УДК 517.925

©2005 р. В.А. Касьянова

Одеський національний університет імені І.І. Мечникова, Одеса

# АСИМПТОТИЧНЕ ПОВОДЖЕННЯ ЗНИКАЮЧИХ РОЗВ'ЯЗКІВ ІСТОТНО НЕЛІНІЙНИХ НЕАВТОНОМНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Для рівнянь другого порядку, що містять у правій частині суму доданків із нелінійностями різних типів, досліджено в особливих випадках питання про існування та асимптотику одного класу зникаючих при $t \uparrow \omega$ $(\omega \le +\infty)$ неколивних розв'язків.

The question of the existence and asymptotic of one class solutions disappearing under $t \uparrow \omega$ was studied in special cases for the second order differential equations, containing in the right part the items sum with the non-linearity of different types.

**1. Вступ.** Розглядається диференціальне рівняння

$$y'' = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k p_k(t)[1 + r_k(t)]\varphi_k(y), \qquad (1.1)$$

де $\alpha_k \in \{-1; 1\}$ $(k = \overline{1, m})$, $p_k : [a, \omega[ \longrightarrow ]0, +\infty[$ $(k = \overline{1, m})$- неперервно диференційовні функції, $r_k : [a, \omega[ \longrightarrow \mathbb{R}$ $(k = \overline{1, m})$- неперервні функції, що задовольняють умови

$$\lim_{t \uparrow \omega} r_k(t) = 0, \quad k = \overline{1, m}, \qquad (1.2)$$

$-\infty < a < \omega \le +\infty$, а $\varphi_k : ]0, y_0] \longrightarrow ]0, +\infty[$ $(k = \overline{1, m};\ 0 < y_0 < +\infty)$- двічі неперервно диференційовні функції такі, що

$$\lim_{y \downarrow 0} \varphi_k(y) = \varphi_k^0 > 0, \quad k = \overline{1, m_1}, [1] \qquad (1.3)$$

$$\lim_{y \downarrow 0} \varphi_k(y) = \begin{cases} \text{або } 0, \\ \text{або } +\infty, \end{cases} \quad k = \overline{m_1 + 1, m}, \qquad (1.4)$$

причому

$$\varphi_k'(y) \ne 0 \quad \text{при} \quad y \in ]0, y_0],$$
$$\lim_{y \downarrow 0} \frac{y \varphi_k''(y)}{\varphi_k'(y)} = \sigma_k = \text{const}, \qquad (1.5)$$

якщо $k \in \{1, \ldots, m\}$ й відмінне від тих $k \in \{1, \ldots, m_1\}$, для яких $\varphi_k(y) \equiv \varphi_k^0 > 0$.

[1] Тут і нижче вважаємо, що $m_1 = 0$ $(m_1 = m)$, якщо виконується тільки умова (1.4) (тільки умова (1.3)).

Покладемо

$$\pi_\omega(t) = \begin{cases} t, & \text{якщо} \quad \omega = +\infty, \\ t - \omega, & \text{якщо} \quad \omega < +\infty \end{cases}$$

и введемо наступне

**Означення 1.1.** *Розв'язок $y : [t_0, \omega[ \longrightarrow ]0, y_0]$ $(t_0 \in [a, \omega[)$ рівняння (1.1) будемо називати $\Pi_\omega^0(\mu_0)$- розв'язком, де $-\infty \le \mu_0 \le +\infty$, якщо він задовольняє наступні три умови:*

1) $\lim_{t \uparrow \omega} y(t) = 0;$

2) $y'(t) < 0$ *при* $t \in [t_0, \omega[,$

$$\lim_{t \uparrow \omega} y'(t) = \begin{cases} \textit{або} \quad 0, \\ \textit{або} \quad -\infty; \end{cases}$$

3) $$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t) y''(t)}{y'(t)} = \mu_0, \quad \textit{причому}$$

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{y''(t) y(t)}{[y'(t)]^2} = 1, \ \textit{якщо} \quad \mu_0 = \pm\infty.$$

У праці [1] для кожного з можливих значень $\mu_0$ і кожного $i \in \{1, \ldots, m\}$ вказано умови, при виконанні яких будь-який $\Pi_\omega^0(\mu_0)$- розв'язок рівняння (1.1) має властивість

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{p_j(t) \varphi_j(y(t))}{p_i(t) \varphi_i(y(t))} = 0 \text{ при всіх } j \ne i. \qquad (1.6)$$

Питання про існування та асимптотику $\Pi^0_\omega(\mu_0)$- розв'язків рівняння (1.1) з'ясовано в [1] повністю у випадку, коли $m_1 \geq 1$ й умови (1.6) виконуються при $i \in \{1, \dots, m_1\}$. Випадок, коли $m_1 < m$ й умови (1.6) виконуються при $i \in \{m_1+1, \dots, m\}$ досліджений в [1] лише для $\Pi^0_\omega(\mu_0)$- розв'язків, в яких $\mu_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1\}$. Найбільш складним для дослідження $\Pi^0_\omega(\mu_0)$- розв'язкам зі значеннями $\mu_0 = \pm\infty$, $\mu_0 = -1$ і $\mu_0 = 0$ присвячена дана робота.

При $m_1 < m$ уведемо для кожного $i \in \{m_1+1, \dots, m\}$ допоміжні функції

$$\Phi_i(y) = \int\limits_{B_i}^{y} \frac{dz}{\varphi_i(z)},$$

$$I_{i1}(t) = \int\limits_{A_{i1}}^{t} p_i(s)\, ds, \quad Q_{i1}(t) = \int\limits_{A'_{i1}}^{t} I_{i1}(s)\, ds,$$

$$I_{i2}(t) = \int\limits_{A_{i2}}^{t} \pi_\omega(s) p_i(s)\, ds, \quad Q_{i2}(t) = \int\limits_{A'_{i2}}^{t} \frac{p_i(s)\, ds}{I_{i2}(s)},$$

де

$$B_i = \begin{cases} y_0, & \text{якщо} \quad \int\limits_0^{y_0} \frac{dz}{\varphi_i(z)} = +\infty, \\ 0, & \text{якщо} \quad \int\limits_0^{y_0} \frac{dz}{\varphi_i(z)} < +\infty, \end{cases}$$

а кожна з границь інтегрування $A_{i1}, A_{i2}, A'_{i1}$ $(A'_{i2})$ дорівнює $a$ (будь-якому значенню $b$ з проміжка $]a, \omega[$), якщо відповідний цьому значенню інтеграл прямує до нескінченності при $t \uparrow \omega$, і дорівнює $\omega$- у протилежному випадку. При цьому зазначимо, що для функції $\Phi_i$ існує обернена функція $\Phi_i^{-1}$, що визначена на проміжку $]-\infty, 0]$, якщо $B_i = y_0$, або на проміжку $]0, b_i]$, де $b_i = \int_0^{y_0} \dfrac{dz}{\varphi_i(z)}$, якщо $B_i = 0$, причому для них

$$\lim_{y \downarrow 0} \Phi_i(y) = +\infty, \qquad \lim_{z \to -\infty} \Phi_i^{-1}(z) = 0$$

при $B_i = y_0$ і

$$\lim_{y \downarrow 0} \Phi_i(y) = 0, \qquad \lim_{z \downarrow 0} \Phi_i^{-1}(z) = 0$$

при $B_i = 0$. Якщо, крім того, $\sigma_i \neq 0$, то з огляду на умови (1.4),(1.5), неважко перевірити, використовуючи правило Лопіталя, що має місце асимптотичне співвідношення

$$\Phi_i(y) = -\frac{y}{\sigma_i \varphi_i(y)}[1 + o(1)] \text{ при } y \downarrow 0. \quad (1.7)$$

Нижче буде встановлено, що для рівняння (1.1) справедливі наступні твердження.

