УДК 517.9

©2005 р. І.Д. Скутар

Чернівецький національний університет ім. Ю. Федьковича, Чернівці

ЗВЕДЕННЯ ОДНІЄЇ СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ІЗ МАЛИМ ПАРАМЕТРОМ ДО ПРОСТІШОГО ВИГЛЯДУ

У статті побудовано асимптотичний розв'язок системи лінійних диференціальних рівнянь з малим параметром при частині похідних і коефіцієнтами, залежними від цього параметра, шляхом зведення цієї системи до простішого вигляду.

The article deals with the construction of asymptotic solution for the system of linear differential equations with a small parameter at a part of derivatives and coefficients, which depend on this parameter, by means of reduction of this system to a simpler form.

У праці [1] розглядалась система диференціальних рівнянь вигляду

$$u' = A(x)u + A_1(x)v, \quad (1)$$

$$\varepsilon v' = (B(x) + \varepsilon B_1(x))v + \varepsilon B_2(x)u, \quad (2)$$

і було побудовано асимптотичний розв'язок шляхом зведення цієї системи до простішої

$$u' = C(\varepsilon)v, \quad (3)$$

$$\varepsilon v' = B(x)v + \varepsilon D(\varepsilon)u, \quad (4)$$

де

$$C(\varepsilon) = \sum_{n=0} \varepsilon^n C_n, \quad D(\varepsilon) = \sum_{n=0} \varepsilon^n D_n, \quad (5)$$

C_n, D_n - постійні матриці спеціального вигляду

$$C(\varepsilon) = \begin{pmatrix} c_n & 0 \end{pmatrix}, \quad D(\varepsilon) = \begin{pmatrix} 0 \\ d_n \end{pmatrix}. \quad (6)$$

В [1] для системи (3), (4) побудовано перетворення, що зводить цю систему до ще простішого вигляду, і знайдено розв'язки. Такий підхід дає змогу узагальнити результати [2].

У даній роботі досліджується запропонована в [1] задача узагальнити одержані результати для системи (1), (2) з коефіцієнтами, залежними від малого параметра ε

$$u' = A(x,\varepsilon)u + A_1(x,\varepsilon)v, \quad (7)$$

$$\varepsilon v' = \varepsilon B_1(x,\varepsilon)u + B(x,\varepsilon)v, \quad (8)$$

де $u \in R^n, v \in R^2, A, A_1, B$ і B_1 - матриці, голоморфні за x, ε в області

$$|x| \le \rho, \quad |\varepsilon| \le \varepsilon_0 \quad (9)$$

і такі, що при $|x| \le \rho$ матриця $B(x,0)$ голоморфно подібна матриці

$$B(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ xa(x) & 0 \end{pmatrix}, \quad a(x) \ne 0, \quad (10)$$

ε - малий параметр. Із (10) випливає, що $det B(x,0) = 0$ при $x = 0$. Як і в [2], вимагатимемо, щоб виконувалась більш жорстка умова, а саме, щоб цей нуль був першого порядку, тобто $\frac{d}{dx}(det B(x,0)) \mid_{x=0} \ne 0$.

Використовуючи регуляризуюче перетворення відомого вигляду [2]

$$v = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & w(x) \end{pmatrix} v^* = T(x)v^*$$

і заміну змінної $t = \alpha(x)$, легко зводимо систему (7), (8) до системи такого ж вигляду з матрицею

$$B(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ x & 0 \end{pmatrix} \quad (11)$$

Можна припускати, що сліди матриць $A(x,\varepsilon)$ і $B(x,\varepsilon)$ - тотожні нулі

$$trA(x,\varepsilon) = trB(x,\varepsilon) \equiv 0. \quad (12)$$

Побудуємо перетворення, що зводить систему (7), (8) до більш простого вигляду (3), (4). Це перетворення шукаємо за допомогою заміни (u, v) системи (7), (8) на нові змінні (u, v) системи (3), (4) з матрицею заміни

$$\varPhi(x,\varepsilon) =$$
$$= \begin{pmatrix} U(x)+\sum\limits_{n=1}\varepsilon^n U_n(x) & \sum\limits_{n=1}\varepsilon^n V_{n1}(x) \\ \sum\limits_{n=1}\varepsilon^n U_{n1}(x) & V(x)+\sum\limits_{n=1}\varepsilon^n V_n(x) \end{pmatrix}. \quad (13)$$

