси ССІР (12) дорівнюють відповідним частковим індексам м.ф. $[A(t)+B(t)]^{-1}[A(T)-B(t)] = t^{-s}a_s^{-1}(t)$. Звідси випливають останні твердження теоеми.

Нехай $\varkappa_1 \geqslant \varkappa_2 \geqslant \ldots \geqslant \varkappa_m$ – часткові індекси системи рівнянь (1). Позначимо

$$P = \sum_{\varkappa_j \geqslant 0} \varkappa_j, \quad Q = -\sum_{\varkappa_j < 0} \varkappa_j.$$

Теорема 2. *Нехай початкові умови нульові і матриці $a_n^{(\nu)}$ задовольняють умови (2); виконана умова (17) і вектори f_n задовольняють умову (3). Тоді, якщо $P > 0$, то однорідна система рівнянь (1) має принаймні P лінійно незалежних розв'язків, а неоднорідна система рівнянь (1) буде розв'язною, якщо буде виконано не менше ніж Q умов розв'язності*

$$\int_\gamma f^+(t)\psi_j(t)dt = 0,$$

де $\psi_j(t)$ – лінійно незалежні розв'язки однорідної ССІР союзної ССІР (12).

Доведення цього твердження випливає із еквівалентності системи рівнянь (1) і ССІР (12) та із результатів праці [2] з теорії розв'язності ССІР в їх нормальному випадку.

Теорема 3. *Якщо в умовах теореми 2 система рівнянь (1) розв'язна, то її розв'язки задовольняють умову*

$$\sum_{k=s}^{\infty} \left\| k^{r+s}\varphi_k \right\|^q < +\infty, \quad 1 < q \leqslant 2. \tag{18}$$

Доведення. Згідно з умовами теореми, система рівнянь (1) і ССІР (12) еквівалентні. Згідно з умовою (2), коефіцієнти й регулярне ядро ССІР (12) належить просторові $H_\alpha^{(r)}$, а права частина ССІР в.ф. $f^+(t) \in L_p^{(r)}$, $p \geqslant 2$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$, згідно з умовою (3). Тоді, згідно з працею [2], розв'язок $\rho(t)$ ССІР (12) належить просторові $L_p^{(r)}$, $p \geqslant 2$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$. Отже, на основі представлень (10) в.ф. $\varphi^+(t) \in L_p^{(r+s)}$, $p \geqslant 2$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$. Тоді на основі праці [5], згідно з формулами (16), (9) виконується умова (18).

Зауваження 1. Дослідження системи рівнянь (1) з ненульовими початковими умовами зводиться до дослідження системи рівнянь вигляду (1) з нульовими початковими умовами, але з іншою правою частиною.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гохберг И.Ц., Фельдман А.И.* Уравнения в свертках и проекционные методы их решения.— М.: Наука, 1971.— 352 с.
2. *Пресдорф З.* Некоторые классы сингулярных уравнений.— М.: Мир, 1979.— 493 с.
3. *Гахов Ф.Д., Черский Ю.И.* Уравнения типа свёртки.— М.: Наука, 1978.— 288 с.
4. *Гахов Ф.Д.* Краевые задачи.— М.: Наука, 1977.— 640 с.
5. *Бари Н.К.* Тригонометрические ряды.— М.: ГИФМЛ, 1961.— 936 с.
6. *Мусхелишвили Н.И.* Сингулярные интегральные уравнения.— М.: Наука, 1968.— 511 с.

Стаття надійшла до редколегії 3.02.2005