УДК.517.5

©2005 р. О.Б. Скасків, Я.З. Стасюк

Львівський національний університет ім. Івана Франка, Львів

ПРО ПОХІДНІ РЯДІВ ДІРІХЛЕ

Для абсолютно збіжного в півплощині $\{z : \operatorname{Re} z < 0\}$ ряду Діріхле $F(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{z\lambda_n}$, $\lambda_n \in \mathbb{R}_+$, доведено, що умова $|x|L(x,F) \to +\infty$ $(x \to -0)$ достатня для справедливості для кожного $k \in \mathbb{N}$ при $x \to -0$ зовні деякої множини нульової лінійної щільності в точці $x = 0$ і для всіх z, $\operatorname{Re} z = x$ таких, що $|F(z)| = (1 + o(1))M(x,F)$ $(x \to -0)$, співвідношення

$$F^{(k)}(z) = (1 + o(1))L^k(x,F)F(z),$$

де $M(x,F) = \sup\{|F(x+iy)| : y \in \mathbb{R}\}$, $L(x,F) = (\ln M(x,F))'_+$ — права похідна.

For absolutely convergent in the half-plane $\{z : \operatorname{Re} z < 0\}$ Dirichlet series $F(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{z\lambda_n}$, $\lambda_n \in \mathbb{R}_+$, it is proved that the condition $|x|L(x,F) \to +\infty$ $(x \to -0)$ is sufficient for the relation

$$F^{(k)}(z) = (1 + o(1))L^k(x,F)F(z)$$

to hold as $x \to -0$ outside a certain set of zero linear density in the point $x = 0$ for every $k \in \mathbb{N}$ and for all z such that $\operatorname{Re} z = x$ and $|F(z)| = (1 + o(1))M(x,F)$ $(x \to -0)$, where $M(x,F) = \sup\{|F(x+iy)| : y \in \mathbb{R}\}$ and $L(x,F) = (\ln M(x,F))'_+$ is the derivative from the right.

1. Вступ. Нехай $D_b(\lambda)$ — клас абсолютно збіжних в $\{z : \operatorname{Re} z < b\}$ рядів вигляду

$$F(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{z\lambda_n}, \qquad (1)$$

де $\lambda = (\lambda_n)$, $0 = \lambda_0 < \lambda_n \uparrow +\infty$ $(1 \le n \to +\infty)$, $-\infty < b \le +\infty$.

Для $-\infty \le a < b \le +\infty$ через $S(a,b)$ позначимо клас аналітичних в $\{z : a < \operatorname{Re} z < b\}$ функцій F таких, що для кожного $x \in (a,b)$ функція F обмежена в смузі $\{z : a < \operatorname{Re} z < x\}$. Зауважимо, що $D_b(\lambda) \subset S(-\infty,b) \subset S(a,b)$ для всіх $-\infty \le a < b \le +\infty$. Для $x \in (a,b)$ і $F \in S(a,b)$ позначимо

$$M(x,F) = \sup\{|F(x+iy)| : y \in \mathbb{R}\}.$$

Відомо ([1, с.145, с.266]), що функція $\ln M(x,F)$ — опукла на (a,b) для $F \in S(a,b)$ і, отже, для всіх $x \in (a,b)$ існує неспадна права похідна

$$L(x) = L(x,F) = (\ln M(x,F))'_+.$$

Для функцій $F \in S(0,+\infty)$ таких, що $L(x,F) \to +\infty$ $(x \to +\infty)$, з доведеного в [1] (с. 149, теорема 1.3.17) випливає, що співвідношення

$$F'(z) = (1 + o(1))L(x,F)F(z) \qquad (2)$$

є правильним при $x \to +\infty$ зовні деякої множини E скінченної міри для всіх z таких, що $\operatorname{Re} z = x$ і

$$|F(z)| = (1 + o(1))M(x,F) \qquad (3)$$

при $x \to +\infty$. У [2] це твердження доповнено в частині описання виняткової множини E. При цьому в [2] відповідне твердження (теорема 3) доведене для класу $D_{+\infty}(\lambda)$. Аналіз доведення теореми 3 [2] показує, що воно залишається правильним і у випадку класу $S(a,+\infty)$ для функцій F таких, що $L(x,F) \to +\infty$ $(x \to +\infty)$.

