УДК 517.51

©2005 р. **Ю.С. Лінчук**

Чернівецький національний університет ім. Ю. Федьковича, Чернівці

ПРО ЕКВІВАЛЕНТНІСТЬ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ ОПЕРАТОРІВ НЕСКІНЧЕННОГО ПОРЯДКУ

Встановлено критерій еквівалентності двох диференціальних операторів нескінченного порядку зі сталими коефіцієнтами відносно узагальненого диференціювання, що діють у просторі многочленів. За допомогою цього критерію вивчаються деякі властивості операторів узагальненого зсуву.

The criterion of equivalence of two differential operators of infinite order with fixed coefficients respectively to generalized differentiations in spaces of polynomialsis obtained. Some properties of operators generalized shift with the help of this criterion is investigated.

У [1] вивчені умови еквівалентності диференціального оператора нескінченного порядку зі сталими коефіцієнтами до степеня оператора диференціювання в класі лінійних неперервних операторів, що діють у просторах функцій, аналітичних в кругових областях. У цьому повідомленні досліджені умови еквівалентності диференціальних операторів нескінченного порядку відносно узагальненого диференціювання зі сталими коефіцієнтами у просторі многочленів.

Через S позначатимемо лінійний простір усіх многочленів над полем комплексних чисел, а через $\mathcal{L}(S)$ – множину всіх лінійних операторів, які діють в S. Для фіксованої послідовності ненульових комплексних чисел $\{\alpha_n : n \geq 0\}$ через D_α позначатимемо оператор узагальненого диференціювання, який діє на многочлен $P(z) = \sum\limits_{n=0}^{m} p_n z^n$ за правилом $(D_\alpha P)(z) = \sum\limits_{n=1}^{m} p_n \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n} z^{n-1}$. Відомо, що оператор $T \in \mathcal{L}(S)$ є переставним з оператором D_α тоді і тільки тоді, коли його можна подати у вигляді диференціального оператора нескінченного порядку зі сталими коефіцієнтами, тобто у вигляді

$$(TP)(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (D_\alpha^k P)(z),$$

де $\{c_k : k \geq 0\}$ – деяка послідовність комплексних чисел [2].

Наведемо спочатку деякі допоміжні твердження.

Лема 1. *Нехай $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ – довільна послідовність комплексних чисел, причому $a_0 \neq 0$. Тоді диференціальний оператор нескінченного порядку зі сталими коефіцієнтами $A = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k D_\alpha^k$ є ізоморфізмом в $\mathcal{L}(S)$.*

Доведення. Нехай $a(t) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k t^k$ – формальний степеневий ряд (ф.с.р.), що відповідає оператору A. Через $b(t)$ позначимо ф.с.р., який є оберненим до $a(t)$, тобто $b(t) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k t^k$ і добуток за Коші $a(t)$ та $b(t)$ дорівнює одиниці. Тоді оператор $A_1 = \sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k D_\alpha^k$ є оберненим до оператора A. Дійсно, оскільки $a(t)b(t) = 1$, то для кожного натурального n

$$\sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i} = 0 \qquad (1)$$

і, крім того, $a_0 b_0 = 1$. Тому, якщо $P(z)$ — многочлен, степінь якого не перевищує m, то, використовуючи формули (1) і той факт, що $D_\alpha^k P(z) = 0$ при $k > m$, одержимо:

$$a(D_\alpha)b(D_\alpha)P(z) =$$

$$= \left(\sum_{k=0}^{m} a_k D_\alpha^k\right)\left(\sum_{k=0}^{m} b_k D_\alpha^k\right) P(z) =$$

$$= P(z) + \sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{k} a_i b_{k-i}\right) D_\alpha^k P(z) +$$

$$+ \sum_{k=m+1}^{2m} d_k D_\alpha^k P(z) = P(z).$$

(Тут d_k, $k = \overline{m+1, 2m}$ – деякі комплексні числа.) Таким чином, $AA_1 = A_1A = E$,де E – одиничний оператор. Отже, A_1 дійсно є оберненим оператором до A.

Нагадаємо, що лінійні оператори A та B називаються еквівалентними в S ($A \sim B$), якщо існує ізоморфізм $T \in \mathcal{L}(S)$, для якого $TA = BT$.

Лема 2. *Нехай* $A = \sum\limits_{k=n}^{\infty} a_k D_\alpha^k$, *причому* $n \geq 1$ *і* $a_n \neq 0$. *Тоді оператор* A *еквівалентний в* S *до* D_α^n.