**Теорема 1.1.** *Нехай $m_1 < m$ і для деякого $i \in \{m_1+1, \dots, m\}$ виконуються нерівності $\sigma_i < -1$,*

$$\sigma_j > \sigma_i \text{ при } j = \overline{m_1+1, m} \ (j \neq i), \quad (1.8)$$

*а також при $j = \overline{1, m}$ $\ (j \neq i)$ умови*

$$\varlimsup_{t \uparrow \omega} |\pi_\omega(t)| \left[\frac{p'_j(t)}{p_j(t)} - \frac{p'_i(t)}{p_i(t)}\right] < +\infty. \quad (1.9)$$

*Тоді для існування в рівняння (1.1) $\Pi^0_\omega(\pm\infty)$- розв'язків необхідно й достатньо, щоб*

$$\operatorname{sign} \pi_\omega(t) = \mp 1 \ (\textit{відповідно}), \quad (1.10)$$

$$I_{i1}(t) < 0 \ \ \textit{при} \ \ t \in ]a, \omega[,^2 \quad \alpha_i = 1 \quad (1.11)$$

*і*

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{I_{i1}^2(t)}{p_i(t) Q_{i1}(t)} = 1. \quad (1.12)$$

*Більш того, для кожного такого розв'язку мають місце при $t \uparrow \omega$ асимптотичні зображення*

$$\frac{y(t)}{\varphi(y(t))} = \frac{\sigma_i^2 I_{i1}^2(t)}{p_i(t)}[1 + o(1)], \quad (1.13)$$

$$\frac{y'(t)}{y(t)} = -\frac{p_i(t)}{\sigma_i I_{i1}(t)}[1 + o(1)]. \quad (1.14)$$

**Теорема 1.2.** *Нехай $m_1 < m$ і для деякого $i \in \{m_1+1, \dots, m\}$ виконуються умови $\sigma_i \neq 0$ і*

$$\varlimsup_{t \uparrow \omega} |\pi_\omega(t)| \left[\frac{p'_j(t)}{p_j(t)} - \frac{p'_i(t)}{p_i(t)}\right] < 0 \quad (1.15)$$

*при $j = \overline{1, m}$ $(j \neq i)$. Тоді для існування в рівняння (1.1) $\Pi^0_\omega(-1)$- розв'язків необхідно*

[2] При $\omega = +\infty$ вважаємо, що $a > 0$.

*й досить, щоб при $t \in ]a,\omega[$ справджувались нерівності*

$$\alpha_i \pi_\omega(t) > 0, \quad \sigma_i \pi_\omega(t) I_{i2}(t) > 0 \qquad (1.16)$$

*і*

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t) I'_{i2}(t)}{I_{i2}(t)} = 0, \qquad (1.17)$$

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{I'_{i2}(t)}{I_{i2}(t) Q_{i2}(t)} = -1. \qquad (1.18)$$

*Більш того, для кожного такого розв'язку мають місце при $t \uparrow \omega$ асимптотичні зображення*

$$\frac{y(t)}{\varphi_i(y(t))} = \alpha_i \sigma_i I_{i2}(t)[1 + o(1)], \qquad (1.19)$$

$$\frac{y'(t)}{y(t)} = -\frac{1}{\sigma_i} \frac{I'_{i2}(t)}{I_{i2}(t)}[1 + o(1)]. \qquad (1.20)$$

**Теорема 1.3.** *Рівняння (1.1) не має $\Pi^0_\omega(0)$- розв'язків при $\omega = +\infty$.*

**Теорема 1.4.** *Нехай $\omega < +\infty$, $m_1 < m$ і для деякого $i \in \{m_1{+}1, \dots, m\}$ виконуються при $j = \overline{1, m_1}$ (якщо $m_1 \geq 1$) умови*

$$\overline{\lim_{t\uparrow\omega}} (\omega - t) \left[ \frac{p'_j(t)}{p_j(t)} - \frac{p'_i(t)}{p_i(t)} \right] < -(1 + \sigma_i), \quad (1.21)$$

*а при $j = \overline{m_1 + 1, m}$, відмінних від $i$, умови*

$$\overline{\lim_{t\uparrow\omega}} (\omega - t) \left[ \frac{p'_j(t)}{p_j(t)} - \frac{p'_i(t)}{p_i(t)} \right] < \sigma_j - \sigma_i. \quad (1.22)$$

*Нехай, крім того, $\sigma_i \neq 0$ і функція $\psi_i(y) = \frac{\varphi_i(y)}{y^{1+\sigma_i}}$ така, що для будь-якої неперервно диференційовної функції $L\ :]0, t_0] \longrightarrow ]0, +\infty[$, що задовольняє умову*

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{(\omega - t) L'(t)}{L(t)} = 0, \qquad (1.23)$$

*має місце при $t \uparrow \omega$ співвідношення*

$$\psi_i((\omega - t)L(t)) = \psi_i(\omega - t)[1 + o(1)]. \quad (1.24)$$

*Тоді для існування в рівняння (1.1) $\Pi^0_\omega(0)$- розв'язків необхідно й досить, щоб*

$$\alpha_i \sigma_i I_{i3}(t) > 0 \quad \text{при} \quad t \in ]a', \omega[, \qquad (1.25)$$

*і*

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{(\omega - t) I'_{i3}(t)}{I_{i3}(t)} = 0, \qquad (1.26)$$

*де $a' = \max\{a, \omega - y_0\}$,*

$$I_{i3}(t) = \int_{A_{i3}}^{t} p_i(\tau)(\omega - \tau)^{1+\sigma_i} \psi_i(\omega - \tau)\, d\tau,$$

*$A_{i3} = a'$, якщо*

$$\int_{a'}^{\omega} p_i(\tau)(\omega - \tau)^{1+\sigma_i} \psi_i(\omega - \tau)\, d\tau = +\infty,$$

*і $A_{i3} = \omega$ - у протилежному випадку. Більш того, для кожного такого розв'язку має місце при $t \uparrow \omega$ асимптотичні зображення*

$$y(t) = (\omega - t)\, |\sigma_i\, I_{i3}(t)|^{-\frac{1}{\sigma_i}} [1 + o(1)], \quad (1.27)$$

$$y'(t) = -\, |\sigma_i\, I_{i3}(t)|^{-\frac{1}{\sigma_i}} [1 + o(1)]. \qquad (1.28)$$

При доведенні цих теорем будуть використовуватися нижчеподані допоміжні твердження, що були отримані в [1].

