УДК 517.51

©2005 р. Н.Є. Лінчук

Чернівецький національний університет ім. Ю.Федьковича, Чернівці

ЗОБРАЖЕННЯ РОЗВ'ЯЗКІВ ДЕЯКИХ ОПЕРАТОРНИХ РІВНЯНЬ, ЩО МІСТЯТЬ ПРАВІ ОБЕРНЕНІ ОПЕРАТОРИ ДО ОПЕРАТОРА ПОММ'Є

У класі лінійних неперервних операторів, що діють у просторах функцій, аналітичних у довільних однозв'язних областях, описано розв'язки одного класу операторних рівнянь, які містять праві обернені оператори до оператора Помм'є.

The solutions of one class of operator equations which contain right inverse to Pomme operator in the class of linear continuous operators acting in spaces of functions which are analytic in arbitrary simply connected domains are described.

При вивченні різних класів лінійних неперервних операторів, які діють у просторах аналітичних функцій, важливе місце займають оператори, що пов'язані з оператором множення на аналітичні функції [1–3]. Нехай G – довільна однозв'язна область у $\mathbb{C}$. Через $\mathcal{H}(G)$ – позначимо простір усіх аналітичних у G функцій, що наділений топологією компактної збіжності [4]. Нехай $\mathcal{H}'(G)$ – простір усіх лінійних неперервних функціоналів на $\mathcal{H}(G)$. Простір $\mathcal{H}'(G)$ ізоморфний простору $\mathcal{H}(\complement G)$ – локально аналітичних на множині $\complement G$ функцій [4]. Якщо G_1 і G_2 – області в $\mathbb{C}$, то символом $\mathcal{L}(\mathcal{H}(G_1),\mathcal{H}(G_2))$ позначимо множину всіх лінійних неперервних операторів, які діють з $\mathcal{H}(G_1)$ в $\mathcal{H}(G_2)$.

Для фіксованого функціонала $L \in \mathcal{H}'(G)$ в [5] вивчалися різні властивості оператора A, який діє в $\mathcal{H}(G)$ за правилом $(Af)(z) = zf(z) + L(f)$. У даній статті деякі результати з [5] узагальнюються на випадок лінійних неперервних операторів $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}(G_1),\mathcal{H}(G_2))$.

Нехай G_1 та G_2 – довільні однозв'язні області комплексної площини. Надалі вважатимемо, що $G_1 \bigcap G_2 \neq \varnothing$. Нехай $l(\lambda)$ – функція, яка локально аналітична на множині $\complement\,(G_1 \bigcap G_2)$. Тоді функція $l(\lambda)$ є характеристичною функцією деякого лінійного неперервного функціонала L, який діє як на просторі $\mathcal{H}(G_1)$, так і на просторі $\mathcal{H}(G_2)$ [4]. Опишемо розв'язки операторного рівняння

$$T(U_z + L) = (U_z + L)T \qquad (1)$$

у класі лінійних неперервних операторів $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}(G_1),\mathcal{H}(G_2))$. Припустимо, що оператор $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}(G_1),\mathcal{H}(G_2))$ з характеристичною функцією $t(\lambda,z) = T\left[\frac{1}{\lambda - \tilde{z}}\right]$ задовольняє співвідношення (1). Подіявши обома частинами рівності (1) на функцію $\frac{1}{\lambda-z}$ одержимо, що характеристична функція $t(\lambda,z)$ оператора T на множині $\mathcal{F}=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \overline{\complement G_1^{(N(n))}} \times G_2^{(n)}$ [3] задовольняє співвідношення

$$(\lambda - z)t(\lambda,z) = (1 - l(\lambda))\varphi(z) + \tilde{l}(\lambda), \qquad (2)$$

де $\varphi(z) = T1 \in \mathcal{H}(G_2)$, а $\tilde{l}(\lambda) = \underset{z}{L}(t(\lambda,z)) \in \mathcal{H}(\complement G_1)$. Розглянемо можливі випадки.

