УДК 512.54

©2005 р. В.С. Сікора

Чернівецький національний університет ім. Ю. Федьковича, Чернівці

МІНІМАЛЬНІ СИСТЕМИ ТВІРНИХ МЕТАСИМЕТРИЧНОЇ ГРУПИ СКІНЧЕННОГО РАНГУ

Побудовано мінімальні (щодо кількості елементів) системи твірних метасиметричної групи скінченного рангу.

The minimal (on quantity of elements) generators systems are constructed for the metasymmetrical group of finite rank.

Проблема дослідження "економних" (зокрема, незвідних) систем твірних у довільних групах є класичною для теорії груп і розглядалася у працях різних авторів ще з самого початку становлення цієї теорії. Насамперед це пов'язано з тим, що в багатьох випадках інформація про систему твірних групи є визначальною при розв'язуванні різних задач, а "економність" системи твірних дозволяє зменшити кількість потрібних перевірок. Якщо група є скінченно породженою, то її незвідні системи твірних можуть складатися з різної кількості елементів. А тому для таких груп природним є питання про побудову та дослідження систем твірних із мінімальним можливим числом елементів. Це число є важливим інваріантом групи і досліджувалося у роботах різних авторів, зокрема М.Ашбахера, Р. Стейнберга, Р.Гуралніка, Л.Ковача, К.Бузаші, І.М.Айзекса, Тхіло Цічанга та інших (див., наприклад, [1-4]). Одним з найважливіших результатів, який отримано в цьому напрямку, є теорема Р.Стейнберга [4] про 2-породжуваність простих груп лієвого типу. На основі цієї теореми М.Ашбахер та Р.Гуралнік [1] довели, що кожна скінченна проста група є 2-породженою. Це твердження стало основою для багатьох досліджень, в яких будуються конкретні 2-елементні системи твірних у різних простих (зокрема, лінійних) групах, досліджуються розклади елементів групи за такими твірними.

При переході до вивчення цього питання для непростих груп природно розглядати спочатку розширення кількох простих груп або їх прямих добутків. У зв'язку з цим виникає задача дослідження мінімальних (за кількістю елементів) систем твірних у вінцевих добутках. Ряд результатів про найменше можливе число твірних у таких добутках отримано в працях К.Бузачі, Л.Ковача [2] та ін. Майже очевидно, що це число не перевищує суми відповідних інваріантів для вінцевих співмножників, однак ця оцінка не є точною, причому в загальному випадку встановити точну оцінку не вдається. А тому природно виникає задача побудови мінімальних (за кількістю елементів) систем твірних у вінцевих добутках тих чи інших конкретних груп. Одними із найбільш уживаних таких вінцевих добутків є метасиметричні групи, тобто вінцеві добутки скінченних симетричних груп та близькі до них. Вони часто виникають у дослідженнях із дискретної математики як групи симетрій різних дискретних структур (графів, дискретних метричних просторів, впорядкованих множин тощо), використовуються при класифікації булькових функцій та функцій багатозначної логіки, у теорії переліку, у теорії автоматів і автоматних відображень [див., наприклад, 5–9].

1. Означення вінцевого добутку груп підстановок. Нехай G_i — група підстановок множини M_i $(i = 1, 2, ...)$, тоді (G_1, M_1), $(G_2, M_2), \ldots$ — скінченна або нескінченна послідовність груп підстановок.

Означення 1. [10] *Вінцевим добутком за скінченною (чи нескінченною) послідовністю груп підстановок* (G_1, M_1), (G_2, M_2), ... *називається група* G *всіх можливих підстановок декартового добутку* M *множин* $M_1, M_2, ...$, *які (підстановки) задовольняють умови:*

(i) якщо $(y_1, y_2, ...) = (x_1, x_2, ...)^g$, *де* $g \in G$, *а елементи* $(x_1, x_2, ...)$, $(y_1, y_2, ...) \in M = M_1 \times M_2 \times ...$; *то* y_i *залежить тільки від* i *перших координат* $x_1, x_2, ..., x_i$ *набору* $(x_1, x_2, ...)$ *для всіх* $i \geq 1$;

(ii) якщо координати $x_1^0, ..., x_{i-1}^0$ *фіксовані, то відображення*

$$g_i(x_1^0, ..., x_{i-1}^0) : M_i \to M_i,$$

індуковане перетворенням $g \in G$, *є підстановкою, що належить до групи* G_i *для всіх* $i \geq 1$.