Для матриці $\varPhi = \varPhi(x, \varepsilon)$ отримуємо матричне рівняння

$$\varepsilon\varPhi' + \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon C(\varepsilon) \\ \varepsilon D(\varepsilon) & B(x) \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} \varepsilon A(x,\varepsilon) & \varepsilon A_1(x,\varepsilon) \\ \varepsilon B_1(x,\varepsilon) & B(x,\varepsilon) \end{pmatrix} \varPhi. \quad (14)$$

Із (13), (14), а також із голоморфності матриць $A(x, \varepsilon), A_1(x, \varepsilon), B_1(x, \varepsilon)$ і $B(x, \varepsilon)$ отримуємо систему рівнянь для матриці $\varPhi$:

$$U' + \sum_{n=1}\varepsilon^n U_n' + \sum_{n=1}\varepsilon^n V_{n1} D(\varepsilon) =$$
$$= \sum_{n=0}\varepsilon^n A_{0n} U + \sum_{n=0}\varepsilon^n A_{0n} \sum_{n=1}\varepsilon^n U_n +$$
$$+ \sum_{n=0}\varepsilon^n A_{1n} \sum_{n=1}\varepsilon^n U_{n1}, \quad (15)$$

$$\sum_{n=1}\varepsilon^n V_{n1}' + UC(\varepsilon) + \sum_{n=1}\varepsilon^n U_n C(\varepsilon) +$$
$$+ \sum_{n=1}\varepsilon^{n-1} V_{n1}(B + \sum_{n=1}\varepsilon^n B_{0n}) =$$
$$= \sum_{n=0}\varepsilon^n A_{0n} \sum_{n=1}\varepsilon^n V_{n1} + \sum_{n=0}\varepsilon^n A_{1n} V +$$
$$+ \sum_{n=0}\varepsilon^n A_{1n} \sum_{n=1}\varepsilon^n V_n, \quad (16)$$

$$\sum_{n=1}\varepsilon^n U_{n1}' + VD(\varepsilon) + \sum_{n=1}\varepsilon^n V_n D(\varepsilon) =$$
$$= \sum_{n=0}\varepsilon^n B_{1n} U + \sum_{n=0}\varepsilon^n B_{1n} \sum_{n=1}\varepsilon^n U_n +$$
$$+(B + \sum_{n=1}\varepsilon^n B_{0n}) \sum_{n=1}\varepsilon^{n-1} U_{n1}, \quad (17)$$

$$\varepsilon V' + \varepsilon \sum_{n=1}\varepsilon^n V_n' + \varepsilon \sum_{n=1}\varepsilon^n U_{n1} C(\varepsilon) +$$
$$+VB + \sum_{n=1}\varepsilon^n V_n B =$$
$$= \varepsilon \sum_{n=0}\varepsilon^n B_{1n} \sum_{n=1}\varepsilon^n V_{n1} +$$
$$+(B+\sum_{n=1}\varepsilon^n B_{0n})V + (B+\sum_{n=1}\varepsilon^n B_{0n}) \sum_{n=1}\varepsilon^n V_n. \quad (18)$$

Прирівнюючи коефіцієнти при нульовому степені ε, із (5), (15)-(18) одержимо рівняння

$$U' = A_{00} U, \quad (19)$$
$$UC_0 + V_{11} B = A_{10} V, \quad (20)$$
$$VD_0 = B_{10} U + BU_{11}, \quad (21)$$
$$VB = BV. \quad (22)$$

Із першого та останнього рівнянь отримуємо

$$U(x) = \varOmega_0^x(A_{00}),$$
$$V(x) = \alpha_0(x) I + \beta_0(x) B(x), \quad (23)$$

де $\varOmega_0^x(A_{00})$ - матрицант рівняння (19), $\alpha_0(x), \beta_0(x)$ - довільні голоморфні в області (9) функції, I - одинична матриця [2].