I. $G_2 \subset G_1$. У цьому випадку з (2) одержуємо, що на множині $\mathcal{F}$

$$t(\lambda,z) = \frac{\tilde{l}(\lambda)}{\lambda - z} + (1 - l(\lambda))\frac{\varphi(z)}{\lambda - z}. \qquad (3)$$

Для знаходження $\tilde{l}(\lambda)$ подіємо функціоналом L на рівність (3). Одержимо, що $(1-l(\lambda))\tilde{l}(\lambda) = (1-l(\lambda))\underset{\zeta}{L}\left(\frac{\varphi(\zeta)}{\lambda-\zeta}\right)$. Оскільки $1 - l(\lambda) \not\equiv 0$ на $\complement G_1$ (бо $l(\infty) = 0$ за означенням локально аналітичної на множині $\complement G_1$ функції $l(\lambda)$), то $\tilde{l}(\lambda) = \underset{\zeta}{L}\left(\frac{\varphi(\zeta)}{\lambda-\zeta}\right)$. Тому

$$t(\lambda,z) = \frac{1}{\lambda - z}\underset{\zeta}{L}\left(\frac{\varphi(\zeta)}{\lambda-\zeta}\right) + \frac{(1-l(\lambda))\varphi(z)}{\lambda - z}. \qquad (4)$$

Розглянемо оператор $T_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{H}(G_1),\mathcal{H}(G_2))$, який діє за правилом $(T_1 f)(z) =$

$$= \varphi(z)f(z) + \underset{\zeta}{L}\left[\frac{(\varphi(\zeta)-\varphi(z))(f(\zeta)-f(z))}{\zeta - z}\right].$$

Беспосередніми обчисленнями переконуємося в тому, що характеристична функція оператора T_1 збігається з функцією $t(\lambda, z)$, яка визначається формулою (4). Тому $T = T_1$, і ми довели необхідність умов наступної теореми.

Теорема 1. *Нехай G_1 і G_2 – довільні однозв'язні області комплексної площини, причому $G_1 \subset G_2$, а функціонал L породжений характеристичною функцією $l(\lambda)$, яка локально аналітична на множині $\complement G_1$. Для того, щоб оператор $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}(G_1),\mathcal{H}(G_2))$ був розв'язком операторного рівняння (1), необхідно й достатньо, щоб він подавався у вигляді*

$$(Tf)(z) = \varphi(z)f(z) + \\ + \underset{\zeta}{L}\left[\frac{(\varphi(\zeta)-\varphi(z))(f(\zeta)-f(z))}{\zeta - z}\right], \qquad (5)$$

де $\varphi \in \mathcal{H}(G_2)$.

Достатність умов теореми 1 встановлюється безпосередньою перевіркою.

II. Нехай $G_2 \not\subset G_1$, тоді $G_2 \bigcap \complement G_1 \neq \varnothing$. Тому існує точка z_0 така, що $z_0 \in G_2$ і $z_0 \notin G_1$. Не порушуючи загальності, надалі вважатимемо, що $z_0 \in G_2^{(n)}$ при $n = 1, 2, \ldots$. Зафіксуємо довільне натуральне n. Тоді існує окіл $V_\delta = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \delta\}$ точки z_0, який міститься одночасно в $G_2^{(n)}$ і $\complement \overline{G_1^{(N(n))}}$. Покладаючи в (2) довільне $\lambda \in V_\delta(z_0)$ і $z = \lambda$, одержимо, що при $\lambda \in V_\delta(z_0)$:

$$(1 - l(\lambda))\varphi(\lambda) + \tilde{l}(\lambda) = 0. \qquad (6)$$

З (6) випливає, що $\varphi(\lambda) = \frac{\tilde{l}(\lambda)}{l(\lambda)-1}$ при $\lambda \in G_2^{(n)} \bigcap \complement \overline{G_1^{(N(n))}}$.

