УДК 517.926

©2005 р. Д.О. Мігуца, Н.В. Котенко

Чернівецький національний університет ім. Ю.Федьковича, Чернівці

ДОСЛІДЖЕННЯ СТАЦІОНАРНОГО РУХУ ТВЕРДОГО ТІЛА В НЕГОЛОВНИХ ОСЯХ ІНЕРЦІЇ

У роботі розглядається питання про застосування теореми Рауса-Ляпунова до дослідження стаціонарного руху твердого тіла відносно неголовних осей інерції.

The problem of applied of the Raus-Lyapunov theorem for research of stationary movement of a firm object concerning not main axes of inertia was studied in this paper .

У кінці 50-х р. XX ст. увагу великої кількості дослідників в галузі теоретичної та прикладної механіки звернуто на центральну задачу динаміки – задачу про рух твердого тіла навколо нерухомої точки. Раніше вивчення цієї задачі відбувалось в основному по шляху, який був накреслений Ейлером, Лагранжем, Ковалевською і був пов'язаний з інтегруванням рівнянь руху.

У подальшому головними напрямками були такі:

1) дослідження руху твердого тіла навколо центра мас із урахуванням гравітаційних, аеродинамічних, магнітних та інших сил;

2) вивчення стійкості стаціонарних рухів твердого тіла;

3) розробка різних способів керування рухом твердого тіла навколо центра мас.

Цим питанням присвячені праці авторів: Ляпунова А.М., Румянцева В.В., Белецького В.В., Четаева М.Г. та ін.

В останні роки XX ст. особливо інтенсивно велась розробка третього напрямку, який охоплює питання керування рухом твердого тіла, зокрема, вивчались питання стабілізації положень рівноваги й обертальних рухів. В цьому напрямку необхідно зазначити два підходи до цієї проблеми: пасивна стабілізація та стабілізація активного типу.

Пасивна стабілізація базується на використанні гравітаційних, аеродинамічних, магнітних сил у поєднанні з в'язким демпфіруванням. Цим питанням присвячені праці Садова Ю.А., Саричева В.А., Охоцимського Д.Є та ін.

Активна стабілізація здійснюється за допомогою реактивних двигунів і обертаючих мас – маховиків, гіроскопів. В цьому напрямку необхідно відмітити праці Раушенбаха Б.В., Токаря Є.Н., Сінгера С.Ф.

Проміжне місце займає метод напівпасивної стабілізації, який полягає у використанні пасивних засобів і частково на затраті енергії на підтримання рівномірного обертання додаткової маси (гіроскопа, маховика) відносно тіла, що стабілізується.

В останній час космічні дослідження стимулювали велику цікавість до дослідження стаціонарних рухів твердих тіл та їх систем у різних полях тяжіння. Одним із основних методів розв'язання задач цього напрямку є теорема Рауса-Ляпунова [3].

Даний метод полягає в наступному: якщо диференціальні рівняння руху механічної системи [5]

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \quad (i = \overline{1,n}) \qquad (1)$$

допускають певну групу перших інтегралів

$$V_j = V_j(x_1, x_2, \ldots, x_n) = m_j \quad (j = \overline{1,s}), \qquad (2)$$

то можливі стаціонарні рухи визначаються системою рівнянь вигляду

$$\frac{\partial K_i}{\partial x_i} = y_i = 0, \quad (i = \overline{1,n}), \qquad (3)$$

де

$$K = \sum_{j=1}^{s} \lambda_j V_j, \qquad (4)$$

а λ_j – сталі множники Лагранжа.

Систему рівнянь (3) можна трактувати як сім'ю перетворень Лежандра від змінних $x_1, x_2, \ldots, x_n$ до нових змінних $y_1, y_2, \ldots, y_n$, що параметризовано за допомогою величин λ_k $(k = \overline{1, s-1})$.

Дослідження простіших механічних систем показало, що сім'я перетворень Лежандра може мати особливості, тобто ранг матриці Гесса від функції K при деяких або при всіх значеннях λ може бути меншим від n. Тому для класифікації особливостей може служити ранг цієї матриці.