Як і в [1], для визначення функцій $\alpha_0(x)$ і $\beta_0(x)$ використаємо систему рівнянь, що одержується з (5), (15)-(18), прирівнюючи в ній коефіцієнти при першому степені параметра ε:

$$U_1' + V_{11} D_0 = A_{01} U + A_{00} U_1 + A_{10} U_{11}, \quad (24)$$
$$V_{11}' + UC_1 + U_1 C_0 + V_{21} B =$$
$$= A_{00} V_{11} + A_{11} V + A_{10} V_1, \quad (25)$$
$$U_{11}' + VD_1 + V_1 D_0 =$$
$$= B_{11} U + B_{10} U_1 + BU_{21} + B_{01} U_{11}, \quad (26)$$
$$V' + V_1 B = B_{01} V + BV_1. \quad (27)$$

Підставляємо вираз (23) у (27) та отримаємо:

$$\alpha_0'(x) I + \beta_0'(x) B(x) + \beta_0(x) B'(x) + V_1 B(x) =$$
$$= B_{01}(\alpha_0(x) I + \beta_0(x) B(x)) + B(x) V_1. \quad (28)$$

для розв'язності рівняння (28), згідно з [2], необхідно й досить, щоб виконувалися наступні умови:

$$tr(V'(x) - B_{01}(x)V(x)) \equiv 0. \tag{29}$$

$$tr((V'(x) - B_{01}(x)V(x))B(x)) \equiv 0. \tag{30}$$

З (29), (30) і (12) одержуємо систему рівнянь для функцій $\alpha_0(x)$ і $\beta_0(x)$ вигляду

$$2\alpha_0' = b_1(x)\beta_0, \quad 2x\beta_0' + \beta_0 = b_1(x)\alpha_0. \tag{31}$$

де

$$b_1(x) = tr(B_{01}(x)B(x)). \tag{32}$$

Згідно з теорією регулярних особливих точок лінійних диференціальних рівнянь [3], система (31) має ненульові голоморфні в області (9) розв'язки, які залежать від значення $\alpha_0(0)$. Покладемо $\alpha_0(0) = 1$ і визначимо однозначно потрібний нам розв'язок системи рівнянь (31), (32):

$$\alpha_0 = \alpha_0(x), \quad \beta_0 = \beta_0(x). \tag{33}$$

Підставляючи значення (23), (33) в рівняння (20), (21) системи рівнянь (19)-(22) для визначення матриць $C_0, D_0, V_{11}(x)$ і U_{11}, отримуємо повністю визначені рівняння:

$$U(x)C_0 + V_{11}B(x) = A_{10}(x)V(x), \tag{34}$$

$$V(x)D_0 = B_{10}(x)U(x) + B(x)U_{11}. \tag{35}$$

З (34) після його домноження на $B(x)$ справа матимемо рівняння

$$U(x)C_0B(x) + xV_{11} = A_{10}(x)V(x)B(x). \tag{36}$$

При $x = 0$ з (36) отримуємо рівняння для визначення матриці C_0:

$$C_0B(0) = A_{10}(0)V(0)B(0), \tag{37}$$

з якого випливає, що якщо записати відповідні матриці в (37) покоординатно

$$C(0) = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ ... & ... \\ c_{p1} & c_{p2} \end{pmatrix},$$

$$A_{10}(0)V(0) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ ... & ... \\ a_{p1} & a_{p2} \end{pmatrix},$$

то значення

$$c_{11} = a_{11}, \quad ..., \quad c_{p1} = a_{p1},$$

$$c_{12} = 0, \quad ..., \quad c_{p2} = 0$$

завжди задовольняють рівняння (37). Таким чином, вибравши C_0 у вигляді

$$C_0 = \begin{pmatrix} c_0 & 0 \end{pmatrix}, \quad c_0 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ ... \\ a_{p1} \end{pmatrix}, \tag{38}$$