З означення 1 випливає, що елементи групи G можна задавати скінченними (чи нескінченними) наборами вигляду

$$u = [g_1, g_2(x_1), g_3(x_1, x_2), ...], \qquad (1)$$

де $g_1 \in G_1$, $g_i(x_1, ..., x_{i-1}) \in G_i^{M_1 \times ... \times M_{i-1}}$, $i \geq 2$.

Послідовність (1) діє на елементи множини $M = M_1 \times M_2 \times M_3 \times ...$ за правилом:

$$(m_1, m_2, m_3, ...)^u =$$

$$= (m_1^{g_1}, m_2^{g_2(m_1)}, m_3^{g_3(m_1, m_2)}, ...), \qquad (2)$$

де $m_{i+1}^{g_{i+1}(m_1, ..., m_i)}$ визначає дію підстановки $g_{i+1}(m_1, ..., m_i)$ на елемент m_{i+1}, $i \geq 1$. Тому, використовуючи (2), отримуємо правила обчислення добутку елементів і оберненого елемента в групі G. А саме, нехай

$$u = [g_1, g_2(x_1), g_3(x_1, x_2), ...] \in G,$$

$$v = [h_1, h_2(x_1), h_3(x_1, x_2), ...] \in G,$$

тоді

$$u \cdot v = [g_1, g_2(x_1), g_3(x_1, x_2), ...] \cdot$$

$$\cdot [h_1, h_2(x_1), h_3(x_1, x_2), ...] =$$

$$= [g_1 \cdot h_1,\ g_2(x_1) \cdot h_2(x_1^{g_1}),$$

$$g_3(x_1, x_2) \cdot h_3(x_1^{g_1}, x_2^{g_2(x_1)}), ...]$$

та

$$u^{-1} = [g_1^{-1},\ g_2^{-1}(x_1^{g_1^{-1}}),$$

$$g_3^{-1}(x_1^{g_1^{-1}}, x_2^{g_2^{-1}\left(x_1^{g_1^{-1}}\right)}), ...],$$

а нейтральним у групі G буде елемент

$$e = [\varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, ...],$$

де символом ε позначено відповідні одиничні елементи груп G_i, $i \geq 1$.

Згідно з працею Л.А.Калужніна [11], будемо називати набори вигляду (1) *таблицями*.

Вінцевий добуток за деякою послідовністю (G_1, M_1), (G_2, M_2), ... груп підстановок позначають символом $\underset{i=1}{\overset{r}{\wr}} (G_i, M_i)$, або просто $\underset{i=1}{\overset{r}{\wr}} G_i$, де r або натуральне число, або символ ∞ (якщо послідовність груп підстановок є нескінченною). Якщо всі групи підстановок (G_i, M_i) рівні між собою й дорівнюють (H, X), то їх вінцевий добуток називають *вінцевим степенем* і позначають $\underset{i=1}{\overset{r}{\wr}} (H, X)^{(i)}$.

2. Означення метасиметричної групи. Нехай n_1, $n_2, ...$, — (скінченна або нескінченна) послідовність натуральних чисел, причому $n_i \geq 2$, $i \in \mathbb{N}$; $S_{n_1}, S_{n_2}, ...$ — симетричні групи степенів $n_1, n_2, ...$ відповідно.

Означення 2. [11] *Метасиметричною групою* $S(n_1,\ n_2,\ ...)$ *метастепеня* $(n_1,\ n_2,\ ...)$ *називається (скінченно або нескінченно) ітерований вінцевий добуток симетричних груп* $S_{n_1}, S_{n_2}, ...$:

$$S(n_1, n_2, ...) = S_{n_1} \wr S_{n_2} \wr ... .$$

Для визначення метасиметричної групи обидві властивості елементів вінцевого добутку (наведені в означенні 1) не потрібні. А саме, має місце твердження.

Лема 1. [12] *Таблиця* u *належить до вінцевого добутку (скінченної чи нескінченної) послідовності симетричних груп* S_{n_1}, S_{n_2}, ... *тоді й тільки тоді, коли вона* *задовольняє умову (і) означення 1 вінцевого добутку груп підстановок.*

Зауваження. Іноді вказану умову (i) називають *умовою трикутності* перетворення множини, на якій діє вінцевий добуток. Отже, вінцевий добуток симетричних груп складається тільки з трикутних підстановок цієї множини.

Якщо послідовність чисел $n_1, n_2, \ldots$ є скінченною, тобто скінченним є кортеж $(n_1, n_2, ..., n_r)$, $r \in \mathbb{N}$, то кажуть, що *метасиметрична група U має скінченний метастепінь*.