У випадку класу $S(0,1)$ для функцій F таких, що $(1-x)L(x,F) \to +\infty$ $(x \to 1-0)$, міркуючи подібно до доведення теореми 2.2.25 [1, с. 274], можна довести, що у випадку, коли

$$\varliminf_{x\to1-0}\frac{\ln L(x,F)}{-\ln(1-x)}>1, \tag{4}$$

співвідношення (2) виконується при $x\to1-0$ зовні деякої множини E скінченної логарифмічної міри на $(0,1)$, тобто $\int_{E\cap(0,1)}\frac{dx}{1-x}<+\infty$, для всіх z, $\operatorname{Re}z=x$ таких, що виконується (3). В [1] також доведено аналоги останнього твердження у випадку, коли умову (4) замінено деякою слабшою умовою. При цьому про виняткову множину E відомо лише, по суті, що множина $(0,1)\setminus E$ містить збіжну до 1 послідовність; власне, якщо $\overline{\lim}_{x\to1-0}\frac{\ln L(x,F)}{-\ln(1-x)}>1$, то $(0,1)\setminus E$ має нескінченну логарифмічну міру.

У цій статті подамо інший варіант такого твердження у класі функцій з $S(0,1)$, що задовольняють деяку універсальну умову $L(x,F)\geq\Phi(x)$ $(x_0\leq x<1)$ із зростаючою функцією Φ такою, що

$$(1-x)\Phi(x)\to+\infty\quad(x\to1-0),$$

використовуючи для описання виняткової множини E у співвідношенні (2) щільності множини в точці $x=1$. Схема доведення така ж, як в [1, 2], і полягає в комбінованому використанні леми Шварца для аналітичної функції в крузі, модифікованої нерівності Коші для степеневого ряду та варіанта леми Бореля-Неванлінни в запропонованому в [2, 3] вигляді. Наприкінці статті подамо застосування отриманого твердження до класу $D_0(\lambda)$.

Зазначимо, що нам зручніше замість класу $S(0,1)$ розглянути клас $S(-1,0)$, а також, що з огляду на лінійну заміну змінних $z_1=b+z(b-a)$, це є рівносильним до розгляду класу $S(a,b)$ з $-\infty<a<b<+\infty$.

Доведемо наступну теорему.

Теорема 1. *Нехай $F\in S(-1,0)$ — така, що*

$$L(x,F)\geq\Phi(x)\quad(x_0\leq x<0), \tag{5}$$

де Φ — додатна неперервна зростаюча до $+\infty$ на $[-1,0)$ функція така, що

$$|x|\Phi(x)\to+\infty\quad(x\to-0). \tag{6}$$

Тоді співвідношення (2) виконується при $x\to-0$ $(x\in(-1,0)\setminus E)$ для всіх z, $\operatorname{Re}z=x$ таких, що виконується (3), при цьому для кожної додатної неспадної на $(-1,0)$ функції h такої, що

$$h\left(x+o\left(\frac{1}{h(x)}\right)\right)=O(h(x)),$$
$$h(x)=o(\Phi(x))\quad(x\to-0), \tag{7}$$

множина E має нульову $h-$щільність у точці $x=0$, тобто

$$D_hE=\overline{\lim_{x\to-0}}\,h(x)\operatorname{meas}(E\cap[x,0])=0,$$

де $\operatorname{meas}E_1$ означає міру Лебега вимірної множини E_1 на $(-1,0)$.

2. Допоміжні твердження. Доведення теореми 1 розіб'ємо на два етапи. Спочатку доведемо, що за умов (5) і (6) зовні множини

$$E=\{x\in(-1,0)\colon|L(x\pm\delta(x)/L(x))-$$
$$-L(x)|\geq L(x)/\delta(x)\}, \tag{8}$$

де $\delta(x)\nearrow+\infty$ $(x\to-0)$ — деяка функція така, що $\delta(L(x))<|x|L(x)$, виконується співвідношення (2), як тільки множина $(-1,0)\setminus E$ містить хоча б одну збіжну до нуля послідовність. А потім, скориставшись доведеним у [3] варіантом леми Бореля-Неванлінни, встановимо, що $D_hE=0$ для кожної функції h такої, що виконується (7).