**Лема 1.1.** *Якщо $m_1 < m$ і $k \in \{m_1 + 1, \dots, m\}$, то*

$$\lim_{y\downarrow 0} \frac{y \varphi'_k(y)}{\varphi_k(y)} = 1 + \sigma_k.$$

*Якщо ж $m_1 \geq 1$, $k \in \{1, \dots, m_1\}$ й відмінно від тих, для яких $\varphi_k(y) \equiv \varphi^0_k > 0$, то*

$$\sigma_k \geq -1 \quad i \quad \lim_{y\downarrow 0} y \varphi'_k(y) = 0.$$

**Лема 1.2.** *Нехай $y\ :\ [t_0, \omega[ \longrightarrow ]0, y_0]$- $\Pi^0_\omega(\mu_0)$- розв'язок рівняння (1.1). Тоді*

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t) y'(t)}{y(t)} = \mu_0 + 1 \ \text{при} \ |\mu_0| < +\infty$$

*і*

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t) y'(t)}{y(t)} = \pm\infty \ \text{при} \ \mu_0 = \pm\infty.$$

*Більш того, якщо $|\mu_0| < +\infty$, то справджується нерівність $(\mu_0 + 1)\pi_\omega(t) \leq 0$ при*

$t \in [a, \omega[$, *а якщо* $\mu_0 = +\infty$ *(*$\mu_0 = -\infty$*), то* $\omega < +\infty$ *(*$\omega = +\infty$*).*

**Лема 1.3.** *Нехай* $|\mu_0| < +\infty$, $m_1 < m$ *і для деякого* $i \in \{m_1+1, \dots, m\}$ *виконуються умови*

$$\overline{\lim_{t\uparrow\omega}} |\pi_\omega(t)| \left[\frac{p_j'(t)}{p_j(t)} - \frac{p_i'(t)}{p_i(t)}\right] < -(1+\sigma_i)|1+\mu_0|$$

*при* $j = \overline{1, m_1}$ *(якщо* $m_1 \geq 1$*),*

$$\overline{\lim_{t\uparrow\omega}} |\pi_\omega(t)| \left[\frac{p_j'(t)}{p_j(t)} - \frac{p_i'(t)}{p_i(t)}\right] < (\sigma_j - \sigma_i)|1+\mu_0|$$

*при* $j = \overline{m_1+1, m}$ $(j \neq i)$.

*Тоді для кожного* $\Pi_\omega^0(\mu_0)$*- розв'язку рівняння* (1.1) *мають місце граничні співвідношення* (1.6).

**Лема 1.4.** *Нехай* $m_1 < m$ *і для деякого* $i \in \{m_1+1, \dots, m\}$ *справджуються нерівності* $\sigma_i < -1$, (1.8) *і* (1.9). *Тоді для кожного* $\Pi_\omega^0(\pm\infty)$*- розв'язку рівняння* (1.1) *мають місце граничні співвідношення* (1.6).

## 2. Доведення теорем.

**Доведення теореми 1.1.** *Необхідність.* Нехай $y : [t_0, \omega[ \longrightarrow ]0, y_0]$- довільний $\Pi_\omega^0(\mu_0)$- розв'язок рівняння (1.1), де $\mu_0$ дорівнює або $+\infty$, або $-\infty$. Тоді, згідно з лемою 1.2, $\omega = +\infty$ при $\mu_0 = +\infty$ і $\omega < +\infty$ при $\mu_0 = -\infty$, тобто виконується умова (1.10). На підставі нерівностей $\sigma_i < -1$, (1.8) і (1.9) з леми 1.4 випливає, що для даного розв'язку мають місце граничні співвідношення (1.6). Тому, враховуючи (1.1), отримаємо при $t \uparrow \omega$ асимптотичне зображення

$$y''(t) = \alpha_i p_i(t) \varphi_i(y(t))[1+o(1)]. \qquad (2.1)$$

Звідси, згідно з означенням $\Pi_\omega^0(\pm\infty)$-розв'язку, а також нерівностями $p_i(t) > 0$ при $t \in [a, \omega[$ і $\varphi_i(y) > 0$ при $y \in ]0, y_0]$, будемо мати, що $\alpha_i > 0$, тобто справджується друга з умов (1.11). Крім того, взявши до уваги означення $\Pi_\omega^0(\pm\infty)$-розв'язку й лему 1.1, помічаємо, що

$$\left(\frac{y'(t)}{\varphi_i(y(t))}\right)' = \frac{y''(t)}{\varphi_i(y(t)}\left[1 - \frac{[y'(t)]^2}{y''(t)y(t)}\times\right.$$

$$\left.\times\frac{y(t)\varphi_i'(y(t))}{\varphi_i(y(t))}\right] \sim -\sigma_i \frac{y''(t)}{\varphi_i(y(t))} \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega.$$

Отже (2.1) може бути переписано у вигляді

$$\left(\frac{y'(t)}{\varphi_i(y(t))}\right)' = -\sigma_i p_i(t)[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega,$$

звідки в результаті інтегрування на проміжку від $t_0$ до $t$ ($t \in ]t_0, \omega[$) одержимо, що при $t \uparrow \omega$

$$\frac{y'(t)}{\varphi_i(y(t))} = -\sigma_i I_{i1}(t)[1+o(1)] \qquad (2.2)$$

якщо в $I_{i1}$ границя інтегрування $A_{i1} = a$, і -

$$\frac{y'(t)}{\varphi_i(y(t))} = c_i - \sigma_i I_{i1}(t)[1+o(1)] \qquad (2.3)$$

де $c_i$- деяка стала, якщо $A_{i1} = \omega$. Покажемо, що в (2.3) $c_i = 0$. Дійсно, у протилежному випадку (2.3) може бути записаним у вигляді

$$\frac{y'(t)}{\varphi_i(y(t))} = c_i + o(1) \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega,$$

який із урахуванням (2.1) і $\alpha_i > 0$ приводить до співвідношення

$$\frac{y''(t)}{y'(t)} = p_i(t)\left[\frac{1}{c_i} + o(1)\right] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega.$$

Інтегруючи його на проміжку від $t_0$ до $t$, одержимо

$$\ln|y'(t)| = c + I_{i1}(t)\left[\frac{1}{c_i} + o(1)\right] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega,$$

де $c$ — деяка стала. Однак цього бути не може, оскільки вираз, що стоїть ліворуч, згідно з другою з умов означення $\Pi_\omega^0(\pm\infty)$-розв'язку, має нескінченну границю при $t \uparrow \omega$, а праворуч на підставі умови $A_{i1} = \omega$ — скінченну.

Таким чином, при кожному з двох значень, які може набувати $A_{i1}$, має місце при $t \uparrow \omega$ зображення (2.2). Звідси з урахуванням нерівності $\sigma_i < -1$ випливає перша з умов (1.11) і асимптотичне співвідношення

$$\Phi_i(y(t)) = -\sigma_i Q_{i1}(t)[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega,$$

яке, згідно з (1.7), може бути переписане у вигляді

$$\frac{y(t)}{\varphi_i(y(t))} = \sigma_i^2 Q_{i1}(t)[1+o(1)] \text{ при } t \uparrow \omega. \qquad (2.4)$$

Оскільки

$$\frac{[y'(t)]^2}{y''(t)y(t)}=\left(\frac{y'(t)}{\varphi_i(y(t))}\right)^2\frac{\varphi_i(y(t))}{y''(t)}\frac{\varphi_i(y(t))}{y(t)}$$

і мають місце асимптотичні співвідношення (2.1), де $\alpha_i=1$, (2.2) і (2.4), то

$$\frac{[y'(t)]^2}{y''(t)y(t)}=\frac{I_{i1}^2(t)}{p_i(t)Q_{i1}(t)}[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t\uparrow\omega.$$

Тому, беручи до уваги третю з умов означення $\Pi_\omega(\pm\infty)$- розв'язку, одержимо (1.12), з урахуванням якого з (2.2) і (2.4) випливають асимптотичні зображення (1.13) і (1.14).