Для довільного скінченного набору натуральних чисел $n_1, n_2, ..., n_r$, $(n_i \geq 2,\ i = 1, 2, .., r)$ з точністю до подібності існує тільки одна метасиметрична група метастепеня $(n_1, n_2, ..., n_r)$, яку будемо позначати $S(n_1, n_2, ..., n_r)$, тобто

$$S(n_1, n_2, ..., n_r) = S_{n_1} \wr S_{n_2} \wr \ldots \wr S_{n_r}. \qquad (3)$$

3. Основні властивості метасиметричних груп.

1) Метасиметричні групи $S(n_1, n_2, ..., n_r)$ і $S(n_1^{'}, n_2^{'}, ..., n_k^{'})$ ізоморфні тоді й тільки тоді, коли $r = k$ та $n_i = n_i^{'}$ для всіх $i = 1, 2, ...,$.

Це твердження випливає з відомої теореми П.Неймана про ізоморфізм вінцевих добутків [13].

2) $S(n_1, n_2, ..., n_r)$ є групою підстановок степеня $n_1 n_2 ... n_r$ і порядку

$$n_1!(n_2!)^{n_1} \ldots (n_r!)^{n_1 n_2 \ldots n_r}.$$

Якщо областю дії групи S_{n_i} є множина M_i, $1 \leq i \leq r$, то $S(n_1, n_2, ..., n_r)$ діє на множині $M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_r$, при цьому ця дія є транзитивною та імпримітивною.

3) Елементи метасиметричної групи $S(n_1, n_2, ..., n_r)$ можна записувати у вигляді наборів довжини r, які мають вигляд:

$$[g_1, g_2(x_1), g_3(x_1, x_2), ..., g_r(x_1, x_2, ..., x_{r-1})], \qquad (4)$$

де $g_1 \in S_{n_1}$, $g_i(\bar{x}_{i-1}) \equiv g_i(x_1, x_2, ..., x_{i-1}) : M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_{i-1} \to S_{n_i}$ — довільне відображення, $1 \leq i \leq r$.

4) Для кожного натурального k, $1 \leq k \leq r$, метасиметрична група (3) містить підгрупу k-координатних таблиць, тобто таблиць вигляду

$$[\varepsilon, ..., \varepsilon, g_k(\bar{x}_{k-1}), \varepsilon, ..., \varepsilon],$$

де ε — одиничне відображення. Ця група ізоморфна $n_1 n_2 ... n_{k-1}$-му степеню симетричної групи S_{n_k}.

5) Симетрична група S_2 ізоморфна циклічній групі Z_2 порядку 2. Тому метасиметрична група $S(2, 2, ..., 2)$ є вінцевим добутком циклічних груп порядку 2 та ізоморфна силовській 2-підгрупі симетричної групи степеня 2^r.

6) Частинними випадками метасиметричних груп є добре відомі гіпероктаедральні групи $(n \geq 2)$:

$$S(n, 2) = S_n \wr Z_2 \simeq S_n \wr S_2$$

та "дуальні" до них [13]

$$S(2, n) = S_2 \wr S_n.$$

4. Побудова мінімальних систем твірних метасиметричних груп скінченного рангу. Розглянемо вінцевий добуток r симетричних груп степеня n:

$$S(n, r) := \underbrace{S_n \wr S_n \wr \ldots \wr S_n}_{r}.$$

Група $S(n, r)$ має степінь n^r і порядок $(n!)^{1+n+n^2+\ldots+n^{r-1}}$, при цьому діє на множині слів довжини r транзитивно та імпримітивно. Для кожного цілого k $(1 \leq k \leq r)$ група $S(n, r)$ містить підгрупу k-координатних таблиць, тобто таблиць вигляду

$$[\varepsilon, ..., \varepsilon, g_k(x_1, x_2, ..., x_{k-1}), \varepsilon, ..., \varepsilon],$$

котра ізоморфна n^{k-1}-му степеню симетричної групи S_n.