Як приклад застосування теореми Рауса-Ляпунова в роботі розглядається задача про рух твердого тіла в полі тяжіння точковою масою O_1, яка розташована на відстані R від нерухомої точки тіла. В цьому випадку силова функція U є функцією тільки від змінної γ_3 (γ_3 – напрямний косинус), тобто

$$U = U(\gamma_3). \tag{5}$$

Дослідження стаціонарних рухів твердого тіла проведемо за допомогою динамічних рівнянь Ейлера і кінематичних співвідношень Пуассона [1 – 3].

Для одержання рівнянь руху введемо дві системи координат: $OXYZ$ – нерухома система координат і $Oxyz$ – рухома система координат, осі якої не напрямлені за головними осями інерції твердого тіла.

Рух твердого тіла в заданому силовому полі описується динамічними рівняннями Ейлера [2, 4]:

$$\begin{gathered}
A\dot{p} - F\dot{q} - E\dot{r} + (C-B)qr - D(q^2 - r^2) - Epq + \\
+Fpr = \gamma_3 \frac{\partial U}{\partial \gamma_2} - \gamma_2 \frac{\partial U}{\partial \gamma_3}, \\
-F\dot{p} + B\dot{q} - D\dot{r} + (A-C)pr + E(p^2 - r^2) - Fqr + \\
+Dpq = \gamma_1 \frac{\partial U}{\partial \gamma_3} - \gamma_3 \frac{\partial U}{\partial \gamma_1}, \qquad (6) \\
-E\dot{p} - D\dot{q} + C\dot{r} + (B-A)pq + F(q^2 - p^2) - Dpr + \\
+Eqr = \gamma_2 \frac{\partial U}{\partial \gamma_1} - \gamma_1 \frac{\partial U}{\partial \gamma_2},
\end{gathered}$$

де: A, B, C – центральні моменти інерції; F, E, D – відцентрові моменти інерції тіла відносно нерухомої точки; p, q, r – проекції вектора кутової швидкості $\vec{\omega}$ на рухомі осі; U – силова функція, залежна тільки від кута γ_3; γ_1, γ_2, γ_3 – напрямні косинуси кутів осей рухомої системи координат.

Для визначеності одержаної системи рівнянь (6) необхідно скористатися кінематичними рівняннями Пуассона, які мають вигляд [1, 2]:

$$\begin{gathered}
\dot{\gamma}_1 = r\gamma_2 - q\gamma_3, \quad \dot{\gamma}_2 = p\gamma_3 - r\gamma_1, \\
\dot{\gamma}_3 = q\gamma_1 - p\gamma_2. \qquad (7)
\end{gathered}$$

Оскільки силова функція U залежить тільки від γ_3, то система рівнянь (6) перепишеться так:

$$\begin{gathered}
A\dot{p} - F\dot{q} - E\dot{r} + (C-B)qr - D(q^2 - r^2) - Epq + \\
+Fpr = -\gamma_2 \frac{\partial U}{\partial \gamma_3}, \\
-F\dot{p} + B\dot{q} - D\dot{r} + (A-C)pr + E(p^2 - r^2) - Fqr + \\
+Dpq = \gamma_1 \frac{\partial U}{\partial \gamma_3}, \qquad (8) \\
-E\dot{p} - D\dot{q} + C\dot{r} + (B-A)pq + F(q^2 - p^2) - Dpr + \\
+Eqr = 0.
\end{gathered}$$

Таким чином, рух твердого тіла відносно до осей рухомої системи координат $Oxyz$ описується системами диференціальних рівнянь (7) і (8). Інтегрування цих рівнянь дає можливість визначити невідомі функції p, q, r, γ_1, γ_2, γ_3.

Системи рівнянь, що описують рух твердого тіла, допускають три перших інтеграли [1, 3]:

– інтеграл живих сил:

$$\frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2) - Fpq - Epr - Dqr = U + h; \tag{9}$$

– інтеграл площ:

$$\begin{gathered}
Ap\gamma_1 + Bq\gamma_2 + Cr\gamma_3 - F(q\gamma_1 + p\gamma_2) - \\
-E(r\gamma_1 + p\gamma_3) - D(r\gamma_2 + q\gamma_3) = G; \qquad (10)
\end{gathered}$$

– тривіальний інтеграл

$$\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1, \tag{11}$$

де h і G – сталі величини.