для визначення матриці V_{11} отримуємо цілком визначене рівняння вигляду

$$xV_{11} = F(x), \tag{39}$$

де $F(x)$ - відома матриця. Оскільки, згідно з вибором C_0, маємо $F(0) = 0$, то

$$F(x) = \int_0^1 \frac{d}{dt}F(tx)dt = x\int_0^1 F'(tx)dt, \tag{40}$$

де через F' позначено похідну функції $F(x)$ за x.

З урахуванням (39), (40) для V_{11} знаходимо значення

$$V_{11}(x) = \int_0^1 F'(tx)dt, \tag{41}$$

яке визначає голоморфний в області (9) розв'язок рівняння (39).

З (35) після його домноження зліва на $B(x)$ отримуємо рівняння

$$B(x)V(x)D_0 = xU_{11} + B(x)B_{10}(x)U(x). \tag{42}$$

При $x = 0$ з (36) отримуємо рівняння для визначення матриці D_0:

$$B(0)V(0)D_0 = B(0)B_{10}(0)U(0), \tag{43}$$

з якого випливає наступне: якщо записати відповідні матриці в (43) покоординатно

$$D(0) = \begin{pmatrix} d_{11} & ... & d_{1p} \\ d_{21} & ... & d_{2p} \end{pmatrix},$$

$$B_{10}(0)U(0) = \begin{pmatrix} b_{11} & ... & b_{1p} \\ b_{12} & ... & b_{2p} \end{pmatrix},$$

то значення

$$d_{21} = b_{21}, \quad ..., \quad d_{2p} = b_{2p},$$

$$d_{11} = 0, \quad ..., \quad d_{1p} = 0$$

завжди задовольняють рівняння (43). Таким чином, вибравши D_0 у вигляді

$$D_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ d_0 \end{pmatrix}, \quad d_0 = \begin{pmatrix} b_{21} & ... & b_{2p} \end{pmatrix}, \quad (44)$$

для визначення матриці U_{11} отримуємо цілком визначене рівняння вигляду

$$xU_{11} = G(x), \qquad (45)$$

де $G(x)$ - відома матриця. Оскільки, згідно з вибором D_0 маємо $G(0) = 0$, то

$$G(x) = x\int\limits_0^1 G'(tx)dt. \qquad (46)$$

З урахуванням (45), (46) для U_{11} знаходимо значення

$$U_{11}(x) = \int\limits_0^1 G'(tx)dt, \qquad (47)$$

яке визначає голоморфний в області (9) розв'язок рівняння (45). Безпосередньою перевіркою переконуємось, що знайдені із рівнянь (36) і (42) матриці $C_0, D_0, V_{11}(x)$ і $U_{11}(x)$ є розв'язками рівнянь (34), (35). Таким чином, знайдено перші доданки розкладів (11), (13). Для знаходження других доданків цих розкладів ми маємо систему (24)-(27).

З рівняння (24) цієї системи, вимагаючи додатково виконання умови $U_1(0) = 0$, знаходимо матрицю $U_1(x)$ у вигляді

$$U_1(x) = \int\limits_0^x \Omega_\tau^x(A_{00})[A_{01}(t)U(t)+$$

$$+A_{10}(t)U_{11}(t) - V_{11}(t)D_0]dt.$$

Розглянемо тепер рівняння (27). З урахуванням умов (29), (30) рівняння (27) набуде вигляду

$$V_1B(x) = B(x)V_1 + F_1(x), \qquad (48)$$

де $F_1(x)$ - відома матриця, що задовольняє умови

$$trF_1(x) = tr(F_1(x)B(x)) \equiv 0, \qquad (49)$$

Із (49) випливає, що $F_1(x)$ має вигляд матриці

$$F_1(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) & g_1(x) \\ -xg_1(x) & -f_1(x) \end{pmatrix}, \qquad (50)$$

де $f_1(x), g_1(x)$ - відомі голоморфні в області (9) функції.