Розглянемо спочатку системи твірних групи $S(n, r)$, які складаються лише із координатних таблиць. Для цього в симетричній групі S_n фіксуємо деяку систему твірних $\Pi = \{\pi_1, \pi_2, ..., \pi_s\}$, $s \in \mathbb{N}$ і розглянемо таблиці вигляду

$$u_r(\bar{x}_{k-1}^{0,l}, k, \pi_l) =$$

$$= [\varepsilon, ..., \varepsilon, h_{k,l}(x_1, ..., x_{k-1}), \varepsilon, ..., \varepsilon], \qquad (5)$$

в яких

$$h_{kl}(x_1, ..., x_{k-1}) =$$

$$= \begin{cases} \pi_l, & \text{якщо } (x_1, ..., x_{k-1}) =, \bar{x}_{k-1}^{0,l} \\ \varepsilon & \text{у решті випадків,} \end{cases} \qquad (6)$$

де ε — одиничний елемент групи S_n, $\bar{x}_{k-1}^{0,l} = (x_{1,l}^0, ..., x_{k-1,l}^0)$ — фіксований кортеж, $l = 1, 2, ..., s$, $k = 1, 2, ..., r$.

Має місце твердження.

Теорема 1. *Система елементів, визначених формулами (5) та (6), є системою твірних групи $S(n, r)$ при довільному виборі кортежів $\bar{x}_k^{0,l}$ $(1 \leq k \leq r-1,\ 1 \leq l \leq s)$.*

Ця система незвідна тоді й тільки тоді, коли система Π незвідна.

Доведення. Покажемо спочатку, що система (5) є системою твірних групи $S(n, r)$. Використаємо індукцію за r.

Випадок $r = 1$ — база індукції — є тривіальним.

Нехай тепер при деякому $r \geq 2$ твердження теореми є правильним. Покажемо, що воно залишається правильним у випадку вінцевого добутку $S(n, r+1)$.

Кожну таблицю $u_r(\bar{x}_{k-1}^{0,l}, k, \pi_l)$ $(1 \leq k \leq r)$ довжини r продовжимо до таблиці $u_{r+1}(\bar{x}_{k-1}^{0,l}, k, \pi_l)$ довжини $r+1$, дописуючи в кінці одиничну координату. Система $u_{r+1}(\bar{x}_{k-1}^{0,l}, k, \pi_l)$ породжує у вінцевому добутку $S(n, r+1)$ підгрупу всіх можливих таблиць вигляду

$$[a_1, a_2(x_1), ..., a_r(\bar{x}_{r-1}), \varepsilon].$$

Тому досить переконатися, що довільна таблиця вигляду

$$[\varepsilon, ..., \varepsilon, a_{r+1}(\bar{x}_r)] \qquad (7)$$

також породжується елементами із системи (5). Кожну таку таблицю можна розкласти на добуток елементів вигляду

$$[\varepsilon, ..., \varepsilon, h_{r+1,l}(\bar{x}_r)], \qquad (8)$$

де $h_{r+1,l}(\bar{x}_r)$ набуває неодиничного значення тільки в деякій одній точці $(\bar{z}_r)$. Вінцевий добуток $S(n, r)$ для довільного r діє на множині кортежів транзитивно. Тому для кортежа $(\bar{z}_r)$ при довільному l $(1 \leq l \leq s)$ знайдеться підстановка $v_l \in S(n, r)$ така, що $(z_1, ..., z_r) = (x_{1,l}^0, ..., x_{r,l}^0)^{v_l}$. За припущенням індукції, кожну з підстановок v_l $(1 \leq l \leq s)$ можна розкласти на добуток твірних із систем (5), (6). Отже, таблиця $\tilde{v}_l$ из $S(n, r+1)$, отримана з v_l дописуванням одиничної координати, також розкладається на добуток таких твірних. Виконуючи спряження таблиці (8) за допомогою $\tilde{v}_l$, отримаємо:

$$\tilde{v}_l \cdot [\varepsilon, ..., \varepsilon, h_{r+1,l}(\bar{x}_r)] \cdot \tilde{v}_l^{-1} =$$

$$= [\varepsilon, ..., \varepsilon, h_{r+1,l}(\bar{x}_r^{v_l})].$$

Функція $h_{r+1,l}(\bar{x}_r^{v_l})$ набуває неодиничного значення тільки в одній точці $(x_{1,l}^0, ..., x_{r,l}^0)$. Отже, її можна розкласти на добуток функцій вигляду $h_{r+1,l}(\bar{x}_r)$, які визначаються рівністю (6). Звідси випливає, що кожна таблиця вигляду (7) є добутком елементів системи (5), тобто система (5) є системою твірних групи $S(n, r+1)$.