*Достатність.* Нехай $m_1<m$ і при деякому $i\in\{m_1+1,\dots,m\}$ виконуються умови $\sigma_i<-1$ і (1.8)-(1.12). Покажемо, що в цьому випадку в рівняння (1.1) існує хоча б один визначений у деякому лівому околі $\omega$ розв'язок, для якого мають місце при $t\uparrow\omega$ асимптотичні зображення (1.13), (1.14).

Оскільки $\sigma_i<-1$ і, відповідно до леми 1.1, $\lim\limits_{y\downarrow 0}\frac{y\varphi_i'(y)}{\varphi_i(y)}=1+\sigma_i$, то у функції $\Phi_i$ границя інтегрування $B_i=0$. Крім того, з (1.12), першої з умов (1.11) та правила вибору границь інтегрування $A_{i1}$, $A_{i1}'$ випливає, що $A_{i1}=A_{i1}'=\omega$, функція $Q_{i1}$ додатна на проміжку $]a,\omega[$ і задовольняє умови

$$\lim_{t\uparrow\omega}Q_{i1}(t)=0,\ \lim_{t\uparrow\omega}\frac{|\pi_\omega(t)I_{i1}(t)|}{Q_{i1}(t)}=+\infty. \qquad (2.5)$$

Враховуючи перше з цих граничних співвідношень, підберемо число $t_1\in]a,\omega[$ таким, щоб при $t\in[t_1,\omega[$ справджувалась нерівність $-3\sigma_iQ_{i1}(t)<2b_i$, де $b_i=\int_0^{y_0}\dfrac{dz}{\varphi_i(z)}$.

Тепер рівняння (1.1) за допомогою перетворення

$$\begin{aligned}&\Phi_i(y(t))=-\sigma_iQ_{i1}(t)[1+v_1(x)],\\ &\frac{y'(t)}{y(t)}=-\frac{I_{i1}(t)}{\sigma_iQ_{i1}(t)}[1+v_2(x)],\end{aligned} \qquad (2.5)$$

де

$$x=-\ln Q_{i1}(t), \qquad (2.6)$$

зведемо до системи диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} v_1'=1+v_1-\dfrac{1+v_2}{\sigma_i^2Q_{i1}(t)}\cdot\dfrac{Y_i(t,v_1)}{\varphi_i(Y_i(t,v_1))},\\[2ex] v_2'=(1+v_2)\left(q_i(t)-\dfrac{1+\sigma_i}{\sigma_i}-\dfrac{v_2}{\sigma_i}\right)+\end{cases} \qquad (2.7)$$

$$+\frac{\sigma_iQ_{i1}^2(t)\sum\limits_{k=1}^m\alpha_kp_k(t)[1+r_k(t)]\varphi_k(Y_i(t,v_1))}{I_{i1}^2(t)Y_i(t,v_1)},$$

в якій

$$q_i(t)=\frac{p_i(t)Q_{i1}(t)}{I_{i1}^2(t)},$$

$$Y_i(t,v_1)=\Phi_i^{-1}\left(-\sigma_iQ_{i1}(t)(1+v_1)\right),$$

$\Phi_i^{-1}$- функція, що обернена до $\Phi_i$, $t$- функція, що обернена до $x=-\ln Q_{i1}(t)$.

Тут на підставі (1.12)

$$\lim_{t\uparrow\omega}q_i(t)=1, \qquad (2.8)$$

а в силу зазначеного вище вибору числа $t_1\in]a,\omega[$ функція $Y_i:[t_1,\omega[\times D_1\longrightarrow]0,y_0]$, де $D_1=\left\{v_1\in\mathbb{R}:|v_1|\le\frac12\right\}$, є двічі неперервно диференційовною, причому згідно з першою із умов (2.5) і властивістю $\Phi_i^{-1}$

$$\lim_{t\uparrow\omega}Y_i(t,v_1)=0 \text{ рівномірно за } v_1\in D_1. \qquad (2.9)$$

З (1.3)-(1.5) і леми 1.1 з урахуванням (2.9) випливає, що рівномірно за $v_1\in D_1$ при всіх $k\in\{1,\dots,m\}$, для яких $\varphi_k'(y)\ne0$ на проміжку $]0,y_0]$,

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{Y_i(t,v_1)\varphi_k''(Y_i(t,v_1))}{\varphi_k'(Y_i(t,v_1))}=\sigma_k, \qquad (2.10)$$

при $k=\overline{1,m_1}$

$$\begin{aligned}&\lim_{t\uparrow\omega}\varphi_k(Y_i(t,v_1))=\varphi_k^0\ne0,\\ &\lim_{t\uparrow\omega}Y_i(t,v_1)\varphi_k'(Y_i(t,v_1))=0,\end{aligned} \qquad (2.11)$$

і при $k=\overline{m_1+1,m}$

$$\begin{aligned}&\lim_{t\uparrow\omega}\varphi_k(Y_i(t,v_1))=\begin{cases}\text{або } 0,\\ \text{або } +\infty,\end{cases}\\ &\lim_{t\uparrow\omega}\frac{Y_i(t,v_1)\varphi_k'(Y_i(t,v_1))}{\varphi_k(Y_i(t,v_1))}=1+\sigma_k.\end{aligned} \qquad (2.12)$$

Оскільки $\sigma_i \neq 0$, виконуються умови (2.12) і при $(t, v_1) \in [t_1, \omega[\times D_1$

$$\frac{\partial Y_i(t,v_1)}{\partial t} = -\sigma_i I_{i1}(t)\varphi_i(Y_i(t,v_1))(1+v_1), \quad (2.13)$$

то, застосовуючи правило Лопіталя у формі Штольця [2, стор. 115], при кожному фіксованому $v_1 \in D_1$ одержимо

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{Y_i(t,v_1)}{\varphi_i(Y_i(t,v_1))Q_{i1}(t)} =$$

$$= \lim_{t\uparrow\omega} \frac{\frac{Y_i'(t,v_1)}{\varphi_i(Y_i(t,v_1))}\left(1 - \frac{Y_i(t,v_1)\varphi_i'(Y_i(t,v_1))}{\varphi_i(Y_i(t,v_1))}\right)}{I_{i1}(t)} =$$

$$= \sigma_i^2(1+v_1). \quad (2.14)$$

Згідно з (2.13), (2.14) і другою з умов (2.5),

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t)Y_i'(t,v_1)}{Y_i(t,v_1)} = \pm\infty \text{ при } v_1 \in D_1.$$

Отже, встановлено, що функція $Y_i$ при будь-якому $v_1 \in D_1$ має усі властивості $\Pi_\omega^0(\pm\infty)$-розв'язку рівняння (1.1), які були використані в [1] при доведені леми 1.4. Тому для будь-якого $v_1 \in D_1$

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{p_k(t)\varphi_k(Y_i(t,v_1))}{p_i(t)\varphi_i(Y_i(t,v_1))} = 0 \text{ при } \quad k \neq i. \quad (2.15)$$

Якщо ж урахувати умови $\sigma_i < -1$, (1.8) й лему 1.1, то з використанням рівності

$$\left(\frac{\varphi_k(y)}{\varphi_i(y)}\right)' = \frac{\varphi_k(y)}{y\varphi_i(y)}\left[\frac{y\varphi_k'(y)}{\varphi_k(y)} - \frac{y\varphi_i'(y)}{\varphi_i(y)}\right]$$

неважко зрозуміти, що (2.15) справджується рівномірно за $v_1 \in D_1$.