З урахуванням (50) загальний розв'язок рівняння (48) визначається формулою

$$V_1(x) = \alpha_1(x)I + \beta_1(x)B(x) + W_1(x), \quad (51)$$

$$W_1(x) = \begin{pmatrix} g_1(x) & 0 \\ -f_1(x) & 0 \end{pmatrix},$$

де $\alpha_1(x), \beta_1(x)$ - довільні голоморфні в області (9) функції.

Як і у випадку з визначенням функцій $\alpha_0(x), \beta_0(x)$, для визначення $\alpha_1(x), \beta_1(x)$ необхідно записати систему рівнянь, яку отримуємо із (5), (15)-(18) прирівнюючи в ній коефіцієнти при другому степені параметра ε:

$$U_2' + (V_{11}D_1 + V_{21}D_0) =$$

$$= A_{00}U_2 + A_{10}U_{21} + A_{11}U_{11} + A_{01}U_1 + A_{02}U,$$

$$V_{21}' + UC_2 + (U_2C_0 + U_1C_1) + V_{31}B =$$

$$= A_{00}V_{21} + A_{01}V_{11} + A_{12}V + A_{10}V_2 + A_{11}V_1,$$

$$U_{21}' + VD_2 + (V_2D_0 + V_1D_1) =$$

$$= B_{12}U+B_{10}U_2+B_{11}U_1+BU_{31}+B_{01}U_{21}+B_{02}U_{11},$$

$$V_1'+U_{11}C_0+V_2B = B_{10}V_{11}+B_{02}V+BV_2+B_{01}V_1,$$

і розглянути останнє із цих рівнянь, що містить похідну V_1.

Рівняння, що розглядатиметься, матиме вигляд

$$V_1' + V_2B = BV_2 + B_{01}V_1 + F_2, \qquad (52)$$

де $F_2(x)$ - відома матриця

$$F_2(x) = B_{10}(x)V_{11} + B_{02}(x)V - U_{11}(x)C_0,$$

Умови для розв'язності рівняння (52) наступні:

$$trV_1'(x) = tr(B_{01}(x)V_1(x)) + trF_2(x), \quad (53)$$

$$tr(V_1'(x)B(x)) =$$

$$= tr(B_{01}(x)V_1(x)B(x)) + tr(F_2(x)B(x)), \quad (54)$$

З (53), (54) із урахуванням формул (12) і (51) одержуємо систему рівнянь для функцій $\alpha_1 = \alpha_1(x)$ і $\beta_1 = \beta_1(x)$ вигляду

$$2\alpha_1' = b_1(x)\beta_1 + f^*(x), \quad (55)$$

$$2x\beta_1' + \beta_1 = b_1(x)\alpha_1 + g^*(x). \quad (56)$$

З [2] відомо, що система (55), (56) має ненульові голоморфні в області (9) розв'язки, які залежать від значення $\alpha_1(0)$. Покладемо $\alpha_1(0) = 0$ і визначимо однозначно потрібний нам розв'язок системи рівнянь (55), (56):

$$\alpha_1 = \alpha_1(x), \quad \beta_1 = \beta_1(x). \quad (57)$$

Підставивши тепер значення (57) в рівняння (51) ми однозначно визначимо розв'язок рівняння (27), голоморфний в області (9). Для розв'язання інших рівнянь системи (24)-(27) підставимо в них знайдені значення матриць $C_0, D_0, V(x), U(x), V_1(x), U_1(x), V_{11}(x), U_{11}(x)$ і отримаємо рівняння:

$$U(x)C_1 + V_{21}B(x) = F_1(x), \quad (58)$$

$$V(x)D_1 = B(x)U_{21} + G_1(x), \quad (59)$$

де $F_1(x)$ і $G_1(x)$ - відомі матриці, голоморфні в області (5).