Доведення. Побудуємо ізоморфізм $T \in \mathcal{L}(S)$ для якого виконується рівність

$$TA = D_\alpha^n T. \tag{2}$$

Оператор $T \in \mathcal{L}(S)$ шукатимемо у вигляді

$$TQ(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{Q^{(k)}(0)}{k!} P_k(z), \tag{3}$$

де $Q(z)$ – довільний многочлен, а $P_k(z) = Tz^k$ деякі многочлени, $k = 0, 1, \ldots$. Покажемо, що існує послідовність многочленів $(P_k(z))_{k=0}^{\infty}$, причому степінь многочлена $P_k(z)$ дорівнює k, і для кожного $k = 0, 1, \ldots$ виконується рівність

$$(TA)z^k = (D_\alpha^n T)z^k. \tag{4}$$

Покладемо $P_k(z) = z^k$ при $k = \overline{0, n-1}$. Тоді рівність (4) буде виконуватися при $k = \overline{0, n-1}$. Припустимо, що многочлени $P_0(z), P_1(z), \ldots, P_{s-1}(z)$ вже вибрано, де $s \geq n-1$. Покладемо

$$P_s(z) = \sum_{k=n}^{s} a_k \frac{\alpha_{s-k}}{\alpha_s} \mathcal{J}_\alpha^n P_{s-k}(z), \tag{5}$$

де $\mathcal{J}_\alpha$ – оператор узагальненого інтегрування, що побудований за послідовністю $(\alpha_n)_{n=0}^{\infty}$ і діє на многочлен $P(z) = \sum\limits_{n=0}^{m} p_n z^n$ за правилом: $(\mathcal{J}_\alpha P)(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} p_n z^{n+1}$. Оскільки $a_n \neq 0$ і степінь кожного многочлена $P_{s-k}(z)$ дорівнює $s-k$, $k = n, \ldots, s$, то з (5) одержуємо, що степінь многочлена $P_s(z)$ дорівнює s. Безпосередньою перевіркою переконуємося, що рівність (4) буде виконуватися при $k = s$. Дійсно,

$$(TA)z^s = T\left(\sum_{k=n}^{s} a_k \frac{\alpha_{s-k}}{\alpha_s} z^{s-k}\right) =$$

$$= \sum_{k=n}^{s} a_k \frac{\alpha_{s-k}}{\alpha_s} P_{s-k}(z) =$$

$$= \sum_{k=n}^{s} a_k \frac{\alpha_{s-k}}{\alpha_s} D_\alpha^n \mathcal{J}_\alpha^n P_{s-k}(z) =$$

$$= D_\alpha^n P_s(z) = (D_\alpha^n T)z^k.$$

Таким чином, ми індуктивним способом побудували таку послідовність многочленів $(P_k(z))_{k=0}^{\infty}$, що відповідний оператор T, що визначається формулою (3) задовольняє співвідношення (2). Оскільки $Tz^k = P_k(z)$ і степінь многочлена $P_k(z)$ дорівнює k, $k = 0, 1, \ldots$, то побудований оператор T є ізоморфізмом в $\mathcal{L}(S)$.

Вивчимо далі умови еквівалентності в $\mathcal{L}(S)$ двох диференціальних операторів нескінченного порядку з постійними коефіцієнтами. Для диференціального оператора нескінченного порядку $A = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n D_\alpha^n$ позначимо $N(A) = min\{n \in \mathbb{N} : a_n \neq 0\}$. Якщо $a_n = 0$ при $n \geq 1$, то покладаємо $N(A) = \infty$.

Теорема. *Для того щоб оператор* $A = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n D_\alpha^n$ *був еквівалентним в* S *до оператора* $B = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n D_\alpha^n$, *необхідно і достатньо, щоб виконувалися умови:* $a_0 = b_0$ *і* $N(A) = N(B)$.

Доведення. Необхідність. Нехай $A \sim B$ в S. Тоді існує ізоморфізм $T \in \mathcal{L}(S)$, для якого виконується рівність

$$TA = BT. \tag{6}$$

Доведемо спочатку, що $a_0 = b_0$. Нехай $a_0 \neq b_0$. Тоді з рівності (6) випливає, що

$$T(A - a_0E) = (B - a_0E)T, \qquad (7)$$

тобто оператори $A - a_0E$ та $B - a_0E$ також еквівалентні в S. Оскільки $b_0 - a_0 \neq 0$, то за лемою 1 оператор $B - a_0E$ є ізоморфізмом в $\mathcal{L}(S)$, а оператор $A - a_0E$ – ні, оскільки він має нетривіальний нуль. Одержано суперечність, отже $a_0 = b_0$. Використовуючи лему 2 одержуємо, що $(A - a_0E) \sim D_\alpha^{N(A)}$, $(B - a_0E) \sim D_\alpha^{N(B)}$. Внаслідок транзитивності еквівалентності операторів звідси і з рівності (7) випливає, що $D_\alpha^{N(A)} \sim D_\alpha^{N(B)}$ в S. Тому $N(A) = N(B)$, бо у еквівалентних операторів розмірності ядер однакові.