Крім того, з рівності

$$\left(\frac{\varphi_i(y)}{y}\right)' = \frac{\varphi_i(y)}{y^2}\left(\frac{y\varphi_i'(y)}{\varphi_i(y)} - 1\right)$$

й умови $\lim\limits_{y\downarrow 0} \frac{y\varphi_i'(y)}{\varphi_i(y)} = 1 + \sigma_i < 0$ випливає, що функція $\frac{\varphi_i(y)}{y}$ в деякому правому околі нуля є спадною. Тому, відповідно до (2.9), можна підібрати число $t_2 \in [t_1, \omega[$ таким, щоб при $(t, v_1) \in [t_2, \omega[\times D_1$ виконувалась нерівність

$$\frac{\varphi_i(Y_i(t,v_1))}{Y_i(t,v_1)} \leq \frac{\varphi_i\left(Y_i\left(t, -\frac{1}{2}\right)\right)}{Y_i\left(t, -\frac{1}{2}\right)}. \quad (2.16)$$

Розкладаючи тепер при кожному фіксованому $t \in [t_1, \omega[$ функції $\frac{Y_i(t,v_1)}{\varphi_i(Y_i(t,v_1))}$ і $\frac{\varphi_k(Y_i(t,v_1))}{Y_i(t,v_1)}$ $(k = 1, \ldots, m)$ за формулою Тейлора із залишковим членом у формі Лагранжа в околі $v_1 = 0$ до другого порядку включно, перепишемо систему диференціальних рівнянь (2.7) у вигляді

$$v_j' = f_j(x) + \sum_{k=1}^{2} c_{jk}(x)v_k + V_j(x, v_1, v_2),$$
$$j = 1, 2, \quad (2.17)$$

де

$$f_1(x(t)) = 1 - \frac{Y_i(t,0)}{\sigma_i^2 Q_{i1}(t)\varphi_i(Y_i(t,0))}, \; f_2(x(t)) =$$

$$= -\frac{\sigma_i + 1}{\sigma_i} + q_i(t)\left[1 + \frac{\sigma_i Q_{i1}(t)\varphi_i(Y_i(t,0))}{Y_i(t,0)} \times \right.$$

$$\left. \times \sum_{k=1}^{m} \frac{\alpha_k p_k(t)[1 + r_k(t)]\varphi_k(Y_i(t,0))}{p_i(t)\varphi_i(Y_i(t,0))}\right],$$

$$c_{11}(x) = 1 - \frac{f_1(x)}{\sigma_i}, \quad c_{12}(x) = -1 - f_1(x),$$

$$c_{21}(x(t)) = q_i(t)\left[\frac{\sigma_i Q_{i1}(t)\varphi_i(Y_i(t,0))}{Y_i(t,0)}\right]^2 \times$$

$$\times \sum_{k=1}^{m} \frac{\alpha_k p_k(t)[1 + r_k(t)]\varphi_k(Y_i(t,0))}{p_i(t)\varphi_i(Y_i(t,0))} \times$$

$$\times \left[1 - \frac{Y_i(t,0)\varphi_k'(Y_i(t,0))}{\varphi_k(Y_i(t,0))}\right], \quad c_{22}(x(t)) =$$

$$= q_i(t) - \frac{2 + \sigma_i}{\sigma_i}, \quad V_1(x(t), v_1, v_2) =$$

$$= \frac{1}{\sigma_i}\left[1 - \frac{Y_i(t,0)\varphi_i'(Y_i(t,0))}{\varphi_i(Y_i(t,0))}\right] v_1 v_2 -$$

$$- \left[\frac{Y_i(t,\xi)\varphi_i'(Y_i(t,\xi))}{\varphi_i(Y_i(t,\xi))} + \frac{Y_i^2(t,\xi)\varphi_i''(Y_i(t,\xi))}{\varphi_i(Y_i(t,\xi))} - \right.$$

$$\left. - \frac{Y_i^2(t,\xi)[\varphi_i'(Y_i(t,\xi))]^2}{\varphi_i^2(Y_i(t,\xi))}\right] \frac{Q_{i1}(t)\varphi_i(Y_i(t,\xi))}{2Y_i(t,\xi)} \times$$

$$\times (1 + v_2)v_1^2, \quad V_2(x(t), v_1, v_2) = \frac{\sigma_i^3 q_i(t)}{2} \times$$

$$\times Q_{i1}^3(t) \sum_{k=1}^{m} \frac{\alpha_k p_k(t)[1 + r_k(t)]\varphi_k(Y_i(t,\xi_k))}{p_i(t)\varphi_i(Y_i(t,\xi_k))} \times$$

$$\times\left[\frac{\varphi_i(Y_i(t,\xi_k))}{Y_i(t,\xi_k)}\right]^3\left[\frac{Y_i^2(t,\xi_k)\varphi_k''(Y_i(t,\xi_k))}{\varphi_k(Y_i(t,\xi_k))}-\right.$$
$$-\frac{Y_i^2(t,\xi_k)\varphi_i'(Y_i(t,\xi_k))\varphi_k'(Y_i(t,\xi_k))}{\varphi_i(Y_i(t,\xi_k))\varphi_k(Y_i(t,\xi_k))}+$$
$$+\frac{Y_i(t,\xi_k)\varphi_i'(Y_i(t,\xi_k))}{\varphi_i(Y_i(t,\xi_k))}-2+$$
$$\left.+\frac{2Y_i(t,\xi_k)\varphi_k'(Y_i(t,\xi_k))}{\varphi_k(Y_i(t,\xi_k))}\right]v_1^2-\frac{v_2^2}{\sigma_i},$$

$\xi=\xi(t,v_1)$ і $\xi_k=\xi_k(t,v_1)$ $(k=1,\dots,m)$ такі, що $|\xi(t,v_1)|<|v_1|$, $|\xi_k(t,v_1)|<|v_1|$ $(k=1,\dots,m)$ при $(t,v_1)\in[t_2,\omega[\times D_1$.

З огляду на границі (2.10)-(2.12) і (2.15), які мають місце рівномірно за $v_1\in D_1$, а також (2.16), помічаємо, що

$$\frac{V_i(x,v_1,v_2)}{|v_1|+|v_2|}\longrightarrow 0\quad (i=1,2)\quad \text{при}$$

$$|v_1|+|v_2|\to 0 \text{ рівномірно за } x\in[x_0,+\infty[,$$

де $x_0=-\ln Q_{i1}(t_2)$. Крім того, зважаючи на (2.5), (2.6), (2.8), (2.11), (2.12), (2.14) і (2.15), будемо мати

$$\lim_{x\to+\infty}f_i(x)=0\quad (i=1,2),$$

$$\lim_{x\to+\infty}c_{11}(x)=1,\quad \lim_{x\to+\infty}c_{12}(x)=-1,$$

$$\lim_{x\to+\infty}c_{21}(x)=-\frac{1}{\sigma_i},\quad \lim_{x\to+\infty}c_{22}(x)=-\frac{1+\sigma_i}{\sigma_i}.$$

При цьому зрозуміло, що гранична матриця коефіцієнтів лінійної частини системи (2.17) не має власних значень із нульовою дійсною частиною.