Надалі будемо розглядати випадок, коли тверде тіло є динамічно-симетричним ($A = B$), причому два відцентрових моменти інерції E і D дорівнюють нулеві. В цьому випадку перші інтеграли (9) – (11) перепишемо наступним чином:

$$V_0 = \frac{1}{2}(Ap^2 + Aq^2 + Cr^2) - Fpq - U(\gamma_3) = h, \tag{12}$$

$$V_1 = Ap\gamma_1 + Aq\gamma_2 + Cr\gamma_3 - F(q\gamma_1 + p\gamma_2) = G, \tag{13}$$

$$V_2 = \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1. \tag{14}$$

Оскільки $E = D = 0$, то з третього рівняння системи (8) одержуємо:

$$C\dot{r} + F(q^2 - p^2) = 0. \tag{15}$$

Вважаючи F малою величиною і $q \approx p$, рівняння (15), з точністю до малої величини, допускає такий перший інтеграл:

$$V_3 = r = r_0 = \text{const}. \tag{16}$$

Виключаючи r з допомогою співвідношення (16), з (12) і (13) отримаємо

$$V_0 = \frac{1}{2}(Ap^2 + Aq^2 + Cr_0^2) - Fpq - U(\gamma_3) = h, \tag{17}$$

$$V_1 = Ap\gamma_1 + Aq\gamma_2 + Cr_0\gamma_3 - F(q\gamma_1 + p\gamma_2) = G, \tag{18}$$

$$V_2 = \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1. \tag{19}$$

Складемо функцію K з допомогою перших інтегралів (17) – (19):

$$K = \lambda_0 V_0 - \lambda_1 V_1 - \frac{1}{2}\lambda_2 V_2 \tag{20}$$

або

$$K = \frac{\lambda_0}{2}(Ap^2 + Aq^2 + Cr_0^2) - F\lambda_0 pq - \lambda_0 U(\gamma_3) - \lambda_1(Ap\gamma_1 + Aq\gamma_2 + Cr_0\gamma_3) + \lambda_1 F(q\gamma_1 + p\gamma_2) - \frac{1}{2}\lambda_2(\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2). \tag{21}$$

Знаючи функцію K, одержимо рівняння, що визначають многовиди стаціонарних рухів, тобто

$$\frac{\partial K}{\partial p} = Ap\lambda_0 - F\lambda_0 q - A\lambda_1\gamma_1 + F\lambda_1\gamma_2 = P = 0,$$

$$\frac{\partial K}{\partial q} = Aq\lambda_0 - F\lambda_0 p - A\lambda_1\gamma_2 + F\lambda_1\gamma_1 = Q = 0,$$

$$\frac{\partial K}{\partial \gamma_1} = -A\lambda_1 p + F\lambda_1 q - \lambda_2\gamma_1 = \Gamma_1 = 0, \tag{22}$$

$$\frac{\partial K}{\partial \gamma_2} = -Aq\lambda_1 + Fp\lambda_1 - \lambda_2\gamma_2 = \Gamma_2 = 0,$$

$$\frac{\partial K}{\partial \gamma_3} = -\lambda_0\frac{\partial U}{\partial \gamma_3} - Cr_0\lambda_1 - \lambda_2\gamma_3 = \Gamma_3 = 0.$$

Для складання якобіана перетворення від змінних p, q, γ_1, γ_2, γ_3 до змінних P, Q, Γ_1, Γ_2, Γ_3 знайдемо частинні похідні другого порядку від функції K за змінними p, q, γ_1, γ_2, γ_3:

$$\frac{\partial^2 K}{\partial p^2} = A\lambda_0,\ \frac{\partial^2 K}{\partial p\partial q} = -F\lambda_0,\ \frac{\partial^2 K}{\partial p\partial \gamma_1} = -A\lambda_1,$$

$$\frac{\partial^2 K}{\partial p\partial \gamma_2} = F\lambda_1,\ \frac{\partial^2 K}{\partial p\partial \gamma_3} = 0,\ \frac{\partial^2 K}{\partial q\partial p} = -\lambda_0 F,$$

$$\frac{\partial^2 K}{\partial q^2} = A\lambda_0,\ \frac{\partial^2 K}{\partial q\partial \gamma_1} = F\lambda_1,\ \frac{\partial^2 K}{\partial q\partial \gamma_2} = -A\lambda_1,$$