Переконаємося тепер, що система (5) є незвідною. Для цього досить показати, що при виключенні з неї хоча б одного елемента, вона перестає бути системою твірних. А це дійсно так, оскільки якщо ми зафіксуємо деякі номери k, l та відкинемо твірну $u(\bar{x}_{k-1}^{0,l}, k, \pi_l)$, то таблицю

$$[\varepsilon, ..., \varepsilon, g_k(\bar{x}_{k-1}), \varepsilon, ..., \varepsilon],$$

де $g_k(\bar{x}_{k-1})$ має неодиничне значення, що дорівнює π_l, тільки в одній точці $\bar{x}_{k-1}^{0,l}$, вже не можна буде виразити через твірні, які залишилися. Теорему 1 доведено.

Зауваження. Оскільки симетрична група S_n породжується двома підстановками — такими, наприклад, будуть пари $(1, 2)$, $(1, 2, ..., n)$ або $(1, 2, ..., n-1)$, $(1, 2, ..., n)$ — то група $S(n, r)$ має незвідні системи твірних вигляду (5), які містять $2r$ підстановок.

Охарактеризуємо тепер комутант групи $S(n, r)$.

Нехай $\sigma = \prod f(\bar{x}_r)$ — добуток всіх значень деякої координатної функції, взятих у певному порядку. Підстановка σ є або парною, або непарною і ця властивість не залежить від порядку множників.

Із означення оператора $\prod$ випливає:

(i) якщо $\prod f(\bar{x}_r) \in A_n$, то для довільної таблиці $u \in S(n,r)$ маємо $\prod f(\bar{x}_r^u) \in A_n$;

(ii) якщо $\prod f(\bar{x}_r) \in A_n$ та $\prod g(\bar{x}_r) \in A_n$, то $\prod f(\bar{x}_r) g(\bar{x}_r) \in A_n$, де A_n — знакозмінна група порядку n.

Теорема 2. *Комутант $S'(n,r)$ містить ті й лише ті таблиці*

$$[g_1, g_2(x_1), ..., g_r(\bar{x}_{r-1})], \tag{9}$$

для яких виконується співвідношення:

$$g_1 \in A_n, \quad \prod g_i(\bar{x}_{i-1}) \in A_n \quad (1 \le i \le r).$$

Доведення. Нехай U — множина таблиць вказаного вигляду (9). Очевидно, що підгрупа $S'(n,r)$ породжується таблицями $[g, \varepsilon, ..., \varepsilon]$, $g \in A_n$, та всіма можливими комутаторами таблиць вигляду

$$u = [g_1, ..., g_k(\bar{x}_{k-1}), \varepsilon, ..., \varepsilon],$$

$$v = [\varepsilon, ..., \varepsilon, g_{k+1}(\bar{x}_k), \varepsilon, ..., \varepsilon],$$

$(1 \le k \le r-1)$. Зокрема, комутатор (u,v) є $(k+1)$-координатною таблицею, причому його $(k+1)$-а координата дорівнює $g_{k+1}(\bar{x}_k^u) \cdot g_{k+1}^{-1}(\bar{x}_k)$. Функції $g_{k+1}(\bar{x}_k^u)$ та $g_{k+1}^{-1}(\bar{x}_k)$ набувають взаємно обернених значень у точках $\bar{x}_k^u$ та $\bar{x}_k$. Тому в добутку всіх значень функції $|(u,v)|_{k+1}$ буде парне число непарних множників, тобто $|(u,v)|_{k+1} \in A_n$. Отже, всі такі комутатори (u,v) містяться в U. Звідси, завдяки властивостям (i), (ii) оператора $\prod$ отримуємо, що $S'(n,r) \subseteq U$.

З іншого боку, довільну таблицю з U можна розкласти на добуток координатних таблиць. Досить довести, що кожен співмножник належить до $S'(n,r)$.

Нехай $[\varepsilon, ..., \varepsilon, f(\bar{x}_k), \varepsilon, ..., \varepsilon]$ — така координатна таблиця, що $\prod f(\bar{x}_k) \in A_n$. Якщо функція $g(\bar{x}_k)$ набуває тільки двох неодиничних значень, причому вони є взаємно оберненими, то існує таблиця $w \in S(n,r)$ така, що

$$g(x_k) = h(\bar{x}_k^w) h^{-1}(\bar{x}_k),$$

де $h(\bar{x}_k)$ має тільки одне неодиничне значення, яке збігається з неодиничним значенням $g(\bar{x}_k)$. Звідси одержуємо

$$[\varepsilon, ..., \varepsilon, g(\bar{x}_k), \varepsilon, ..., \varepsilon] =$$

$$= (w, [\varepsilon, ..., \varepsilon, h(\bar{x}_k), \varepsilon, ..., \varepsilon]) \in S'(n,r).$$