Нехай $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ – всі нулі функції $1 - l(\lambda)$, які лежать в $\complement G_1 \bigcap \complement G_2$, і кратності цих нулів відповідно дорівнюють $n_1, n_2, \ldots, n_m$ (нулів є скінченна кількість за властивістю аналітичності функції $1 - l(\lambda)$ і того, що $l(\infty) = 0$). Не порушуючи загальності, вважатимемо, що на множині $G_1 \backslash \overline{G_1^{(N(n))}}$ функція $1 - l(\lambda)$ не перетворюється в нуль. Тоді формулою $\varphi(\lambda) = \frac{\tilde{l}(\lambda)}{l(\lambda)-1}$ функція $\varphi(\lambda)$ аналітично продовжується до аналітичної функції на множині $\left(G_2^{(n)} \bigcup \complement \overline{G_1^{(N(n))}}\right) \backslash \{\lambda_i : i = \overline{1,m}\}$ і $\varphi(\infty) = 0$. Точки λ_i можуть бути полюсами для функції $\varphi(\lambda)$, причому порядок полюса λ_i не перевищує n_i, $i = \overline{1,m}$. Якщо позначити $P(\lambda) = \prod\limits_{i=1}^{m}(\lambda - \lambda_i)^{n_i}$, то функцію $\varphi(\lambda)$ можна подати у вигляді $\varphi(\lambda) = \frac{\varphi_1(\lambda)}{P(\lambda)}$, де $\varphi_1(\lambda)$ – аналітична на множині $G_2^{(n)} \bigcup \complement \overline{G_1^{(N(n))}}$ і $\varphi(\infty) = 0$. В силу довільності n одержуємо, що рівність $\varphi(\lambda) = \frac{\varphi_1(\lambda)}{P(\lambda)}$ виконується при $\lambda \in G_2 \bigcup \complement \overline{G_1^{(N(n))}}$ і функція $\varphi_1(\lambda)$ є аналітичною на цій множині. З рівності (6) одержуємо, що

$$\tilde{l}(\lambda) = -(1 - l(\lambda))\varphi(\lambda) \qquad (7)$$

при $\lambda \in \left(\complement \overline{G_1^{(N(n))}}\right) \backslash S$, де $S = \{\lambda_i : i = \overline{1,m}\}$. Тому з (2) одержуємо, що при $z \in G_2^{(n)}$ і $\lambda \in \left(\complement \overline{G_1^{(N(n))}}\right) \backslash S$:

$$t(\lambda, z) = (1 - l(\lambda))\frac{\varphi(z) - \varphi(\lambda)}{\lambda - z}. \qquad (8)$$

Оскільки $\tilde{l}(\lambda) = \underset{z}{L}(t(\lambda, z))$, то з (8) одержуємо, що

$$\tilde{l}(\lambda) = (1 - l(\lambda))\underset{z}{L}\left(\frac{\varphi(z) - \varphi(\lambda)}{\lambda - z}\right). \qquad (9)$$

З (7) і (9) одержуємо, що при $\lambda \in \left(\complement \overline{G_1^{(N(n))}}\right) \backslash S$

$$\varphi(\lambda) = \underset{z}{L}\left(\frac{\varphi(z) - \varphi(\lambda)}{\lambda - z}\right). \qquad (10)$$

Таким чином доведено необхідність умов наступного твердження.

Твердження. Нехай G_1 і G_2 – довільні однозв'язні області комплексної площини, причому $G_2 \bigcap G_1 \neq \varnothing$ і $G_2 \bigcap \complement G_1 \neq \varnothing$, а $l(\lambda)$ – характеристична функція функціонала L, яка локально аналітична на множині $\complement(G_1 \bigcap G_2)$. Для того щоб функція $t(\lambda,z)$ була характеристичною функцією оператора $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}(G_1),\mathcal{H}(G_2))$, який задовольняє операторне рівняння (1), необхідно й достатньо, щоб $t(\lambda,z)$ подавалася у вигляді (8), де $\varphi(z)$ – деяка функція з простору $\mathcal{H}(G_2)$, яка аналітично продовжується на множину $\left(G_2 \bigcup \complement\overline{G_1}\right) \setminus S$, причому $\varphi(\infty) = 0$, а $P(\lambda)\varphi(\lambda)$ аналітично продовжується на множину $G_2 \bigcup \complement\overline{G_1}$ і, крім того, при $\lambda \in \complement\overline{G_1} \setminus S$ функція $\varphi(\lambda)$ задовольняє (10).

