УДК 517.956.4

©2005 р. В.В. Лаюк

Інститут прикладних проблем математики і механіки ім. Я.С. Підстригача НАН України, Львів

ФУНДАМЕНТАЛЬНИЙ РОЗВ'ЯЗОК ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ ОДНОГО КЛАСУ ВИРОДЖЕНИХ ПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ ТИПУ КОЛМОГОРОВА

Розглянуто один клас вироджених параболічних рівнянь довільного порядку. Знайдена лінійна заміна змінних, яка зводить рівняння з цього класу до вироджених параболічних рівнянь довільного порядку, які є природними узагальненнями класичного рівняння дифузії з інерцією Колмогорова. Встановлено умови на коефіцієнти рівняння, за яких запропонована заміна змінних є невиродженою. За допомогою цієї заміни змінних поширено відомий результат про фундаментальний розв'язок задачі Коші для рівнянь типу Колмогорова на розглянутий клас рівнянь.

A class of degenerate parabolic equations of any order is considered. It is found a linear change of variables which reduces the equations from this class to degenerate parabolic equations of any order, which are natural generalizations of the classical Kolmogorov's equations of diffusion with inertia. Conditions on coefficients of the equations under which the offered change of variables is nondegenerate are established. By means of this change of variables the well-known result about the fundamental solution of the Cauchy problem for equations of the Kolmogorov type is disseminated on the considered class of the equations.

На початку 70-х років минулого століття С.Д. Ейдельман і А.П. Малицька почали вивчати вироджені параболічні рівняння структури Колмогорова довільного порядку. Для таких рівнянь у випадку, коли коефіцієнти можуть залежати лише від часової змінної, побудовано фундаментальний розв'язок задачі Коші (ФРЗК), вивчено його властивості і з їх допомогою доведено теореми про існування та єдиність розв'язків задачі Коші, а також встановлено деякі властивості розв'язків.

Як і для невироджених параболічних рівнянь, для рівнянь типу Колмогорова у випадку, коли коефіцієнти сталі або залежать лише від часової змінної, вдається одержати повне аналітичне описання ФРЗК і з його допомогою встановити досить точні результати про коректну розв'язність задачі Коші та інтегральне зображення розв'язків. Такі результати одержані С.Д. Івасишеним і Л.М. Андросовою [1 – 3] (див. також [4]). Метою даної статті є поширення цих результатів на дещо ширший клас вироджених параболічних рівнянь.

Розглянемо випадок виродження за двома групами змінних. Для цього вважатимемо, що n-вимірна просторова змінна x складається з n_1-вимірної змінної $x_1 := (x_{11}, \dots, x_{1n_1})$, n_2-вимірної змінної $x_2 := (x_{21}, \dots, x_{2n_2})$ і n_3-вимірної змінної $x_3 := (x_{31}, \dots, x_{3n_3})$, тобто $x = (x_1, x_2, x_3)$. Тут n_1, n_2 і n_3 – такі натуральні числа, що $n_3 \le n_2 \le n_1$ і $n_1 + n_2 + n_3 = n$. Відповідно до цього мультиіндекс $k \in \mathbb{Z}_+^n$ записуватимемо у вигляді $k := (k_1, k_2, k_3)$, де $k_l := \left(k_{l_1}, \dots, k_{l_{n_l}}\right) \in \mathbb{Z}_+^{n_l}$, $l \in \{1, 2, 3\}$.

Для заданого числа $T > 0$ розглянемо рівняння вигляду

$$\left(\partial_t - \sum_{|k_1| \le 2b} a_{k_1}(t)\partial_{x_1}^{k_1} - \sum_{j=1}^{n_2}\left(\sum_{l=1}^{n_1} b_{lj}^1 x_{1l}\right)\partial_{x_{2j}} - \sum_{j=1}^{n_3}\left(\sum_{l=1}^{n_2} b_{lj}^2 x_{2l}\right)\partial_{x_{3j}}\right)u = 0, \qquad (1)$$

$$(t, x) \in \Pi_{(0,T]},$$

де $\Pi_{(0,T]} := \{(t,x) | t \in (0,T], x \in \mathbb{R}^n\}$.