Якщо тепер $f(\bar{x}_k)$ набуває неодиничного значення тільки в точках $\bar{x}_{k-1}^{(1)}, \bar{x}_{k-1}^{(2)}, ..., \bar{x}_{k-1}^{(s)}$, та ці значення дорівнюють $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s$ відповідно, то поклавши

$$g_i(\bar{x}_k) = \begin{cases} \alpha_i^{-1}, & \text{якщо } \bar{x}_{k-1} = \bar{x}_{k-1}^{(i)}, \\ \alpha_i, & \text{якщо } \bar{x}_{k-1} = \bar{x}_{k-1}^{(i+1)}, \\ \varepsilon, & \text{в решті випадків,} \end{cases}$$

ми отримуємо рівність

$$g_{s-1} \cdot g_{s-2} \cdot ... \cdot g_1 \cdot f = b,$$

де

$$b(\bar{x}_{k-1}) = \begin{cases} \alpha_1 ... \alpha_s, & \text{якщо } \bar{x}_{k-1} = \bar{x}_{k-1}^{(s)}, \\ \varepsilon & \text{в решті випадків.} \end{cases}$$

Оскільки кожна з таблиць $[\varepsilon, ..., \varepsilon, g_i(x_{k-1}), \varepsilon, ..., \varepsilon]$ $(1 \le i \le s)$ і таблиця $[\varepsilon, ..., \varepsilon, b(\bar{x}_{k-1}), \varepsilon, ..., \varepsilon]$ належать до $S'(n,r)$, то і таблиця $[\varepsilon, ..., \varepsilon, f, \varepsilon, ..., \varepsilon]$ також належить до $S'(n,r)$. Звідси отримуємо, що $U \subseteq S'(n,r)$. Теорему 2 доведено.

Теорема 3. *Кожна мінімальна (за кількістю елементів) система твірних групи $S(n,r)$ для довільного $r \ge 2$ містить рівно r елементів.*

Доведення. Нехай $m(S(n,r))$ — мінімально можлива кількість твірних групи $S(n,r)$. Доведемо спочатку, що $m(S(n,r)) \ge r$. Розглянемо абелізацію $G = S(n,r)/S'(n,r)$ групи $S(n,r)$ і покажемо, що вона є елементарною абелевою 2-групою рангу r.

Дійсно, для кожної таблиці $u = [g_1, g_2(x_1), ..., g_r(\bar{x}_{r-1})]$ маємо

$$u^2 = [g_1^2, g_1(x) \cdot g_1(x_1), ..., g_r(\bar{x}_{r-1}) \cdot g_r(\bar{x}_{r-1})].$$

Оскільки $g_1^2 \in A_n$ та $\prod g_i(x_{i-1})g_i(x_{i-1}^u) \in A_n$, то $u^2 \in S'(n,r)$, тобто образ таблиці u при природному гомоморфізмі $S(n,r) \to S(n,r)/S'(n,r)$ є елементом порядку 2. Отже, G — елементарна абелева.

Далі, оскільки кожну координатну функцію $f(\bar{x}_k)$ можна розкласти на добуток $f = g \cdot h$ двох функцій таких, що $\prod g(\bar{x}_k) \in A_n$, а $h(\bar{x}_k)$ набуває неодиничного значення не більше ніж в одній точці, то кожну таблицю

$$v = [f_1, f_2(x_1), ..., f_r(\bar{x}_{r-1})] \in S(n,r)$$

можна розкласти на добуток

$$v = [g_1, g_2(x_1), ..., g_r(\bar{x}_{r-1})]\cdot$$

$$\cdot[h_1, h_2(x_1), ..., h_r(\bar{x}_{r-1})],$$

перший множник якого належить $S'(n,r)$, а координатами другого є функції, які набувають неодиничного значення не більше ніж в одній точці. Звідси випливає, що абелізація $S(n,r)/S'(n,r)$ породжується образами r координатних таблиць вигляду

$$[\varepsilon, ..., \varepsilon, \tilde{h}_k(\bar{x}_{k-1}), \varepsilon, ..., \varepsilon],$$

де $\tilde{h}_k(\bar{x}_{k-1})$ набуває тільки одного неодиничного значення і є непарною підстановкою.

Таким чином, ранг абелізації дорівнює r, тому довільна система твірних групи $S(n,r)$ містить не менше ніж r елементів.