Лема 1. *Нехай $F\in S(-1,0)$ і функція $\delta(x)\nearrow+\infty$ $(x\to-0)$ — такі, що $\delta(x)<|x|L(x,F)$ $(x\in(x_0,0))$ і множина E, визначена в (8), містить хоча б одну збіжну до нуля послідовність. Тоді співвідношення (2) виконується при $x\to-0$ $(x\in(-1,0)\setminus E)$ для всіх z, $\operatorname{Re}z=x$ таких, що виконується (3).*

Лема 2 [3]. *Нехай $u(x)$ — додатна неспадна на $[-1,0)$ функція, а функції Φ і h — додатні неспадні на $(-1,0)$ і такі, що виконуються умови (6) і (7). Якщо*

$$u(x)\geq\Phi(x)\quad(x_0\leq x<0),$$

то існує така функція $\delta(x)\nearrow+\infty$ $(x\to-0)$, що нерівність

$$|u(x+\tau)-u(x)|<u(x)/\delta(x)$$

виконується для всіх $x \in (-1,0) \setminus E$ і всіх $\tau \in \mathbb{R}$, $|\tau| \leq \psi(x) \equiv \delta(x)/u(x)$, при цьому множина E має нульову h- щільність у точці $x = 0$.

Доведення леми 1. Повторюємо схему доведення теореми 3 [2], а також міркування з [3]. Позначимо $\psi(x) = \delta(x)/L(x,F)$. Для всіх $x \in (-1,0) \setminus E$ і $\tau \in \mathbb{C}$, $|\tau| \leq \psi(x)$, маємо

$$|L(x+\tau,F) - L(x,F)| \leq$$
$$\leq \max\{L(x+\psi(x),F) - L(x,F),$$
$$L(x,F) - L(x-\psi(x),F)\} \leq 1/\psi(x).$$

Нехай $\varepsilon(x) \to +0$ $(x \to -0)$ — фіксована функція, а $z = x+iy$ — довільна точка така, що $|F(z)| \geq M(x,F)(1+\varepsilon(x))^{-1}$. З того, що $L(x,F)$ неспадна, випливає ([1, с. 147]), що для всіх $x \in (-1,0)$, $h \in \mathbb{R}$, $|x|-1 < h < |x|$

$$\ln M(x+h,F) - \ln M(x,F) \leq hL(x+h,F),$$

звідки для $x \in (-1,0) \setminus E$, $h \in \mathbb{R}$, $|h| \leq \psi(x)$

$$\ln M(x+h,F) - \ln M(x,F) - hL(x,F) \leq$$
$$\leq h(L(x+h,F) - L(x,F)) =$$
$$= |h||L(x+h,F) - L(x,F)| \leq 1.$$

Звідси, для $x \in (-1,0) \setminus E$, $\eta \in \mathbb{C}$, $|\operatorname{Re}\eta| \leq \psi(x)$

$$\left|\frac{F(z+\eta)}{F(z)}e^{-\eta L(x,F)}\right| \leq$$
$$\leq (1+\varepsilon(x))\exp\{\ln M(x+\operatorname{Re}\eta,F) -$$
$$-\ln M(x,F) - \operatorname{Re}\eta L(x,F)\} \leq$$
$$\leq e(1+\varepsilon(x)) = c(x) - 1.$$