Доведення. Достатність. При виконанні умов твердження формулою (8) визначається деяка локально аналітична на множині $\complement G_1 \times G_2$ функція $t(\lambda,z)$. Тоді існує єдиний оператор $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}(G_1),\mathcal{H}(G_2))$, для якого $t(\lambda,z)$ є характеристичною, тобто $t(\lambda,z) = T[\frac{1}{\lambda-\tilde{z}}]$. Залишається перевірити, що T задовольняє рівність (1). Дійсно, нехай $t_1(\lambda,z)$ і $t_2(\lambda,z)$ – це характеристичні функції відповідно до операторів $T(U_z+L)$ та $(U_z+L)T$. Тоді на множині $\mathcal{F}$ матимемо:

$$t_1(\lambda,z) = \lambda t(\lambda,z) + (l(\lambda)-1)\varphi(z) =$$

$$= (1-l(\lambda))\left(\lambda\frac{\varphi(z)-\varphi(\lambda)}{\lambda-z} - \varphi(z)\right) =$$

$$= (1-l(\lambda))\frac{z\varphi(z)-\lambda\varphi(\lambda)}{\lambda-z};$$

$$t_2(\lambda,z) = z(1-l(\lambda))\frac{\varphi(z)-\varphi(\lambda)}{\lambda-z} +$$

$$+(1-l(\lambda))\underset{z}{L}\left(\frac{\varphi(z)-\varphi(\lambda)}{\lambda-z}\right) =$$

$$= (1-l(\lambda))\left(z\frac{\varphi(z)-\varphi(\lambda)}{\lambda-z} - \varphi(\lambda)\right) =$$

$$= (1-l(\lambda))\frac{z\varphi(z)-\lambda\varphi(\lambda)}{\lambda-z}.$$

Тому оператор T задовольняє рівність (1).

Відновлюючи оператор T за його характеристичною функцією [4], одержуємо, що правильною є наступна теорема.

Теорема 2. *При виконанні умов твердження загальний розв'язок операторного рівняння (1) в класі операторів $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}(G_1),\mathcal{H}(G_2))$ дається формулою*

$$(Tf)(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_z} t(\lambda,z)f(\lambda)d\lambda,$$

де функція $t(\lambda,z)$ визначається формулою (8), а контур γ_z вибирається згідно з означенням локально аналітичної на множині $\complement G_1 \times G_2$ функції $t(\lambda,z)$ [4].

Для ілюстрації теореми 2 розглянемо один частинний випадок операторного рівняння (1). Нехай G_1 і G_2 – довільні однозв'язні області в $\mathbb{C}$, причому $0 \in G_1 \bigcap G_2$, $G_2 \bigcap \complement G_1 \neq \varnothing$ і $1 \notin G_2$. Нехай, крім того, $L(f) = f(0)$, тобто $l(\lambda) = \frac{1}{\lambda}$. Тоді функція $\varphi(\lambda)$ є розв'язком рівняння (10) в цьому випадку тоді й лише тоді, коли $\varphi(\lambda) = \frac{C}{\lambda-1}$, де C – довільна стала. Отже, $t(\lambda,z) = \frac{C}{(z-1)\lambda}$. Тому в класі $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}(G_1),\mathcal{H}(G_2))$ загальний розв'язок операторного рівняння $T(U_z+\delta_0) = (U_z+\delta_0)T$, де $\delta_0(f) = f(0)$, дається формулою $(Tf)(z) = C\frac{f(0)}{z-1}$, де C – довільна стала.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Нагнибида Н.И.* Операторы, перестановочные с оператрами умножения на аналитические функции, и связанные с ними квазистепенные базисы // В кн.: Теория функций, функциональный анализ и их приложения. Вып.13.— Харьков: Вища школа, 1971.— С.63—67.
2. *Захарюта В.П., Царьков М.Ю.* Операторы, коммутирующие в пространствах аналитических функций одного переменного // Мат. заметки.— 1973.— **13**, вып 2.— С.269—277.
3. *Линчук Н.Е., Линчук С.С.* Об одном классе операторных уравнений в аналитических пространствах // Укр. мат. журн.— 1983.— **35**, № 4.— С.510—515.
4. *Köthe G.* Dualität in der Funktionentheorie // J. reine und angew. Math.— 1953.— 191.— S.30—49.
5. *Линчук Н.Е.* Сверточное представление некоторых классов операторов, связанных с умножением на аналитические функции, и их применения // Укр. мат. журн.— 1984.— **36**, № 5.— С.626—631.

Стаття надійшла до редколегії 15.02.2005