$$\frac{\partial^2 K}{\partial q\partial \gamma_3} = 0, \frac{\partial^2 K}{\partial \gamma_1\partial p} = -A\lambda_1,\ \frac{\partial^2 K}{\partial \gamma_1\partial q} = F\lambda_1,$$

$$\frac{\partial^2 K}{\partial \gamma_1^2} = -\lambda_2,\ \frac{\partial^2 K}{\partial \gamma_1\partial \gamma_2} = 0,\ \frac{\partial^2 K}{\partial \gamma_1\partial \gamma_3} = 0, \tag{23}$$

$$\frac{\partial^2 K}{\partial \gamma_2\partial p} = F\lambda_1,\ \frac{\partial^2 K}{\partial \gamma_2\partial q} = -A\lambda_1,\ \frac{\partial^2 K}{\partial \gamma_2\partial \gamma_1} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 K}{\partial \gamma_2^2} = -\lambda_2,\ \frac{\partial^2 K}{\partial \gamma_2\partial \gamma_3} = 0,\ \frac{\partial^2 K}{\partial \gamma_3\partial p} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 K}{\partial \gamma_3\partial q} = 0,\ \frac{\partial^2 K}{\partial \gamma_3\partial \gamma_1} = 0,\ \frac{\partial^2 K}{\partial \gamma_3\partial \gamma_2} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 K}{\partial \gamma_3^2} = -\lambda_0\frac{\partial^2 U}{\partial \gamma_3^2} - \lambda_2.$$

Складемо якобіан перетворення вигляду

$$\Delta =$$

$$
= \begin{vmatrix}
\frac{\partial^2 K}{\partial p^2} & \frac{\partial^2 K}{\partial p \partial \gamma_1} & \frac{\partial^2 K}{\partial p \partial q} & \frac{\partial^2 K}{\partial p \partial \gamma_2} & \frac{\partial^2 K}{\partial p \partial \gamma_3} \\
\frac{\partial^2 K}{\partial \gamma_1 \partial p} & \frac{\partial^2 K}{\partial \gamma_1^2} & \frac{\partial^2 K}{\partial \gamma_1 \partial q} & \frac{\partial^2 K}{\partial \gamma_1 \partial \gamma_2} & \frac{\partial^2 K}{\partial \gamma_1 \partial \gamma_3} \\
\frac{\partial^2 K}{\partial q \partial p} & \frac{\partial^2 K}{\partial q \partial \gamma_1} & \frac{\partial^2 K}{\partial q^2} & \frac{\partial^2 K}{\partial q \partial \gamma_2} & \frac{\partial^2 K}{\partial q \partial \gamma_3} \\
\frac{\partial^2 K}{\partial \gamma_2 \partial p} & \frac{\partial^2 K}{\partial \gamma_2 \partial \gamma_1} & \frac{\partial^2 K}{\partial \gamma_2 \partial q} & \frac{\partial^2 K}{\partial \gamma_2^2} & \frac{\partial^2 K}{\partial \gamma_2 \partial \gamma_3} \\
\frac{\partial^2 K}{\partial \gamma_3 \partial p} & \frac{\partial^2 K}{\partial \gamma_3 \partial \gamma_1} & \frac{\partial^2 K}{\partial \gamma_3 \partial q} & \frac{\partial^2 K}{\partial \gamma_3 \partial \gamma_2} & \frac{\partial^2 K}{\partial \gamma_3^2}
\end{vmatrix} \tag{24}
$$

Підставляючи (23) в (24), одержимо

$$
\Delta =
$$

$$
= \begin{vmatrix}
A\lambda_0 & -A\lambda_1 & -F\lambda_0 & F\lambda_1 & 0 \\
-A\lambda_1 & -\lambda_2 & F\lambda_1 & 0 & 0 \\
-\lambda_0 F & \lambda_1 F & A\lambda_0 & -A\lambda_1 & 0 \\
F\lambda_1 & 0 & -A\lambda_1 & -\lambda_2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda_2 - \lambda_0 \frac{\partial^2 U}{\partial \gamma_3^2}
\end{vmatrix} \tag{25}
$$