Застосуємо тепер при фіксованому z до аналітичної функції

$$g(\eta) = \frac{F(z+\eta)}{F(z)}e^{-\eta L(x,F)} - 1$$

в крузі $\{\eta\colon |\eta| \leq \psi(x)\}$ лему Шварца. За лемою Шварца [4, с.317], для всіх $\eta \in \mathbb{C}$, $|\eta| < \psi(x)$

$$|g(\eta)| < c(x)\frac{|\eta|}{\psi(x)}. \tag{9}$$

Позаяк $|g(\eta)| < 1$ при $|\eta| < \psi(x)/c(x)$, $x \in (-1,0) \setminus E$, то

$$\left|\frac{F(z+\eta)}{F(z)}e^{-\eta L(x,F)}\right| \geq 1 - |g(\eta)| > 0,$$

тобто $F(z+\eta) \neq 0$ для $|\eta| < \psi(x)/c(x)$. Отже, при фіксованому z такому, як і вище, функція

$$G(\eta) = \int\limits_0^\eta \frac{F'(z+\tau)}{F(z+\tau)}d\tau - \eta L(x,F)$$

аналітична в крузі $\{\eta\colon |\eta| < \psi(x)/c(x)\}$, $G(0) = 0$ і $G'(0) = \frac{F'(z)}{F(z)} - L(x,F)$. Враховуючи, що за умови $|\eta| \leq q < \psi(x)/c(x)$ з (9) випливає нерівність

$$\operatorname{Re} G(\eta) = \ln\left|\frac{F(z+\eta)}{F(z)}e^{-\eta L(x,F)}\right| =$$
$$= \ln|1+g(\eta)| \leq \ln\left(1 + \frac{qc(x)}{\psi(x)}\right), \tag{10}$$

за модифікованою нерівністю Коші ([5, с.30]), застосованою в крузі $\{\eta\colon |\eta| \leq q\}$, отримаємо

$$\left|\frac{F'(z)}{F(z)} - L(x,F)\right| = |G'(0)| \leq$$
$$\leq 2\max\{\operatorname{Re} G(\eta)\colon |\eta| = q\} \leq$$
$$\leq 2\ln\left(1 + \frac{qc(x)}{\psi(x)}\right) \leq \frac{2c(x)}{\psi(x)}. \tag{11}$$

Звідси при $x \to -0$ $(x \notin E)$ і для всіх z, $\operatorname{Re} z = x$ таких, що $|F(z)| \geq M(x,F)(1+\varepsilon(x))^{-1}$,

$$\left|\frac{F'(z)}{F(z)}\frac{1}{L(x,F)} - 1\right| \leq \frac{2c(x)}{L(x,F)\psi(x)} =$$
$$= \frac{c(x)}{\delta(x)} = o(1).$$

Лему 1 доведено.

3. Доведення теореми 1. Виберемо у лемі 2 $u(x) = L(x,F)$. Тоді, застосовуючи послідовно лему 2, за лемою 1, отримуємо твердження теореми 1, позаяк, очевидно, що $E \subset E_1$, де E — множина, визначена в (8), а E_1 — множина з леми 2.

4. Асимптотичні співвідношення для похідних вищих порядків.

Теорема 2. *Нехай для функцій $F \in S(-1,0), \Phi, h$ виконуються умови (5)–(7)*

теореми 1. Тоді існує множина $E \subset (-1,0)$, $D_h E = 0$ така, що для кожного $k \in \mathbb{N}$ співвідношення

$$F^{(k)}(z) = (1+o(1))L^k(x,F)F(z) \qquad (12)$$

виконується при $x \to -0$ ($x \in (-1,0) \setminus E$) для всіх z, $\operatorname{Re} z = x$ таких, що виконується (3).

Доведення. Зберігаємо позначення з доведення теореми 1. Скориставшись, як і в доведенні леми 1, модифікованою нерівністю Коші, при фіксованому $k \in \mathbb{N}$ для $|\eta| \le q < \psi(x)/c(x)$ з нерівності (10) отримуємо

$$\frac{1}{k!}\left|G^{(k)}(0)\right| \le \frac{2}{q^k}\max\{\operatorname{Re} G(\eta)\colon |\eta| = q\} \le$$
$$\le 2q^{-k}\ln(1+qc(x)/\psi(x)) \stackrel{\text{def}}{=} \psi_k(x) \le$$
$$\le 2q^{-k+1}c(x)/\psi(x). \qquad (13)$$