Рівняння (58), (59) мають вигляд рівнянь (34), (35) і тому розв'язуються таким же методом, що й рівняння (34), (35). Це дає можливість однозначно визначити матриці C_1 і D_1 аналогічно матрицям C_0 і D_0 вигляду (6), а також однозначно визначити матриці $V_{21} = V_{21}(x)$ і $U_{21} = U_{21}(x)$ аналогічно матрицям $V_{11}(x)$ і $U_{11}(x)$ вигляду і голоморфні в області (9). Таким чином, ми завершуємо процес побудови других доданків розкладів (5), (13).

Для побудови наступних доданків розкладів (5), (13) застосуємо метод повної математичної індукції. З цією метою запишемо рівняння, що отримуються із (5), (15)-(18), прирівнюючи в ній коефіцієнти при n-ому $(n \geq 2)$ спепені параметра ε:

$$U_n' + \sum_{k=1}^{n} V_{k1}D_{n-k} =$$

$$= A_{00}U_n + A_{10}U_{n1} + A_{0n}U +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n-1} A_{0k}U_{n-k} + \sum_{k=1}^{n-1} A_{1k}U_{(n-k)1}, \quad (60)$$

$$V_{n1}' + UC_n + \sum_{k=1}^{n} U_kC_{n-k} + V_{(n+1)1}B =$$

$$= A_{00}V_{n1} + A_{10}V_n + A_{1n}V + \sum_{k=1}^{n-1} A_{0k}V_{(n-k)1} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n-1} A_{1k}V_{n-k} - \sum_{k=1}^{n} V_{k1}B_{0(n-k+1)}, \quad (61)$$

$$U_{n1}' + VD_n + \sum_{k=1}^{n} V_kD_{n-k} =$$

$$= B_{10}U_n + B_{01}U_{n1} + BU_{(n+1)1} + B_{1n}U +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n-1} B_{1k}U_{n-k} + \sum_{k=1}^{n-1} B_{0k}U_{(n-k+1)1}, \quad (62)$$

$$V_n' + \sum_{k=1}^{n-1} U_{k1}C_{n-(k+1)} + V_nB =$$

$$= BV_n + B_{10}V_{(n-1)1} + B_{01}V_{n-1} + B_{0n}V +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n-2} B_{1k}V_{(n-(k+1))1} + \sum_{k=2}^{n-1} B_{0k}V_{n-k}. \quad (63)$$

Як видно із викладеного вище, при застосуванні математичної індукції ми на нульовому кроці визначили матриці U, V, C_0, D_0, U_{11} і V_{11}, на першому кроці - матриці $U_1, V_1, C_1, D_1, U_{21}$ і V_{21}. Тому, припускаючи, що математична індукція здійснена до (n-1)-го кроку включно, вважатимемо визначеними на (n-1)-му кроці матриці $U_{n-1}, V_{n-1}, C_{n-1}, D_{n-1}, U_{n1}$ і V_{n1}. При цьому V_{n-1} визначено із умов розв'язності рівняння (63).

Із рівняння (60) однозначно визначаємо U_n у вигляді

$$U_n(x) = \int_0^x \Omega_\tau^x(A_{00})[Z(t) - \sum_{k=1}^{n} V_{k1}D_{n-k}]dt,$$

де $Z(t)$ - відома матриця.

З рівняння (63) визначаємо V_n у вигляді

$$V_n(x) = \alpha_n(x)I + \beta_n(x)B(x) + W_n(x), \quad (64)$$

де $\alpha_n(x), \beta_n(x)$ - довільні скалярні, $W_n(x)$ - відомі матричні функції, голоморфні в області (9). Для знаходження $\alpha_n(x), \beta_n(x)$ необхідно розглянути систему рівнянь, отриману із (60)-(63) заміною в ній індексу n на (n+1). Останнє рівняння такої системи матиме вигляд

$$\alpha_n'(x)I + \beta_n'(x)B(x) + \beta_n(x)B'(x) +$$
$$+\sum_{k=1}^{n} U_{k1}C_{n-k} + V_{n+1}B =$$
$$= BV_{n+1} + B_{10}V_{n1} + R(x) +$$
$$+B_{01}(\alpha_n(x)I + \beta_n(x)B(x) + W_n(x)), \quad (65)$$

