УДК 517.51

©2005 р. **В.К. Маслюченко, В.В. Михайлюк**

Чернівецький національний університет ім. Ю.Федьковича, Чернівці

# ПРЯМА ЗОРҐЕНФРЕЯ І КОНАМІОКОВІ ПРОСТОРИ

Доведено, що пряма Зорґенфрея не є конаміоковим простором.

It is proved that Sorgenfrei line is not a co-Namioka space.

**1.** Для топологічних просторів $X$, $Y$ і $Z$ та відображення $f : X \times Y \to Z$ розглянемо множину $C_Y(f) = \{x \in X : \{x\} \times Y \subseteq C(f)\}$, де $C(f)$ – множина точок сукупної неперервності $f$. Топологічний простір $Y$ називається *конаміоковим*, якщо для кожного топологічного простору $X$ і довільної нарізно неперервної функції $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ множина $C_Y(f)$ залишкова в $X$. Використовуючи теорему Банаха про категорію, легко переконатися в тому, що простір $Y$ буде конаміоковим тоді й тільки тоді, коли для кожного берівського простору $X$ і будь-якої нарізно неперервної функції $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ множина $C_Y(f)$ містить деяку всюди щільну в $X$ множину $A$ типу $G_\delta$. Таким чином, поняття конаміокового простору є природним розширенням поняття конаміокового компакту, яке ввів Ґ. Дебс в [1].

Ж. Калбрі і Ж.-П. Труаллік [2] встановили, що кожний простір $Y$, який задовольняє другу аксіому зліченності, є конаміоковим. Легко навести (див. [3]) приклад метризовного несепарабельного простору $Y$, який не є конаміоковим. У зв'язку з цим природно постало питання про існування сепарабельного топологічного простору $Y$, який би задовольняв першу аксіому зліченності і не був конаміоковим. Тут ми доводимо, що таким простором є універсальний контрприклад – пряма Зорґенфрея.

**2.** Нагадаємо, що пряма Зорґенфрея $\mathbb{L}$ – це множина дійсних чисел, що наділена топологічною структурою, в якій околами точки $x$ вважаються такі множини $U \subseteq \mathbb{R}$, що $U \supseteq [x, x+\varepsilon)$ для деякого $\varepsilon > 0$. Пряма Зорґенфрея – це сепарабельний простір континуальної ваги, який задовольняє першу аксіому зліченності.

**Теорема.** *Існує нарізно неперервна функція $f : \mathbb{R} \times \mathbb{L} \to \mathbb{R}$, у якої $C_{\mathbb{L}}(f) = \emptyset$.*

**Доведення.** Нехай $D(f)$ – множина точок розриву відображення $f : X \times Y \to Z$, тобто $D(f) = (X \times Y) \setminus C(f)$, і $\mathrm{pr}_X : X \times Y \to X$ – проекція добутку $X \times Y$ на перший співмножник. Легко перевірити, що $C_Y(f) = X \setminus \mathrm{pr}_X(D(f))$. Таким чином, нам потрібно побудувати нарізно неперервну функцію $f : \mathbb{R} \times \mathbb{L} \to \mathbb{R}$, для якої $\mathrm{pr}_{\mathbb{R}}(D(f)) = \mathbb{R}$.

Нехай $X$ – це інтервал $\mathbb{U} = (0, 1)$ з топологією, індукованою з $\mathbb{R}$, а $Y$ – це той же інтервал, але з топологією, індукованою з $\mathbb{L}$. Очевидно, що $X$ гомеоморфний числовий прямій $\mathbb{R}$, а $Y$ – прямій Зорґенфрея $\mathbb{L}$. Тому досить побудувати приклад функції $f : X \times Y \to \mathbb{R}$, для якої $\mathrm{pr}_X(D(f)) = X$.