Зауважимо, що для $|\eta| \le q$

$$F(z+\eta) = F(z)\exp\left\{\frac{F'(z)}{F(z)}\eta + \sum_{k=2}^{+\infty}\frac{G^{(k)}(0)}{k!}\eta^k\right\} = F(z)A(\eta) \qquad (14)$$

і $A(\eta)$ — аналітична функція, $A(0) = 1$. Нехай

$$A(\eta) = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} A_k\eta^k, \quad |\eta| \le q. \qquad (15)$$

Нескладно зрозуміти, що оскільки для $G_1(\eta) = G(\eta) + \eta L(x,F)$ виконується

$$A(\eta) = 1 + \sum_{s=1}^{+\infty}\frac{1}{s!}\left(\frac{F'(z)}{F(z)}\eta + \sum_{k=2}^{+\infty}\frac{G^{(k)}(0)}{k!}\eta^k\right)^s =$$
$$= 1 + \sum_{s=1}^{+\infty}\frac{1}{s!}\left(\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{G_1^{(k)}(0)}{k!}\eta^k\right)^s,$$

то тейлорові коефіцієнти в розвиненні (15) утворені за допомогою скінченних сум вигляду

$$A_k = \sum_{\|\alpha\|=k} B_\alpha \left(G_1'(0)\right)^{\alpha_1} \times \left(\frac{G_1''(0)}{2!}\right)^{\alpha_2}\cdots\left(\frac{G_1^{(k)}(0)}{k!}\right)^{\alpha_k},$$

де $\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_k) \in \mathbb{Z}_+^k$ — мультиіндекс, а $\|\alpha\| = \sum_{j=1}^k j\alpha_j$ — його вага, $B_\alpha \in \mathbb{C}$.

Зауважимо тепер, що з розвинень $F(z+\eta) = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{F^{(k)}(z)}{k!}\eta^k$ і (14) випливає, що $F^{(k)}(z) = F(z)k!A_k$ ($k \ge 1$), тому

$$\frac{F^{(k)}(z)}{F(z)}\frac{1}{L^k(x,F)} - 1 = \left(\frac{F'(z)}{F(z)}\frac{1}{L(x,F)}\right)^k - 1 + \sum_{\substack{\|\alpha\|=k\\ \alpha_1<k}} B_\alpha \prod_{j=1}^k\left(\frac{G_1^{(j)}(0)}{j!}\right)^{\alpha_j}$$

і, отже, за допомогою нерівностей (12) і (13) отримуємо, що для $q = \frac{1}{2}\frac{\psi(x)}{c(x)} = \frac{1}{2}\frac{\delta(x)}{c(x)L(x,F)}$

$$\left|\frac{F^{(k)}(z)}{F(z)}\frac{1}{L^k(x,F)} - 1\right| \le$$
$$\le \left|\left(\frac{F'(z)}{F(z)}\frac{1}{L(x,F)}\right)^k - 1\right| + \sum_{\substack{\|\alpha\|=k\\ \alpha_1<k}} |B_\alpha|(qL(x,F))^{-k} \times \left(\frac{2qc(x)}{\psi(x)}\right)^{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_k} \le$$

$$\le \left|\frac{F'(z)}{F(z)}\frac{1}{L(x,F)}-1\right|\sum_{j=0}^{k-1}\left|\frac{F'(z)}{F(z)}\frac{1}{L(x,F)}\right|^j+$$

$$+\sum_{\substack{\|\alpha\|=k\\ \alpha_1<k}}|B_\alpha|\left(\frac{2c(x)}{\delta(x)}\right)^k\le$$

$$\le\frac{c(x)}{\delta(x)}\sum_{j=0}^{k-1}\left(1+\frac{c(x)}{\delta(x)}\right)^j+$$

$$+\sum_{\substack{\|\alpha\|=k\\ \alpha_1<k}}|B_\alpha|\left(\frac{2c(x)}{\delta(x)}\right)^k=\left(1+\frac{c(x)}{\delta(x)}\right)^k-1+$$

$$+\sum_{\substack{\|\alpha\|=k\\ \alpha_1<k}}|B_\alpha|\left(\frac{2c(x)}{\delta(x)}\right)^k.$$

Залишається пригадати, що $c(x)=O(1)$, $\delta(x)\nearrow+\infty$ $(x\to-0)$. Тому при $x\to-0$ $(x\notin E, D_hE=0)$ для всіх z, $\operatorname{Re}z=x$ і таких, що $|F(z)|\ge M(x,F)(1+\varepsilon(x))^{-1}$ отримуємо

$$\left|\frac{F^{(k)}(z)}{F(z)}\frac{1}{L^k(x,F)}-1\right|=o(1).$$

Теорему 2 доведено.