Достатність. Нехай $a_0 = b_0$ і $N(A) = N(B) = N$. Тоді, за лемою 2, кожен з операторів $A - a_0E$ та $B - a_0E$ еквівалентний в S до D_α^N, а значить вони еквівалентні між собою. З еквівалентності цих операторів випливає, що$A \sim B$ в S.

Наведемо наслідки з доведеної теореми.

Для довільного ненульового комплексного числа h оператор узагальненого зсуву T_h, що відповідає оператору D_α, лінійно діє в просторі S за правилом $(T_hP)(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \alpha_k h^k (D_\alpha^k P)(z)$.

Наслідок 1. *Нехай h_1 і h_2 – довільні фіксовані ненульові комплексні числа. Тоді оператори узагальненого зсуву T_{h_1} та T_{h_2} є еквівалентними в S.*

Опишемо далі розв'язки $T \in \mathcal{L}(S)$ операторного рівняння виду

$$TT_{h_1} = T_{h_2}T. \qquad (8)$$

За доведенням леми 2 існують ізоморфізми T_1 і T_2 з класу $\mathcal{L}(S)$, для яких

$$T_1(T_{h_1} - \alpha_0E) = D_\alpha T_1, \qquad (9)$$

$$T_2(T_{h_2} - \alpha_0E) = D_\alpha T_2. \qquad (10)$$

Рівність (8) рівносильна тому, що

$$T(T_{h_1} - \alpha_0E) = (T_{h_2} - \alpha_0E)T. \qquad (11)$$

Із співвідношень (9)-(10) випливає, що

$$(T_2TT_1^{-1})D_\alpha = D_\alpha(T_2TT_1^{-1}).$$

Тому оператор $T_2TT_1^{-1}$ є переставним з D_α і значить він подається у вигляді диференціального оператора нескінченного порядку зі сталими коефіцієнтами [2], тобто

$$T_2TT_1^{-1} = C(D_\alpha),$$

де $C(D_\alpha) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k D_\alpha^k$, а $(c_k)_{k=0}^{\infty}$ – деяка послідовність комплексних чисел. Звідси випливає, що

$$T = T_2^{-1}C(D_\alpha)T_1. \qquad (12)$$

Таким чином, є правильним наступне твердження.

Наслідок 2. *Нехай h_1 і h_2 – довільні ненульові комплексні числа. Для того, щоб оператор $T \in \mathcal{L}(S)$ був розв'язком операторного рівняння (8), необхідно і досить, щоб він подавався у вигляді (12), де T_1, T_2 – ізоморфізми з $\mathcal{L}(S)$, які визначаються рівностями (9)–(10), а $C(D_\alpha)$ – деякий диференціальний оператор нескінченного порядку зі сталими коефіцієнтами.*

У випадку $h_1 = h_2 = h$ одержуємо твердження.

Наслідок 3. *Нехай h – фіксоване ненульове комплексне числа. Для того, щоб оператор $T \in \mathcal{L}(S)$ був переставним з оператором T_h, необхідно і досить, щоб він подавався у вигляді диференціального оператора нескінченного порядку відносно D_α зі сталими коефіцієнтами.*

Іншим способом це твердження доведене в [3].

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Нагнибида Н.И., Олийнык Н.П.* Об эквивалентности дифференциальных операторов бесконечного порядка в аналитических пространствах // Мат. заметки.— 1977.— **21**, № 1.— С.33—37.

2. *Коробейник Ю.Ф.* Операторы сдвига на числовых семействах.— Ростов-на-Дону: Изд-во Ростовского ун-та, 1983.— 156 с.

3. *Лінчук Ю.С.* Комутант оператора узагальненого зсуву // Наук. вісн. Чернівецького ун-ту. Математика. Вип. 46.— Чернівці: Рута, 1999.— С.72—75.

Стаття надійшла до редколегії 1.03.2005