В силу зазначених вище умов, система диференціальних рівнянь (2.17) має на підставі теореми 2.1 праці [3] хоча б один зникаючий в $+\infty$ розв'язок $v_i:[x_1,+\infty[\longrightarrow\mathbb{R}$ $(i=1,2)$, де $x_1\in[x_0,+\infty[$. Йому з урахуванням перетворень (2.5), (2.6) відповідає розв'язок диференціального рівняння (1.1), який допускає при $t\uparrow\omega$ асимптотичні зображення

$$\Phi_i(y(t))=-\sigma_iQ_{i1}(t)[1+o(1)],$$

$$\frac{y'(t)}{y(t)}=-\frac{I_{i1}(t)}{\sigma_iQ_{i1}(t)}[1+o(1)].$$

Оскільки тут $\lim_{t\uparrow\omega}y(t)=0$, то через (1.7) і (1.12) ці зображення можуть бути переписані у вигляді (1.13), (1.14). Використовуючи їх і (1.1), доходимо висновку, що даний розв'язок рівняння (1.1) належить до класу $\Pi_\omega^0(\pm\infty)$- розв'язків. Теорему повністю доведено.

**Доведення теореми 1.2.** *Необхідність.* Нехай $m_1<m$ і для деякого $i\in\{m_1+1,\dots,m\}$ виконуються умови $\sigma_i\neq 0$ і (1.15) при $j=\overline{1,m}$ $(j\neq i)$. Припустимо, що в цьому випадку диференціальне рівняння (1.1) має $\Pi_\omega^0(-1)$- розв'язок $y:[t_0,\omega[\longrightarrow]0,y_0]$. Тоді, відповідно до леми 1.3, мають місце (1.6), з урахуванням яких з (1.1) випливає асимптотичне співвідношення (2.1). Звідси, взявши до уваги умову 3) означення $\Pi_\omega(-1)$- розв'язку, при $t\uparrow\omega$ одержимо

$$\frac{y'(t)}{\varphi_i(y(t))}=-\alpha_ip_i(t)\pi_\omega(t)[1+o(1)].\tag{2.18}$$

Оскільки $y'(t)<0$, $\varphi_i(y(t))>0$ і $p_i(t)>0$ при $t\in[t_0,\omega[$, то з цього співвідношення випливає, що справджується перша з нерівностей (1.16). Крім того, інтегруючи (2.18) на проміжку від $t_0$ до $t$ $(t\in[t_0,\omega[)$ і враховуючи означення $\Pi_\omega^0(-1)$- розв'язку, знаходимо, що при $t\uparrow\omega$

$$\Phi_i(y(t))=-\alpha_iI_{i2}(t)[1+o(1)].\tag{2.19}$$

Звідси з урахуванням (1.7) і умови $\sigma_i\neq 0$ одержуємо при $t\uparrow\omega$ асимптотичне співвідношення (1.19). У свою чергу з нього і (2.18) отримуємо асимптотичне співвідношення (1.20) і другу з нерівностей (1.16).

Відповідно до леми 1.1, для розглянутого $\Pi_\omega(-1)$-розв'язку $\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t)y'(t)}{y(t)}=0$. Тому, згідно із зображенням (1.20), справджується умова (1.17).

Тепер, враховуючи (2.1) і (1.19), одержимо

$$\frac{y''(t)}{y(t)}=\frac{p_i(t)}{\sigma_iI_{i2}(t)}[1+o(1)]\quad \text{при}\quad t\uparrow\omega.$$

Оскільки тут $\frac{y''}{y}=\left(\frac{y'}{y}\right)'+\left(\frac{y'}{y}\right)^2$, то, використовуючи асимптотичне зображення (1.20) і умову (1.17), знаходимо

$$\left(\frac{y'(t)}{y(t)}\right)' = \frac{p_i(t)}{\sigma_i I_{i2}(t)}\left(1+o(1)-\frac{\pi_\omega(t)I'_{i2}(t)}{\sigma_i I_{i2}(t)}\times\right.$$

$$\left.\times[1+o(1)]\right) = \frac{p_i(t)}{\sigma_i I_{i2}(t)}[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t\uparrow\omega.$$

Звідси з урахуванням означення $\Pi_\omega(-1)$-розв'язку випливає, що

$$\frac{y'(t)}{y(t)} = \frac{Q_{i2}(t)}{\sigma_i}[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t\uparrow\omega.$$

Порівнюючи це асимптотичне співвідношення з асимптотичним співвідношенням (1.20), одержимо (1.18).

*Достатність.* Нехай $m_1 < m$ і для деякого $i \in \{m_1+1,\dots,m\}$ поряд із нерівностями $\sigma_i \neq 0$ і (1.15) при $j = \overline{1,m}$ $(j \neq i)$ виконуються умови (1.16)-(1.18). Покажемо, що в цьому випадку рівняння (1.1) має хоча б один визначений у деякому лівому околі $\omega$ дійсний розв'язок, який задовольняє при $t\uparrow\omega$ асимптотичні зображення (1.19), (1.20). Належність цього розв'язку (у випадку його існування) до класу $\Pi^0_\omega(-1)$- розв'язків безпосередньо випливає з цих зображень, (1.1) і вказаних умов.

Рівняння (1.1) за допомогою перетворення

$$\Phi_i(y(t)) = -\alpha_i I_{i2}(t)[1+v_1(x)],$$

$$\frac{y'(t)}{y(t)} = \frac{1}{\sigma_i}Q_{i2}(t)[1+v_2(x)], \tag{2.20}$$

де

$$x = \beta\ln|I_{i2}(t)|, \tag{2.21}$$

$$\beta = \begin{cases} 1, & \text{якщо} \quad \lim\limits_{t\uparrow\omega} I_{i2}(t) = \pm\infty,\\ -1, & \text{якщо} \quad \lim\limits_{t\uparrow\omega} I_{i2}(t) = 0,\end{cases}$$

зведемо до системи диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} v_1' = \beta\left\{-1-v_1-\dfrac{\alpha_i g_i(t)Y_i(t,v_1)(1+v_2)}{\sigma_i I_{i2}(t)\varphi_i(Y_i(t,v_1))}\right\},\\ v_2' = \dfrac{\beta}{h_i(t)}\left\{-1-v_2-\dfrac{h_i(t)g_i(t)}{\sigma_i}(1+v_2)^2+\right.\\ \left.\qquad+\dfrac{\sigma_i I_{i2}(t)}{p_i(t)}\sum\limits_{k=1}^{m}\alpha_k p_k(t)[1+r_k(t)]\dfrac{\varphi_k(Y_i(t,v_1))}{Y_i(t,v_1)}\right\},\end{cases} \tag{2.22}$$

в якій

$$g_i(t) = \frac{I_{i2}(t)Q_{i2}(t)}{I'_{i2}(t)}, \quad h_i(t) = \pi_\omega(t)Q_{i2}(t),$$

$$Y_i(t,v_1) = \Phi_i^{-1}\left(-\alpha_i I_{i2}(t)[1+v_1]\right),$$

$\Phi_i^{-1}$- функція, що обернена до $\Phi_i$, $t$- функція, що обернена до $x = \beta\ln|I_{i2}(t)|$.