5. Наслідки для рядів Діріхле й аналітичних в одиничному крузі функцій. Нескладно переконатись, що абсолютно збіжні в півплощині $\Pi_0=\{z:\ \operatorname{Re}z<0\}$ ряди Діріхле

$$F(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_ne^{z\lambda_n},\quad \lambda_n\in\mathbb{R}_+\ (n\ge0),\quad(16)$$

належать до класу $S(-1;0)$, а також, що ([5, с. 82]) у випадку $\lambda_n\uparrow+\infty$ $(n\to+\infty)$ сума F збіжного ряду (16) належить до $S(-1;0)$. Тому з теореми 1 випливає наступний наслідок.

Наслідок 1. *Нехай ряд (16) або абсолютно збіжний в* Π_0, *або виконується умова* $\lambda_n\uparrow+\infty$ $(n\to+\infty)$ *і ряд (16) збіжний в* Π_0. *Нехай виконується умова*

$$|x|L(x,F)\to+\infty\quad(x\to-0).$$

Тоді існує така множина $E\subset(-1,0)$, *що для кожного* $k\in\mathbb{N}$ *співвідношення (12) виконується при* $x\to-0$ $(x\notin E)$ *для всіх* z, $\operatorname{Re}z=x$ *таких, що виконується (3), при цьому* $\operatorname{meas}(E\cap[x,0])=o(|x|)$ $(x\to-0)$.

Доведення. Досить застосувати теорему 2 з функціями $\Phi(x)=L(x,F)$ та $h(x)=\frac{1}{|x|}$.

Наслідок 1. *Нехай для аналітичної в одиничному крузі* $\mathrm{U}=\{w:|w|<1\}$ *функції* $f(w)$ *виконується умова*

$$(1-r)K_f(r)\to+\infty\quad(r\to1-0),$$

де $K_f(r)=(\ln M_f(r))'$, $M_f(r)=\max\{|f(w)|:|w|=r\}$. *Тоді співвідношення*

$$f^{(k)}(w)=(1+o(1))K_f^k(r)f(w)$$

виконується при $r\to1-0$ *для всіх* $w\in U$, $|w|=r$ *таких, що*

$$|f(w)|=(1+o(1))M_f(r)\quad(r\to1-0)$$

зовні деякої множини $E_1\subset[0,1)$ *такої, що*

$$D^1E_1=\varlimsup_{r\to1-0}\frac{1}{1-r}\operatorname{meas}(E_1\cap[r,1))=0.$$

Доведення. Досить, як і в [3] при доведенні наслідку 4, перевірити можливість застосування наслідку 1 до функції $F(z)=f(e^z)$.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Стрелиц Ш.И.* Асимптотические свойства аналитических решений дифференциальных уравнений.— Вильнюс: Минтис, 1972.— 468 с.
2. *Salo T.M., Skaskiv O.B., Stasyuk Ya.Z.* On a central exponent of entire Dirichlet series // Mat. Studii.— 2003.— **19**, № 1.— P.61—72.
3. *Skaskiv O.B., Stasyuk Ya.Z.* On the Wiman theorem for absolutely convergent Dirichlet series // Mat. Studii.— 2003.— **20**, № 2.— P.133—142.
4. *Маркушевич А.И.* Теория аналитических функций. Т.1.— М.: Наука, 1967.— 486 с.
5. *Леонтьев А.Ф.* Целые функции. Ряды экспонент.— М.: Наука, 1983.— 176 с.

Стаття надійшла до редколегії 12.09.2004