Розглянемо неспадну неперервну функцію $g : \mathbb{U} \to \mathbb{U}$, яка задовольняє такі умови:

(i) $\lim\limits_{t \to +0} g(t) = 0$, $\lim\limits_{t \to 1-0} g(t) = 1$;

(ii) відкрита множина $G = \bigcup\{\mathrm{int} g^{-1}(s) : s \in \mathbb{U}\}$ точок локальної сталості функції $g$ щільна в $\mathbb{U}$.

Прикладом такої функції є добре відомі *канторові сходи* [4, с. 391]. Ясно, що $g(\mathbb{U}) = \mathbb{U}$ і множина $G$ має зліченне число компонент зв'язності, які є інтервалами $V_n = (b_n, b_n + l_n)$, де $n \in \mathbf{N}$, причому $\overline{V}_n = [b_n, b_n + l_n] \subseteq \mathbb{U}$. Оскільки $\sum\limits_{n=1}^{\infty} l_n \le 1$, то $l_n \to 0$ при $n \to \infty$. Зрозуміло, що на кожному відрізку $\overline{V}_n$ функція $g$ стала і набуває значення $a_n = g(b_n)$. Виберемо число $h_n \in (0, l_n]$ так, щоб $a_n + h_n < 1$, і покладемо $U_n = (a_n, a_n + h_n)$ і $W_n = U_n \times V_n$. Нехай

$f_n : \mathbb{U}^2 \to [0,1]$ – нарізно неперервна функція, яка дорівнює нулю поза прямокутником $W_n$ і у якої $\omega_f(p_n) = 1$, де $p_n = (a_n, b_n)$. Таку функцію нескладно побудувати, модифікуючи, скажімо, відомий приклад Шварца. Оскільки інтервали $V_n$ попарно не перетинаються, то такими ж будуть і прямокутники $W_n$. Отже, формулою $f(p) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(p)$ визначається деяка функція $f : X \times Y \to \mathbb{R}$. Покажемо, що ця функція і є шуканою.

Якщо $y \in Y \backslash G$ то $f_y = 0$, а якщо $y \in G$, то $y \in V_n$ при деякому $n$ і тому $f_y = (f_n)_y$. Таким чином, $f$ неперервна відносно першої змінної. Для доведення неперервності $f$ відносно другої змінної розіб'ємо квадрат $\mathbb{U}^2$ на дві множини $A = \{(x,y) \in \mathbb{U}^2 : x \leq g(y)\}$ і $B = \{(x,y) \in \mathbb{U}^2 : x > g(y)\}$. Для точок $p = (x,y) \in W_n$ маємо $x > a_n = g(y)$, отже, $W_n \subseteq B$. Тому $f(p) = 0$ на $A$.

Нехай $p_0 = (x_0, y_0) \in A$. Тоді $(x_0, y) \in A$ при $y_0 \leq y < 1$. Справді, при таких $y$ маємо $g(y) \geq g(y_0) \geq x_0$, адже $g$ – неспадна функція. Таким чином, $f^{x_0}(y) = 0$ при $y_0 \leq y < 1$, отже, $f^{x_0}$ неперервна справа в точці $y_0$, тобто неперервна в точці $y_0$ відносно топології простору $Y$.

Нехай $p_0 \in B$. Оскільки функція $g$ неперервна, то множина $A$ замкнена в $\mathbb{U}^2$. Але $p_0 \notin A$, отже, евклідова відстань від $p_0$ до $A$ – це якесь додатне число $2\varepsilon$. Знайдемо такий номер $m$, що $l_n < \varepsilon$ при $n > m$. Нехай $W$ – відкритий $\varepsilon$-окіл точки $p_0$ відносно евклідової метрики $d$. Зауважимо, що точки прямокутника $W_n$ віддалені від множини $A$ на відстань, що не перевищує $h_n$, бо його сторона $\{a_n\} \times \overline{V}_n$ міститься в $A$. Крім того, $h_n \leq l_n$. Тому $W_n \bigcap W = \emptyset$ при $n > m$, бо якби існувала точка $p \in W_n \bigcap W$ при $n > m$, то $d(p_0, A) \leq d(p_0, p) + d(p, A) < \varepsilon + l_n < 2\varepsilon$, що неможливо. Таким чином, $W$ може перетинатися лише з прямокутниками $W_1, .., W_m$. Тому $f(p) = \sum\limits_{n=1}^{m} f_n(p)$ на $W$, отже, $f$ неперервна відносно другої змінної в точці $p_0$ у звичайній топології, а значить, і в топології простору $Y$.