Обчислюючи визначник (25), якобіан перетворення набуває вигляду

$$
\Delta = -\left(\lambda_2 + \lambda_0 \frac{\partial^2 U}{\partial \gamma_3^2}\right)(A^2 - F^2)\times
$$

$$
\times[(A^2 - F^2)\lambda_1^4 + 2A\lambda_0\lambda_1^2\lambda_2 + \lambda_0\lambda_2^2]. \tag{26}
$$

Якщо у виразі (26) покласти $\lambda_0 = 1$, то одержимо:

$$
\Delta = -\left(\lambda_2 + \frac{\partial^2 U}{\partial \gamma_3^2}\right)(A^2 - F^2)\times
$$

$$
\times[(A\lambda_1^2 + \lambda_2)^2 - F\lambda_1^4] \tag{27}
$$

або

$$
\Delta = -\left(\lambda_2 + \frac{\partial^2 U}{\partial \gamma_3^2}\right)(A^2 - F^2)\times
$$

$$
\times[(A - F)\lambda_1^2 + \lambda_2][(A + F)\lambda_1^2 + \lambda_2]. \tag{28}
$$

Надалі будемо вважати, що $A \gg F$, тоді $A^2 - F^2 \neq 0$.

Розглянемо деякі випадки значення Якобіана.

1. Спочатку розглянемо випадок відмінності від нуля Якобіана.

Значення параметрів λ_1, λ_2, γ_3^0, для яких $\Delta \neq 0$, відповідають групі невироджених перетворень Лежандра. У цьому випадку ядро перетворення буде нульовим, тобто точці $P = Q = \Gamma_1 = \Gamma_3 = 0$ відповідає тільки одна з двох точок $p = q = \gamma_1 = \gamma_2 = 0$, $\gamma_3^0 = 1$ (або $p = q = \gamma_1 = \gamma_2 = 0$, $\gamma_3^0 = -1$).

З механічної точки зору ця частина многовиду стаціонарних рухів складається з перманентних обертань навколо вертикальної осі динамічної симетрії тіла.

2. Розглянемо тепер значення параметрів λ_1, λ_2, γ_3^0, при яких ранг Якобіана менше п'яти.

а) Нехай $(A\lambda_1^2 + \lambda_2)^2 - F^2\lambda_1^4 = 0$, $\lambda_2 + \frac{\partial^2 U}{\partial \gamma_3^2} \neq 0$.

У цьому випадку співрозмірність ядра перетворень дорівнює двом, оскільки змінні p, q, γ_1, γ_2, γ_3 зв'язані між собою двома незалежними рівняннями.

б) Якщо $(A\lambda_1^2 + \lambda_2)^2 - F^2\lambda_1^4 \neq 0$, $\lambda_2 + \left.\frac{\partial^2 U}{\partial \gamma_3^2}\right|_0 = 0$, що відповідає одиничній розмірності ядра, то многовид заповнений перманентними обертаннями навколо вертикалі з виродженою змінною γ_3.

в) При $(A\lambda_1^2 + \lambda_2)^2 - F^2\lambda_1^4 = 0$ і $\lambda_2 + \left.\frac{\partial^2 U}{\partial \gamma_3^2}\right|_0 = 0$ ядро має розмірність, що дорівнює двом, а многовид заповнений регулярними прецесіями й деякими перманентними обертаннями.

Якщо вважати рух твердого тіла відносно головних осей інерції, тобто $F = 0$, то вираз (27) набуде вигляду

$$
\Delta = -\left(\lambda_2 + \frac{\partial^2 U}{\partial \gamma_3^2}\right)A^2(A\lambda_1^2 + \lambda_2)^2, \tag{29}
$$

що збігається з результатом праці В.Д.Іртегова [3].

Розглянемо більш загальний випадок, тобто коли всі три відцентрові моменти інерції F, E, D відмінні від нуля. В цьому випадку функція K буде мати вигляд

$$K = \lambda_0 V_0 = \lambda_1 V_1 - \frac{1}{2}\lambda_2 V_2 = \lambda_0 \left[\frac{1}{2}(Ap^2 + \right.$$

$$\left. + Aq^2 + Cr^2) - Fpq - Epr - Dqr - U\right] - \lambda_1 \left[Ap\gamma_1 + \right.$$

$$+ Aq\gamma_2 + Cr\gamma_3 - F(q\gamma_1 + p\gamma_2) - E(r\gamma_1 + p\gamma_3) -$$

$$\left. - D(r\gamma_2 + q\gamma_3)\right] - \frac{1}{2}\lambda_2(\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2). \quad (30)$$