де $R(x)$ - відома матрична функція

$$R(x) = B_{0(n+1)}V +$$
$$+\sum_{k=1}^{n-1} B_{1k}V_{(n-k)1} + \sum_{k=2}^{n} B_{0k}V_{n+1-k}.$$

Умови розв'язності рівняння (65) визначають систему диференціальних рівнянь для знаходження функцій $\alpha_n(x)$ і $\beta_n(x)$.

$$2\alpha_n' = b_1(x)\beta_n + f_n(x), \quad (66)$$

$$2x\beta_n' + \beta_n = b_1(x)\alpha_n + g_n(x), \quad (67)$$

де $f_n(x), g_n(x)$ - відомі функції

$$f_n(x) = tr(B_{10}(x)V_{n1}(x) + B_{01}(x)W_n(x) +$$
$$+R(x) - \sum_{k=1}^{n} U_{k1}(x)C_{n-k}),$$
$$g_n(x) = tr(B_{10}(x)V_{n1}(x)B(x) +$$
$$+B_{01}(x)W_n(x)B(x) + R(x)B(x) -$$
$$-\sum_{k=1}^{n} U_{k1}(x)C_{n-k}B(x)),$$

голоморфні в області (9). Припускаючи додатково $\alpha_n(0) = 0$, визначаємо із (66), (67) однозначно функції $\alpha_n(x), \beta_n(x)$ як голоморфні в області (9) розв'язки системи (66), (67). Підставляючи знайдені значення $\alpha_n(x)$ і $\beta_n(x)$ у формулу (64), ми однозначно визначаємо голоморфний в області (9) розв'язок рівняння (63).

Розглянемо рівняння системи (60)-(63), що залишилися. Підставимо в (61), (62) визначені вище вирази для матриць $U_n(x), V_n(x)$. У результаті рівняння (61), (62) матимуть вигляд рівнянь:

$$U(x)C_n + V_{(n+1)1}B(x) = F_n(x), \quad (68)$$

$$V(x)D_n = B(x)U_{(n+1)1} + G_n(x), \quad (69)$$

де $F_n(x), G_n(x)$, - відомі матриці, голоморфні в області (9). Рівняння (68), (69) мають вигляд рівнянь (34), (35) і розв'язуються аналогічно. Це дає нам однозначні значення для C_n і D_n вигляду (38) і (44)

$$C_n = \begin{pmatrix} c_n & 0 \end{pmatrix}, \quad D_n = \begin{pmatrix} 0 \\ d_n \end{pmatrix}$$

і значення для матриць $U_{(n+1)1}(x)$ і $V_{(n+1)1}(x)$ вигляду (58) і (64).

Отже, знайдено розв'язки рівнянь (60)-(63) і матриці C_n, D_n. Таким чином, обгрунтовано запропонований вище метод побудови всіх доданків розкладів (5), (13) голоморфних в області (9) і можна сформулювати наступну теорему.

Теорема. *Нехай праві частини системи лінійних диференціальних рівнянь із малим параметром (7), (8) голоморфні в області (9) і такі, що при* $|x| \le \rho$ *матриця* $B(x, 0)$ *голоморфно подібна матриці (10). Тоді, використовуючи формальні перетворення, можна звести систему (7), (8) до вигляду (3), (4).*

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Самойленко А.М.* Об асимптотическом интегрировании одной системы дифференциальных уравнением с малым параметром при части производных // Укр. мат. журн.— 2002.— **54**, № 11.— С.1505—1516.

2. *Вазов В.* Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений.— М: Мир, 1968.— 464 с.

3. *Гантмахер Ф.Н.* Теория матриц.— М.: Наука, 1988.— 552 с.

Стаття надійшла до редколегії 11.02.2005