Виберемо, враховуючи (1.16), число $t_1 \in [a,\omega[$ так, щоб при $t\in[t_1,\omega[$ справджувалась нерівність $\alpha_i I_{i2}(t) > 0$, якщо $\sigma_i > 0$ і $-3\alpha_i I_{i2}(t) < 2\int_{y_0}^{+\infty}\frac{dz}{\varphi_i(z)}$, якщо $\sigma_i < 0$. Беручи до уваги властивості функцій $\Phi_i$ і $\Phi_i^{-1}$, зазначимо, що функція $Y_i$ на множині $[t_1,\omega[\times D_1$, де $D_1 = \{v_1\in\mathbb{R} : |v_1| \le \frac{1}{2}\}$, набуває значення в $]0,y_0]$, є неперервно диференційовною, має неперервну частинну похідну другого порядку за змінною $v_1$ і задовольняє умову (2.9). Згідно з (2.9) і лемою 1.1 при всіх $k\in\{1,\dots,m\}$, для яких $\varphi_k'(y)\neq 0$ при $y\in]0,y_0]$, мають місце рівномірно за $v_1\in D_1$ (2.10)-(2.12). Якщо ж врахувати, що

$$\frac{\partial Y_i(t,v_1)}{\partial t} = -\alpha_i\pi_\omega(t)p_i(t)\varphi_i(Y_i(t,v_1))(1+v_1),$$

то, використовуючи правило Лопіталя у формі Штольця і (2.12) при $k=i$, одержимо

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{Y_i(t,v_1)}{\varphi_i(Y_i(t,v_1))I_{i2}(t)} =$$

$$= \lim_{t\uparrow\omega}\frac{\frac{Y_i'(t,v_1)}{\varphi_i(Y_i(t,v_1))}\left(1-\frac{Y_i(t,v_1)\varphi_i'(Y_i(t,v_1))}{\varphi_i(Y_i(t,v_1))}\right)}{\pi_\omega(t)p_i(t)} =$$

$$= \alpha_i\sigma_i(1+v_1). \tag{2.23}$$

Звідси і з попереднього співвідношення на підставі (1.17) знаходимо, що

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t)Y_i'(t,v_1)}{Y_i(t,v_1)} = 0 \text{ при будь-якому } v_1\in D_1.$$

Отже, функція $Y_i$ при кожному значенні $v_1\in D_1$ має всі властивості $\Pi^0_\omega(-1)$- розв'язку рівняння (1.1), що були використані в праці [1] при доведенні леми 1.3 (випадок

$\mu_0 = -1$). Тому при $v_1 \in D_1$ мають місце умови (1.6). Далі, точно в такий же спосіб, як при доведені теореми 1.1, встановлюємо, що (1.6) виконуються рівномірно за $v_1 \in D_1$ і при $(t, v_1) \in [t_2, \omega[\times D_1$, де $t_2$- деяке число з проміжку $[t_1, \omega[$, має місце нерівність

$$\frac{\varphi_i(Y_i(t,v_1))}{Y_i(t,v_1)} \leq \frac{\varphi_i(Y_i(t,v_1^0))}{Y_i(t,v_1^0)}, \qquad (2.24)$$

в якій

$$v_1^0 = \begin{cases} -\frac{1}{2}, & \text{якщо} \quad \sigma_i > 0, \\ \frac{1}{2}, & \text{якщо} \quad \sigma_i < 0. \end{cases}$$

Крім того, у (2.22) відповідно до (1.17) і (1.18)

$$\lim_{t\uparrow\omega} g_i(t) = -1, \quad \lim_{t\uparrow\omega} h_i(t) = 0. \qquad (2.25)$$

Розклавши тепер при кожному фіксованому $t \in [t_2, \omega[$ функції $\frac{Y_i(t,v_1)}{\varphi_i(Y_i(t,v_1))}$ і $\frac{\varphi_k(Y_i(t,v_1))}{Y_i(t,v_1)}$ $(k = 1, \ldots, m)$ за формулою Тейлора з залишковим членом у формі Лагранжа в околі $v_1 = 0$ до другого порядку включно, перепишемо систему диференціальних рівнянь (2.22) у вигляді

$$\begin{cases} v_1' = \beta[f_1(x) + \sum\limits_{k=1}^{2} c_{1k}(x)v_k + V_1(x,v_1,v_2)], \\ v_2' = \dfrac{\beta\left[f_2(x) + \sum\limits_{k=1}^{2} c_{2k}(x)v_k + V_2(x,v_1,v_2)\right]}{h_i(t(x))}, \end{cases} \qquad (2.26)$$

де

$$f_1(x(t)) = -1 - \frac{\alpha_i g_i(t) Y_i(t,0)}{\sigma_i \varphi_i(Y_i(t,0)) I_{i2}(t)},$$

$$f_2(x(t)) = -1 - \frac{h_i(t)g_i(t)}{\sigma_i} + \frac{\sigma_i I_{i2}(t)\varphi_i(Y_i(t,0))}{Y_i(t,0)} \times$$
$$\times \sum_{k=1}^{m} \frac{\alpha_k p_k(t)[1 + r_k(t)]\varphi_k(Y_i(t,0)}{p_i(t)\varphi_i(Y_i(t,0))},$$

$$c_{11}(x(t)) = -1 + \frac{g_i(t)}{\sigma_i}\left[1 - \frac{Y_i(t,0)\varphi_i'(Y_i(t,0))}{\varphi_i(Y_i(t,0))}\right],$$

$$c_{12}(x(t)) = -\frac{\alpha_i g_i(t) Y_i(t,0)}{\sigma_i I_{i2}(t)\varphi_i(Y_i(t,0))},$$

$$c_{21}(x(t)) = -\frac{\alpha_i \sigma_i I_{i2}^2(t)\varphi_i^2(Y_i(t,0))}{Y_i^2(t,0)} \times$$
$$\times \sum_{k=1}^{m} \frac{\alpha_k p_k(t)[1 + r_k(t)]\varphi_k(Y_i(t,0))}{p_i(t)\varphi_i(Y_i(t,0)} \times$$
$$\times \left[\frac{Y_i(t,0)\varphi_k'(Y_i(t,0))}{\varphi_k(Y_i(t,0))} - 1\right], \quad c_{22}(x) =$$
$$= -1 - \frac{2}{\sigma_i} g_i(t)h_i(t), \quad V_1(x(t),v_1,v_2) =$$
$$= \frac{g_i(t)}{\sigma_i}\left[1 - \frac{Y_i(t,0)\varphi_i'(Y_i(t,0))}{\varphi_i(Y_i(t,0))}\right] v_1 v_2 +$$
$$+ \frac{\alpha_i g_i(t) I_{i2}(t)\varphi_i(Y_i(t,\xi))}{2\sigma_i Y_i(t,\xi)} \left[\frac{Y_i(t,\xi)\varphi_i'(Y_i(t,\xi))}{\varphi_i(Y_i(t,\xi))} + \right.$$
$$+ \frac{Y_i^2(t,\xi)\varphi_i''(Y_i(t,\xi))}{\varphi_i(Y_i(t,\xi))} -$$
$$\left. - \left(\frac{Y_i(t,\xi)\varphi_i'(Y_i(t,\xi))}{\varphi_i(Y_i(t,\xi))}\right)^2\right] \times$$
$$\times (1+v_2)v_1^2, \quad V_2(x(t),v_1,v_2) = -\frac{g_i(t)h_i(t)}{\sigma_i} v_2^2 +$$
$$+ \frac{\sigma_i I_{i2}^3(t)}{2} \sum_{k=1}^{m} \frac{\alpha_k p_k(t)[1 + r_k(t)]\varphi_k(Y_i(t,\xi_k))}{p_i(t)\varphi_i(Y_i(t,\xi_k))} \times$$
$$\times \frac{\varphi_i^3(Y_i(t,\xi_k)}{Y_i^3(t,\xi_k)} \left[2 - \frac{Y_i(t,\xi_k)\varphi_i'(Y_i(t,\xi_k))}{\varphi_i(Y_i(t,\xi_k))} + \right.$$
$$+ \frac{Y_i(t.\xi_k)\varphi_k'(Y_i(t,\xi_k))}{\varphi_k(Y_i(t,\xi_k))} \left( \frac{Y_i(t,\xi_k)\varphi_k''(Y_i(t,\xi_k))}{\varphi_k'(Y_i(t,\xi_k))} + \right.$$
$$\left.\left. + \frac{Y_i(t,\xi_k)\varphi_i'(Y_i(t,\xi_k))}{\varphi_i(Y_i(t,\xi_k))} - 2\right)\right] v_1^2$$