Припускатимемо виконаними такі умови:

1) коефіцієнти $a_{k_1}(t)$, $t \in [0,T]$, $|k_1| \le 2b$, неперервні та існує стала $\delta > 0$ така, що для будь-яких $t \in [0,T]$ і $\sigma_1 \in \mathbb{R}^{n_1}$ справджується нерівність

$$\operatorname{Re} \sum_{|k_1|=2b} a_{k_1}(t)(i\sigma_1)^{k_1} \le -\delta\,|\sigma_1|^{2b}; \qquad (2)$$

2) коефіцієнти b^1_{lj}, $l \in \{1,\dots,n_1\}$, $j \in \{1, ..., n_2\}$, і b^2_{lj}, $l \in \{1, ..., n_2\}$, $j \in \{1, ..., n_3\}$, сталі та складені з них матриці $B^1 := \begin{pmatrix} B^1_0 & B^1_1 \\ \multicolumn{2}{c}{B^1_2} \end{pmatrix}$ і $B^2 := \begin{pmatrix} B^2_0 \\ B^2_1 \end{pmatrix}$ задовольняють умови

$$\begin{cases} |(B^1_0\ B^1_1)| \ne 0, \\ |B^2_0| \ne 0, \end{cases}$$

де B^1_0, B^1_1, B^1_2, B^2_0 і B^2_1– матриці розмірів $n_2 \times n_3$, $n_2 \times (n_2 - n_3)$, $(n_1 - n_2) \times n_2$, $n_3 \times n_3$ і $(n_2 - n_3) \times n_3$ відповідно.

Будемо використовувати точки

$$X(t) := (X_1(t), X_2(t), X_3(t)), \quad X_1(t) := x_1,$$

$$X_2(t) := x_2 + t(B^1)'x_1,$$

$$X_3(t) := x_3 + t(B^2)'x_2 + \frac{1}{2}t^2(B^2)'(B^1)'x_1,$$

$$t > 0,$$

побудовані за точкою $x \in \mathbb{R}^n$. Аналогічно будуються точки $Y(t)$ та $\Xi(t)$ за точками y та ξ відповідно.

Зробимо в рівнянні (1) заміну змінних за допомогою такої системи рівностей:

$$\begin{cases} x'_{1j} = \sum\limits_{i=1}^{n_2} \left(\sum\limits_{k=1}^{n_1} b^1_{ki} x_{1k} \right) b^2_{ij}, j \in \{1, ..., n_3\}, \\ x'_{1j} = \sum\limits_{i=1}^{n_1} b^1_{ij} x_{1i}, \ \ j \in \{n_3 + 1, ..., n_2\}, \\ x'_{1j} = x_{1j}, \ \ j \in \{n_2 + 1, ..., n_1\}, \\ x'_{2j} = \sum\limits_{i=1}^{n_2} b^2_{ij} x_{2i}, \ \ j \in \{1, ..., n_3\}, \\ x'_{2j} = x_{2j}, \ \ j \in \{n_3 + 1, ..., n_2\}, \\ x'_{3j} = x_{3j}, \ \ j \in \{1, ..., n_3\}. \end{cases} \qquad (3)$$

Твердження.*За умови 2) заміна змінних (3) є невиродженою.*

◀ Треба переконатись у тому, що визначник системи (3) відмінний від нуля. Випишемо матрицю системи (3). Вона має вигляд

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & O & O \\ O & A_2 & O \\ O & O & A_3 \end{pmatrix},$$

де A_1, A_2 і A_3 – матриці відповідно до розмірів $n_1 \times n_1$, $n_2 \times n_2$ і $n_3 \times n_3$, а O – нульові матриці відповідних розмірів. Визначник матриці A, очевидно, дорівнює добутку визначників матриць A_1, A_2, A_3, тобто