Рівняння многовидів стаціонарних рухів твердого тіла (22) запишуться так:

$$\frac{\partial K}{\partial p} = \lambda_0(Ap - Fq - Er) -$$

$$-\lambda_1(A\gamma_1 - F\gamma_2 - E\gamma_3) = P = 0,$$

$$\frac{\partial K}{\partial q} = \lambda_0(Aq - Fp - Dr) -$$

$$-\lambda_1(A\gamma_2 - F\gamma_1 - D\gamma_3) = Q = 0,$$

$$\frac{\partial K}{\partial r} = \lambda_0(Cr - Ep - Dq) -$$

$$-\lambda_1(C\gamma_3 - E\gamma_1 - D\gamma_2) = R = 0, \quad (31)$$

$$\frac{\partial K}{\partial \gamma_1} = -\lambda_1(Ap - Fq - Er) - \lambda_2\gamma_1 = \Gamma_1 = 0,$$

$$\frac{\partial K}{\partial \gamma_2} = -\lambda_1(Aq - Fp - Dr) - \lambda_2\gamma_2 = \Gamma_2 = 0,$$

$$\frac{\partial K}{\partial \gamma_3} = -\lambda_1(Cr - Ep - Dq) - \lambda_2\gamma_3 - \lambda_0\frac{\partial U}{\partial \gamma_3} =$$

$$= \Gamma_3 = 0.$$

Частинні похідні другого порядку від функції K за змінними p, q, r, γ_1, γ_2 і γ_3 мають вигляд:

$$\frac{\partial^2 K}{\partial p^2} = A\lambda_0, \quad \frac{\partial^2 K}{\partial p \partial q} = -\lambda_0 F, \quad \frac{\partial^2 K}{\partial p \partial r} = -\lambda_0 E,$$

$$\frac{\partial^2 K}{\partial p \partial \gamma_1} = -A\lambda_1, \quad \frac{\partial^2 K}{\partial p \partial \gamma_2} = \lambda_1 F, \quad \frac{\partial^2 K}{\partial p \partial \gamma_3} = E\lambda_1,$$

$$\frac{\partial^2 K}{\partial q \partial p} = -F\lambda_0, \quad \frac{\partial^2 K}{\partial q^2} = A\lambda_0, \quad \frac{\partial^2 K}{\partial q \partial r} = -D\lambda_0,$$

$$\frac{\partial^2 K}{\partial q \partial \gamma_1} = F\lambda_1, \quad \frac{\partial^2 K}{\partial q \partial \gamma_2} = -A\lambda_1, \quad \frac{\partial^2 K}{\partial q \partial \gamma_3} = D\lambda_1,$$

$$\frac{\partial^2 K}{\partial r \partial p} = -E\lambda_0, \quad \frac{\partial^2 K}{\partial r \partial q} = -D\lambda_0, \quad \frac{\partial^2 K}{\partial r^2} = C\lambda_0,$$

$$\frac{\partial^2 K}{\partial r \partial \gamma_1} = E\lambda_1, \quad \frac{\partial^2 K}{\partial r \partial \gamma_2} = D\lambda_1, \quad \frac{\partial^2 K}{\partial r \partial \gamma_3} = -C\lambda_1, \quad (32)$$

$$\frac{\partial^2 K}{\partial \gamma_1 \partial p} = -A\lambda_1, \quad \frac{\partial^2 K}{\partial \gamma_1 \partial q} = F\lambda_1, \quad \frac{\partial^2 K}{\partial \gamma_1 \partial r} = E\lambda_1,$$

$$\frac{\partial^2 K}{\partial \gamma_1^2} = -\lambda_2, \quad \frac{\partial^2 K}{\partial \gamma_1 \partial \gamma_2} = 0, \quad \frac{\partial^2 K}{\partial \gamma_1 \partial \gamma_3} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 K}{\partial \gamma_2 \partial p} = F\lambda_1, \quad \frac{\partial^2 K}{\partial \gamma_2 \partial q} = -A\lambda_1, \quad \frac{\partial^2 K}{\partial \gamma_2 \partial r} = D\lambda_1,$$