Наведемо тепер систему твірних $S(n,r)$, яка складається рівно з r елементів. Випадок $r = 2$ доведено нами в [13]. Зокрема встановлено, що $S(n,2)$ породжується двома таблицями $u = [g_1, g_2(x_1)]$, $v = [h_1, h_2(x_1)]$, де

(i) якщо n — парне, $n > 2$, то

$$g_1 = (1,2,...,n), \quad h_1 = (1,2,...,n-1),$$

$$g_2(x_1) = \begin{cases} (1,2,...,n-1) & \text{при } x_1 = 1, \\ \varepsilon & \text{в решті випадків,} \end{cases}$$

$$h_2(x_1) = \begin{cases} (1,2,...,n) & \text{при } x_1 = n, \\ \varepsilon & \text{в решті випадків;} \end{cases}$$

(ii) якщо n — непарне, $n > 2$, то

$$g_1 = (1,2,...,n), \qquad h_1 = (1,2),$$

$$g_2(x_1) = (1,2),$$

$$h_2(x_1) = \begin{cases} (1,2) & \text{при } x_1 = 1, \\ (1,2,...,n) & \text{при } x_1 = 3, \\ \varepsilon & \text{в решті випадків;} \end{cases}$$

(iii) якщо $n = 2$, то

$$g_1 = (1,2), \quad h_1 = \varepsilon, \quad g_2(x_1) = \varepsilon,$$

$$h_2(x_1) = \begin{cases} (1,2) & \text{при } x_1 = 1, \\ \varepsilon & \text{в решті випадків.} \end{cases}$$

Нехай тепер $r > 2$. Скористаємося індукцією за r. Припустимо, що група $S(n,r)$ породжується r таблицями

$$w_i = [f_1^{(i)}, f_2^{(i)}(x_1), f_3^{(i)}(x_1,x_2), ..., f_r^{(i)}(\bar{x}_{r-1})]$$

$(i = 1,2,...,r)$ і побудуємо систему твірних групи $S(n, r+1)$, яка складається з $r+1$ таблиць. Для цього продовжимо кожну із таблиць w_i до таблиці $\tilde{w}_i$ довжини $r+1$, дописуючи $(r+1)$-у координату, яка дорівнює ε $(1 \le i \le r)$, і додамо до цієї системи таблицю

$$\tilde{w}_{r+1} = [\varepsilon, ..., \varepsilon, h_{r+1}(\bar{x}_r)],$$

де функція $h_{r+1}(\bar{x}_r)$ визначається так:

(j) якщо n – парне, то

$$h_{r+1}(\bar{x}_r) =$$

$$= \begin{cases} (1,2,...,n-1), \\ \qquad \text{якщо } \bar{x}_r = (1,0,0,...,0), \\ (1,2,...,n), \text{ якщо } \bar{x}_r = (0,1,0,...,0), \\ \varepsilon \quad \text{в решті випадків;} \end{cases}$$

(jj) якщо n – непарне, то

$$h_{r+1}(\bar{x}_r) =$$

$$= \begin{cases} (1,2), \text{ якщо } \bar{x}_r = (1,0,0...,0), \\ (1,2,...,n), \text{ якщо } \bar{x}_r = (0,1,0,...,0), \\ \varepsilon \quad \text{в решті випадків.} \end{cases}$$

Тоді для довільного n можна підібрати такі натуральні числа k, t, щоб

$$\tilde{w}_{r+1}^k = [\varepsilon, ..., \varepsilon, g_{r+1}^{(1)}(\bar{x}_r)],$$

$$\tilde{w}_{r+1}^t = [\varepsilon, ..., \varepsilon, g_{r+1}^{(2)}(\bar{x}_r)],$$

і функції $g_{r+1}^{(j)}(\bar{x}_r)$, $j = 1,2$, набували неодиничного значення (дорівнює

$(1, 2, ..., n-1)$ та $(1, 2, ..., n)$ або, відповідно, $(1, 2)$ і $(1, 2, ..., n)$) тільки в одній точці. Оскільки через таблиці w_i $(i = 1, 2, ..., r)$ виражаються всі координатні таблиці з системи твірних (5), а $\tilde{w}^k_{r+1}$ і $\tilde{w}^t_{r+1}$ самі мають потрібний вигляд, то звідси випливає, що так побудована система $\tilde{w}_1, \tilde{w}_2, ..., \tilde{w}_r, \tilde{w}_{r+1}$ є системою твірних групи $S(n, r+1)$. Теорему 3 доведено.

Теорема 3 допускає природне узагальнення на випадок довільних метасиметричних груп скінченного рангу. А саме, має місце таке твердження.