$$|A| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot |A_3|.$$

Покажемо, що визначники матриць A_1, A_2, A_3 відмінні від нуля. Маємо

$$|A_1| =$$

$$= \begin{vmatrix} \sum\limits_{k=1}^{n_2} b^1_{1k}b^2_{k1} & \cdots & \sum\limits_{k=1}^{n_2} b^1_{n_2k}b^2_{k1} & \sum\limits_{k=1}^{n_2} b^1_{n_2+1k}b^2_{k1} & \cdots & \sum\limits_{k=1}^{n_2} b^1_{n_1k}b^2_{k1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \sum\limits_{k=1}^{n_2} b^1_{1k}b^2_{kn_3} & \cdots & \sum\limits_{k=1}^{n_2} b^1_{n_2k}b^2_{kn_3} & \sum\limits_{k=1}^{n_2} b^1_{n_2+1k}b^2_{kn_3} & \cdots & \sum\limits_{k=1}^{n_2} b^1_{n_1k}b^2_{kn_3} \\ b^1_{1n_3+1} & \cdots & b^1_{n_2n_1+1} & b^1_{n_2+1n_3+1} & \cdots & b^1_{n_1n_3+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ b^1_{1n_2} & \cdots & b^1_{n_2n_2} & b^1_{n_2+1n_2} & \cdots & b^1_{n_1n_2} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \sum\limits_{k=1}^{n_2} b^1_{1k}b^2_{k1} & \cdots & \sum\limits_{k=1}^{n_2} b^1_{n_2k}b^2_{k1} & 0 \ldots\ldots 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \ddots \ddots \vdots \\ \sum\limits_{k=1}^{n_2} b^1_{1k}b^2_{kn_3} & \cdots & \sum\limits_{k=1}^{n_2} b^1_{n_2k}b^2_{kn_3} & 0 \ldots\ldots 0 \\ b^1_{1n_3+1} & \cdots & b^1_{n_2n_1+1} & 0 \ldots\ldots 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \ddots \ddots \vdots \\ b^1_{1n_2} & \cdots & b^1_{n_2n_2} & 0 \ldots\ldots 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1\ 0\ \ldots 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & 0\ 1\ \ldots 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0\ 0\ \ldots 1 \end{vmatrix} =$$

$$
=\begin{vmatrix}
\sum\limits_{k=1}^{n_3} b^1_{1k}b^2_{k1} & \dots & \sum\limits_{k=1}^{n_3} b^1_{n_2k}b^2_{k1} & 0 & \dots & \dots & 0\\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots\\
\sum\limits_{k=1}^{n_3} b^1_{1k}b^2_{kn_3} & \dots & \sum\limits_{k=1}^{n_3} b^1_{n_2k}b^2_{kn_3} & 0 & \dots & \dots & 0\\
b^1_{1n_3+1} & \dots & b^1_{n_2n_1+1} & 0 & \dots & \dots & 0\\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots\\
b^1_{1n_2} & \dots & b^1_{n_2n_2} & 0 & \dots & \dots & 0\\
0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0\\
\vdots & \ddots & \vdots & 0 & 1 & \dots & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1
\end{vmatrix}=
$$

$$
=\begin{vmatrix}
\sum\limits_{k=1}^{n_3} b^1_{1k}b^2_{k1} & \dots & \sum\limits_{k=1}^{n_3} b^1_{n_2k}b^2_{k1}\\
\vdots & \vdots & \vdots\\
\sum\limits_{k=1}^{n_3} b^1_{1k}b^2_{kn_3} & \dots & \sum\limits_{k=1}^{n_3} b^1_{n_2k}b^2_{kn_3}\\
b^1_{1n_3+1} & \dots & b^1_{n_2n_1+1}\\
\vdots & \ddots & \vdots\\
b^1_{1n_2} & \dots & b^1_{n_2n_2}
\end{vmatrix}=
$$

$$
=\begin{vmatrix}
\sum\limits_{k=1}^{n_3} b^1_{1k}b^2_{k1} & \dots & \sum\limits_{k=1}^{n_3} b^1_{1k}b^2_{kn_3} & b^1_{1n_3+1} & \dots & b^1_{1n_2}\\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\
\sum\limits_{k=1}^{n_3} b^1_{n_2k}b^2_{k1} & \dots & \sum\limits_{k=1}^{n_3} b^1_{n_2k}b^2_{kn_3} & b^1_{n_2n_1+1} & \dots & b^1_{n_2n_2}
\end{vmatrix}=
$$

$$
=\left|\begin{pmatrix}
b^1_{11} & \dots & b^1_{1n_3} & b^1_{1n_3+1} & \dots & b^1_{1n_2}\\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\
b^1_{n_21} & \dots & b^1_{n_2n_3} & b^1_{n_2n_3+1} & \dots & b^1_{n_2n_2}
\end{pmatrix}\times\right.
$$

$$
\left.\times\begin{pmatrix}
b^2_{11} & \dots & b^2_{1n_3} & 0 & \dots & 0\\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\
b^2_{n_31} & \dots & b^2_{n_3n_3} & 0 & \dots & 0\\
0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0\\
\vdots & \ddots & \vdots & 0 & \ddots & 0\\
0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1
\end{pmatrix}\right|=
$$