$$\frac{\partial^2 K}{\partial \gamma_2 \partial \gamma_1} = 0, \quad \frac{\partial^2 K}{\partial \gamma_2 \partial \gamma_3} = 0, \quad \frac{\partial^2 K}{\partial \gamma_2^2} = -\lambda_2,$$

$$\frac{\partial^2 K}{\partial \gamma_3 \partial p} = E\lambda_1, \quad \frac{\partial^2 K}{\partial \gamma_3 \partial q} = D\lambda_1, \quad \frac{\partial^2 K}{\partial \gamma_3 \partial r} = -C\lambda_1,$$

$$\frac{\partial^2 K}{\partial \gamma_3 \partial \gamma_1} = 0, \quad \frac{\partial^2 K}{\partial \gamma_3 \partial \gamma_2} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 K}{\partial \gamma_3^2} = -\lambda_2 - \lambda_0\frac{\partial^2 U}{\partial \gamma_3^2}.$$

У цьому випадку якобіан перетворення від змінних p, q, r, γ_1, γ_2, γ_3 до змінних P, Q, R, Γ_1, Γ_2, Γ_3 буде мати вигляд

$$\Delta =$$

$$= \begin{vmatrix} A\lambda_0 & -\lambda_0 F & -\lambda_0 E & -A\lambda_1 & \lambda_1 F & \lambda_1 E \\ -F\lambda_0 & A\lambda_0 & -D\lambda_0 & F\lambda_1 & -A\lambda_1 & D\lambda_1 \\ -E\lambda_0 & -D\lambda_0 & C\lambda_0 & E\lambda_1 & D\lambda_1 & -C\lambda_1 \\ -A\lambda_1 & \lambda_1 F & \lambda_1 E & -\lambda_2 & 0 & 0 \\ F\lambda_1 & -A\lambda_1 & D\lambda_1 & 0 & -\lambda_2 & 0 \\ E\lambda_1 & D\lambda_1 & -C\lambda_1 & 0 & 0 & -\lambda_2 - \lambda_0\frac{\partial^2 U}{\partial \gamma_3^2} \end{vmatrix} \quad (33)$$

Обчислюючи визначник (33) і покладаючи $\lambda_0 = 1$, одержимо

$$\Delta = (AE^2 + AD^2 + CF^2 + 2FDE - A^2C) \times$$

$$\times \left\{ \left(\lambda_2 + \frac{\partial^2 U}{\partial \gamma_3^2}\right) [(A\lambda_1^2 + \lambda_2)^2 - F_1\lambda_1^4] - \right.$$

$$-\lambda_1^6(AE^2 + AD^2 + CF^2 + 2FDE - A^2C) +$$

$$+2AC\lambda_1^4\lambda_2^2+C\lambda_1^2\lambda_2^2-(E^2+D^2)\lambda_2\lambda_1^4\Bigg\}. \quad (34)$$

Отже, вважаючи рухомі осі координат не напрямленими за головними осями інерції твердого тіла, якобіан буде мати більш складний вираз. Тому для того, щоб ранг Якобіана був меншим шести, необхідна рівність нулю обох дужок або хоча б однієї у співвідношенні (34).

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Белецкий В.В.* Движение искусственного спутника относительно центра масс.— М.: Наука, 1965.— 384 с.

2. *Бухгольц Н.Н.* Основной курс теоретической механики.— М.: Наука, 1969.— Ч.2.— 332 с.

3. *Иртегов В.Д.* Особенности многообразия стационарных движений // Проблемы аналитической механики, теорий устойчивости и управления.— М.: Наука, 1975.— С.154—160.

4. *Мігуца Д.О.* Дослідження руху твердого тіла в неголовних осях інерції методом малого параметру // Крайові задачі для диференціальних рівнянь: Зб. наук. пр.— К.: Ін-т математики НАН України, 2002.— Вип.5.— С.225—234.

5. *Мігуца Д.О.* Дослідження руху гіростата відносно неголовних осей інерції за допомогою змінних Колосова // Науковий вісник Чернівецького університету: Збірник наук. праць. Вип.150. Математика.— Чернівці: Рута, 2002.— С. 59—62.

Надійшла до редколегії 24.12.2004