Теорема 4. *Кожна мінімальна (за кількістю елементів) система твірних метасиметричної групи $S(n_1, n_2, ..., n_r)$ ($n_i \geq 2$ для $i = 1, 2, ..., r$) довільного скінченного рангу $r \geq 2$ містить рівно r елементів.*

Доведення. Як і при доведенні теореми 3, можна показати, що

$$|S(n_1, n_2, ..., n_r)/S'(n_1, n_2, ..., n_r)| \geq r,$$

тобто $m(S(n_1, n_2, ..., n_r)) \geq r$. А тому досить побудувати систему твірних групи $S(n_1, n_2, ..., n_r)$, яка складається з r елементів. Така побудова, як і при доведенні попередньої теореми, здійснюється індуктивно. При $r = 2$ потрібні системи твірних побудовано у праці [13]. Якщо ж $r > 2$, то до системи твірних групи $S(n_1, n_2, ..., n_{r-1})$, яка складається із $(r-1)$-го елемента, слід дописати ще одну таблицю вигляду

$$w_r = [\varepsilon, ..., \varepsilon, h_r(\bar{x}_{r-1})],$$

де функція $h_r(\bar{x}_{r-1})$ визначається так:

1′) якщо n_r – парне, то

$$h_r(\bar{x}_{r-1}) =$$

$$= \begin{cases} (1, 2, ..., n_r - 1), \\ \qquad\qquad \text{якщо } \bar{x}_{r-1} = (1, 0, 0, ..., 0), \\ (1, 2, ..., n_r), \\ \qquad\qquad \text{якщо } \bar{x}_{r-1} = (0, 1, 0, ..., 0), \\ \varepsilon \text{ в решті випадків;} \end{cases}$$

2′) якщо n_r – непарне, то

$$h_r(\bar{x}_{r-1}) =$$

$$= \begin{cases} (1, 2), \text{ якщо } \bar{x}_{r-1} = (1, 0, 0..., 0), \\ (1, 2, ..., n_r), \\ \qquad\qquad \text{якщо } \bar{x}_{r-1} = (0, 1, 0, ..., 0), \\ \varepsilon \quad \text{в решті випадків.} \end{cases}$$

Усі перевірки здійснюються аналогічно, як і при доведенні теореми 3 і тому ми їх опускаємо. Теорему 4 доведено.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Ashbacher M., Guralnic R.* Some applications of the first cohomology groups // J. of Algebra.— 1984.— N90.— P.446-460.

2. *Buzasi K., Kovacs L.G.* The minimal number of generators of wreath products of nilpotent groups // Contemporary Mathematics.—1989.— Vol.93.— P.115-121.

3. *Isaacs I.M., Thilo Zieschang.* Generating symmetric groups // Math. Notes.— 1995.— Vol.10.— P.734-739.

4. *Steinberg R.* Generators for simple groups // Canad. J. Math.— 1962.— Vol.14.— P.277-283.

5. *Сущанський В.І.* Групи ізометрій p-просторів Бера // Доповіді АН УРСР.— 1984.— Сер.А, N8.— С. 27-30.

6. *Kerber A.* Enumeration under finite group action: symmetry classes of mappings // "Combinatoire enumerative". Lect. Notes in Math.— 1986.— Vol.1224.— P.160-176.

7. *Kerber A.* Representation of permutation groups. Vol.1.— Berlin: Springer, 1974.— 160 p.

8. *Kerber A.* Representation of permutation groups. Vol.2.— Berlin: Springer, 1976.— 156 p.

9. *Neumann P.M.* On the structure of standart wreath products of groups // Math. Zeitschr.— 1964.— Vol.84.— P. 343-373.

10. *Сущанський В.І.* Вінцеві добутки за послідовностями груп підстановок та фінітноапроксимовні групи // Доповіді АН УРСР.— 1984.— Сер.А., N2.— С.19-21.

11. *Калужнин Л.А.* Об одном обобщении силовских p-подгрупп симметри ческих групп // Acta math. Hung.— 1951.— V.2, N3–4.— P.198-221.

12. *Устименко В.А.* Экспоненцирование симметрических групп – максимальная группа подстановок // Вопросы теории групп и гомологической алгебры.— Ярославль.— 1983.— С.19-33.

13. *Сікора В.С.* Діаметр графа Келі вінцевого добутку двох симетричних груп для двохелементної системи твірних // Наук. вісн. Чернівецького ун-ту: Зб. наук. праць. Математика.— Чернівці: ЧДУ, 2000.— Вип.76.— С.99-105.

Надійшла до редколегії 15.02.2005