$$
=\left|\left(B_0^1\,B_0^2\right)\right|\cdot\begin{vmatrix} B_0^2 & 0\\ 0 & I\end{vmatrix}=\left|\left(B_0^1\,B_0^2\right)\right|\cdot\left|B_0^2\right|\neq 0,
$$

$$
|A_2|=\begin{vmatrix}
b^2_{11} & \dots & b^2_{n_31} & b^2_{n_3+1,1} & \dots & \dots & b^2_{n_21}\\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots\\
b^2_{1n_3} & \dots & b^2_{n_2n_3} & b^2_{n_2+1,n_3} & \dots & \dots & b^2_{n_2n_3}\\
0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0\\
\vdots & \ddots & \vdots & 0 & 1 & \ddots & 0\\
0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1
\end{vmatrix}=
$$

$$
=\begin{vmatrix}
b^2_{11} & \dots & b^2_{n_31} & 0 & \dots & \dots & 0\\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots\\
b^2_{1n_3} & \dots & b^2_{n_2n_3} & 0 & \dots & \dots & 0\\
0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0\\
\vdots & \ddots & \vdots & 0 & 1 & \ddots & 0\\
0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1
\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}
b^2_{11} & \dots & b^2_{n_31}\\
\vdots & \ddots & \vdots\\
b^2_{1n_3} & \dots & b^2_{n_2n_3}
\end{vmatrix}=
$$

$$
=\begin{vmatrix}
b^2_{11} & \dots & b^2_{1n_3}\\
\vdots & \ddots & \vdots\\
b^2_{n_31} & \dots & b^2_{n_2n_3}
\end{vmatrix}=\left|B_0^2\right|\neq 0,
$$

$$
|A_3|=\begin{vmatrix}
1 & 0 & \dots & 0\\
0 & 1 & \dots & 0\\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\
0 & 0 & 0 & 1
\end{vmatrix}=|I|=1\neq 0.
$$

Отже, справді заміна змінних (3) є невиродженою. ►

Після здійснення заміни змінних (3) рівняння (1) набуде такого вигляду:

$$
\left(\partial_t-\sum_{|k_1|\le 2b} a'_{k_1}(t)\,\partial^{k_1}_{x'_1}-\sum_{j=1}^{n_2} x'_{1j}\partial_{x'_{2j}}-\right.
$$

$$
\left.-\sum_{j=1}^{n_3} x'_{2j}\partial_{x'_{3j}}\right)u=0,\quad (t,\,x')\in\Pi_{(0,T]}. \quad (4)
$$

Зауважимо, що коефіцієнти a'_{k_1}, $|k_1|\le 2b$, рівняння (4) також неперервні та задовольняють нерівність, аналогічну нерівності (2).

Повне аналітичне описання ФРЗК для рівняння (4) дано в теоремі 3.1 з [4]. За його допомогою і заміни (3) одержуємо наступний основний результат статті.

Теорема. *Якщо виконуються умови 1) і 2), то правильні такі твердження:*

1) для рівняння (1) існує єдиний ФРЗК G;

2) функція G та її похідні допускають продовження в комплексний простір $\mathbb{C}^n$ і для цих продовжень правильні формули

$$
\partial_x^k\partial_\xi^l G(t,x+iy;\tau,\xi+i\eta)=(t-\tau)^{-M-M_{kl}}\times
$$

$$
\times\Omega_{kl}(t,\tau,z)\big|_{z=(X(t-\tau)-\xi)_{t-\tau}+i(Y(t-\tau)-\eta)_{t-\tau}},
$$

$$
0\le\tau<t\le T,\ \{x,y;\xi,\eta\}\subset\mathbb{R}^n,\ \{k,\,l\}\subset\mathbb{Z}^n_+,
$$

в яких $M_{kl}:=(|k_1|+|l_1|)/(2b)+(1+1/(2b))(|k_2|+|l_2|)+(2+1/(2b))(|k_3|+|l_3|)$,

$M := \sum_{j=1}^{3}(j-1+1/(2b))n_j$, $x_t := (t^{-1/(2b)}x_1, t^{-1-1/(2b)}x_2, t^{-2-1/(2b)}x_3$, $\Omega_{kl}(t,\tau,z)$, $z \in \mathbb{C}^n$, *при фіксованих* t *і* τ *є цілими функціями від* z *порядку зростання* $q := 2b/(2b-1)$ *і цього ж порядку спадання при* $z = x \in \mathbb{R}^n$*;*