Ми показали, що функція $f$ нарізно неперервна. Тепер з'ясуємо, що $pr_X(D(f)) = X$. Нехай $x_0 \in X$. Оскільки $g(\mathbb{U}) = \mathbb{U}$, то $g^{-1}(x_0) \neq \emptyset$. Якщо $x_0 = a_n$ при деякому $n$, то $g^{-1}(x_0) = \overline{V}_n \subseteq \mathbb{U}$, в іншому випадку множина $g^{-1}(x_0)$ одноточкова, бо функція $g$ монотонна і $x_0 \notin g(G)$. В тому чи іншому випадку множина $g^{-1}(x_0)$ має найбільший елемент $y_0$, який належить до $Y$. Покажемо, що $p_0 = (x_0, y_0) \in D(f)$. Нехай $\delta_0$ – довільне додатне число, для якого множина $W_0 = (x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0) \times [y_0, y_0 + \delta_0)$, що є базисним околом точки $p_0$ в добутку $X \times Y$, міститься в $X \times Y$. Оскільки $g(y_0) = x_0$ і функція $g$ неперервна й неспадна, то існує $\delta \in (0, \delta_0)$, таке, що $x_0 \leq g(y) < x_0 + \delta_0$, як тільки $y_0 \leq y < y_0 + \delta$. Множина $G$ точок сталості функції $G$ всюди щільна на інтеравалі $\mathbb{U}$. Тому $G \bigcap (y_0, y_0 + \delta) \neq \emptyset$. Тоді існує таке $n$, що $V_n \bigcap (y_0, y_0 + \delta) \neq \emptyset$. Покажемо, що $b_n \in (y_0, y_0 + \delta)$. Візьмемо деяку точку $y \in V_n \bigcap (y_0, y_0 + \delta)$. Оскільки $y_0 = \max g^{-1}(x_0)$, то $y \notin g^{-1}(x_0)$, тобто $g(y) \neq x_0$. Але $g(y) \geq x_0$, отже, $g(y) > x_0$. Зрозуміло, що $g(b_n) = g(y)$. Тому $g(b_n) > x_0 = g(y_0)$, звідки випливає, що $b_n > y_0$. Крім того, $b_n < y < y_0 + \delta$, отже, $b_n \in (y_0, y_0 + \delta)$, а тоді і $a_n = g(b_n) \in (x_0, x_0 + \delta_0)$. Точка $p_n = (a_n, b_n)$ належить множині $W = (x_0, x_0 + \delta_0) \times (y_0, y_0 + \delta)$, яка є її околом в евклідовій топології, причому $W \subseteq W_0$. Тому $\omega_{f_n}(W_0) \geq \omega_{f_n}(W) \geq 1$. Оскільки функція $f_n$ невід'ємна, то звідси випливає, що існує така точка $q \in W_0$, що $f_n(q) > 1/3$. Але $f(q) \geq f_n(q)$. Крім того , $f(p_0) = 0$, бо $p_0 \in A$. Тому $|f(q) - f(p_0)| = f(q) > 1/3$, звідки й отримуємо, що $p_0 \in D(f)$.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Debs G.* Points de continuité d'une function séparément continue // Proc. Amer. Math. Soc.— 1986.— **97**, № 1.— P.167—176.

2. *Calbrix J., Troallic J.-P.* Applications séparément continues // C.R. Acad. Sc. Paris. Séc. A.— 1979.— **288**.— P.647—648.

3. *Piotrowski Z.* Separate and joint continuity // Real Anal. Exch.— 1985.— 86.— **11**, № 2.— P.293—322.

4. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа.— М.: Наука, 1989.— 624 с.

Стаття надійшла до редколегії 25.02.2005