3) справджуються оцінки

$$\left|\partial_x^k \partial_\xi^l G(t,x;\tau,\xi)\right| \le$$
$$\le C_{kl}(t-\tau)^{-M-M_{kl}} E_c^{(1)}(t,x;\tau,\xi),$$
$$0 \le \tau < t \le T, \quad \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n, \quad \{k,l\} \subset \mathbb{Z}_+^n,$$

де

$$E_c^{(1)}(t,x;\tau,\xi) := \exp\left\{-c\sum_{j=1}^{3}(t-\tau)^{1-jq} \times \right.$$
$$\left. \times |X_j(t-\tau)-\xi_j|^q\right\},$$

C_{kl} c *і* c' *– додатні сталі, які залежать тільки від чисел* n_1, n_2, n_3, b, T, $\max\limits_{t\in[0,T],|k_1|\le 2b}|a_{k_1}(t)|$, *сталої* δ *з умови 1) та коефіцієнтів матриць* B^1 *і* B^2*;*

4) має місце формула

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t,x;\tau,\xi)d\xi = \exp\left\{(t-\tau)\times \right.$$
$$\left. \times \int\limits_0^1 a_0\left(\tau+(t-\tau)\beta\right)d\beta\right\},$$
$$0 \le \tau < t \le T, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

5) для $0 \le \tau < t \le T$ *і* $x \in \mathbb{R}^n$ *виконуються рівності*

$$\partial_x^k \int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t,x;\tau,\xi)d\xi = 0, \quad k \in \mathbb{Z}_+^n \setminus \{0\};$$

$$\partial_{x_2}^{k_2}\partial_{x_3}^{k_3} \int\limits_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}} G(t,x;\tau,\xi)d\xi_2 d\xi_3 = 0,$$
$$(k_2,k_3) \in \mathbb{Z}_+^{n_2+n_3}\setminus\{0\};$$

$$\partial_{x_3}^{k_3} \int\limits_{\mathbb{R}^{n_3}} G(t,x;\tau,\xi)d\xi_3 = 0, \quad k_3 \in \mathbb{Z}_+^{n_3}\setminus\{0\}.$$

Зауваження 1. Спираючись на цю теорему, для рівняння (1) доводяться теореми про коректну розв'язність задачі Коші та інтегральні зображення розв'язків, аналогічні теоремам 3.7 і 3.8 з [4].

Зауваження 2. Результати, подібні вищенаведеним, правильні й для рівняння

$$\left(\partial_t - \sum_{||k_1||\le 1} a_{k_1}(t)\partial_{x_1}^{k_1} - \sum_{j=1}^{n_2}\left(\sum_{l=1}^{n_1} b_{lj}^1 x_{1l}\right)\partial_{x_{2j}} - \right.$$
$$\left. - \sum_{j=1}^{n_3}\left(\sum_{l=1}^{n_2} b_{lj}^2 x_{2l}\right)\partial_{x_{3j}}\right)u = 0,$$

де $||k_1|| := \sum\limits_{j=1}^{n_1}(k_{1j}/(2b_j))$, за умови неперервності коефіцієнтів a_{k_1}, $||k_1|| \le 1$, умови

$$\mathrm{Re}\sum_{||k_1||=1} a_{k_1}(t)(i\sigma_1)^{k_1} \le -\delta\sum_{j=1}^{n_1}\sigma_{1j}^{2b_j},$$
$$t \in [0,T], \sigma_1 \in \mathbb{R}^{n_1},$$

та умови 2). При цьому замість теореми 3.1 використовується теорема 3.5 з [4].

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Ивасишен С.Д.* О начальных значениях решений ультрапараболических уравнений // Успехи мат. наук.— 1988.— **43**, № 4.— С.188—189.

2. *Ивасишен С.Д., Андросова Л.Н.* Об интегральном представлении и начальных значениях решений вырожденных параболических уравнений // Докл. АН УССР. Сер.А.— 1989.— № 5.— С.16—19.

3. *Ивасишен С.Д. Андросова Л.Н.* Об интегральном представлении решений одного класса вырожденных параболических уравнений типа Колмогорова // Дифференц. уравнения.— 1991.— **27**, № 3.— С.479—487.

4. *Eidelman S.D., Ivasyshen S.D., Kochubei A.N.* Analytic Methods in the Theory of Differential and Pseudo-Differential Equations of Parabolic Type.— Basel-Boston-Berlin: Birkhauser Verlag, 2004.— 390 p.— (Operator Theory: Advances and Applications. Vol.152).

Надійшла до редколегії 14.06.2005