і $\xi = \xi(t, v_1)$, $\xi_k = \xi_k(t, v_1)$ $(k = 1, \ldots, m)$ такі, що $|\xi(t,v_1)| < |v_1| \leq \frac{1}{2}$, $|\xi_k(t,v_1)| < |v_1| \leq \frac{1}{2}$ $(k = 1, \ldots, m)$ при $t \in [t_2, \omega[$.

Тут, згідно з умовами (2.10)-(2.12), (2.15) і (2.23)-(2.25),

$$\lim_{x\to+\infty} f_i(x) = 0 \ (i = 1,2), \quad \lim_{x\to+\infty} c_{11}(x) = 0, \qquad (2.27)$$
$$\lim_{x\to+\infty} c_{12}(x) = 1, \ \lim_{x\to+\infty} c_{2k}(x) = -1 \ (k = 1,2),$$

$$\lim_{|v_1|+|v_2|\to 0} \frac{V_i(x,v_1,v_2)}{|v_1| + |v_2|} = 0 \quad (i = 1,2) \qquad (2.28)$$

рівномірно за $x \in [x_2, +\infty[$, де $x_2 = \beta \ln |I_{i2}(t_2)|$. Крім того, маємо

$$\int\limits_{x_2}^{+\infty} \frac{dx}{h_i(t(x))} = \beta \int\limits_{t_2}^{\omega} \frac{p_i(t)\,dt}{Q_{i2}(t) I_{i2}(t)} =$$

$$= \beta \ln |Q_{i2}(t)| |_{t_2}^{\omega} = \pm\infty. \qquad (2.29)$$

Зважаючи тепер на умови (2.27), доведемо систему диференціальних рівнянь (2.26) до майже трикутного вигляду.

Покладемо

$$\begin{array}{l} v_1(x) = w_2(x) - h_i(t) w_1(x), \\ v_2(x) = w_1(x). \end{array} \qquad (2.30)$$

Тоді система диференціальних рівнянь (2.26) набуває вигляду

$$\left\{ \begin{array}{l} w_1' = \frac{\beta}{h_i(t(x))} [F_1(x) + \sum\limits_{k=1}^{2} C_{1k}(x) w_k + \\ \qquad\qquad + W_1(x, w_1, w_2)], \\ w_2' = \beta [F_2(x) + \sum\limits_{k=1}^{2} C_{2k}(x) w_k + \\ \qquad\qquad + W_2(x, w_1, w_2)], \end{array} \right. \qquad (2.31)$$

де

$$F_1(x) = f_2(x), \quad F_2(x) = f_1(x) + f_2(x),$$

$$C_{11}(x) = c_{22}(x) - c_{21}(x) h_i(t(x)),$$

$$C_{12}(x) = c_{21}(x), \quad C_{21}(x) = c_{22}(x) -$$

$$- c_{21}(x) h_i(t(x)) + c_{12}(x) - c_{11}(x) h_i(t(x)),$$

$$C_{22}(x) = q_i(t(x)) + 1 + c_{21}(x) + c_{11}(x),$$

$$W_1(x, w_1, w_2) = V_2(x, w_2 - h_i(t(x)) w_1, w_1),$$

$$W_2(x, w_1, w_2) = V_1(x, w_2 - h_i(t(x)) w_1, w_1) +$$

$$+ V_2(x, w_2 - h_i(t(x)) w_1, w_1).$$

Згідно з (2.25) і (2.27)-(2.29)

$$\lim_{x \to +\infty} C_{kk}(x) = -1,$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{F_k(x)}{C_{kk}(x)} = 0 \ (k = 1, 2),$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{C_{12}(x)}{C_{11}(x)} = 1, \ \lim_{x \to +\infty} \frac{C_{21}(x)}{C_{22}(x)} = 0$$

і

$$\lim_{|w_1| + |w_2| \to 0} \frac{W_k(x, w_1, w_2)}{|w_1| + |w_2|} = 0 \ (k = 1, 2)$$

рівномірно за $x \in [x_3, +\infty[$, де $x_3 \geq x_2$- деяке достатньо велике число. Оскільки, крім того, справджується умова (2.29), то для системи (2.31) виконано всі умови теореми 1.3 з праці [3]. На підставі цієї теореми система диференціальних рівнянь (2.31) має розв'язок $w_i : [x_4, +\infty[ \longrightarrow \mathbb{R}$ $(i = 1, 2)$, де $x_4 \geq x_3$, який зникає в $+\infty$. Йому з урахуванням перетворень (2.30) і (2.20), (2.21), а також умов (1.7) і (1.18) відповідає розв'язок $y$ диференціального рівняння (1.1), що допускає при $t \uparrow \omega$ асимптотичні зображення (1.19) і (1.20). Теорему доведено.

**Доведення теореми 1.3.** Справедливість твердження цієї теореми безпосередньо випливає з леми 1.2.

**Доведення теореми 1.4.** *Необхідність.* Нехай $y : [t_0, +\omega[ \longrightarrow ]0, y_0]$- $\Pi_\omega^0(0)$-розв'язок рівняння (1.1). Тоді, відповідно до леми 1.2,

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{(t - \omega) y'(t)}{y(t)} = 1. \qquad (2.32)$$

Крім того, згідно з умовами (1.21), (1.22) мають місце на підставі леми 1.3 граничні співвідношення (1.6), через які з (1.1) випливає (2.1) при $t \uparrow \omega$. Звідси з урахуванням (2.32) одержимо при $t \uparrow \omega$ асимптотичне співвідношення

$$y''(t) \sim \alpha_i p_i(t) \varphi_i \left( (t - \omega) y'(t) [1 + o(1)] \right).$$

Оскільки відповідно до леми 1.1 $\lim\limits_{y \downarrow 0} \frac{y \varphi_i'(y)}{\varphi_i(y)} = 1 + \sigma_i$, то функція $\psi_i(y) = \frac{\varphi_i(y)}{y^{1+\sigma_i}}$ є повільно змінною в нулі (див. [4, Розд. 1, с.1—15]). На підставі властивостей таких функцій отримане вище співвідношення може бути переписане при $t \uparrow \omega$ у вигляді

$$y''(t) \sim \alpha_i p_i(t) [(t - \omega) y'(t)]^{1+\sigma_i} \psi_i \left( (t - \omega) y'(t) \right).$$

Тут функція $L(t) = -y'(t)$, згідно з означенням $\Pi_\omega^0(0)$- розв'язку, задовольняє умову

(1.23). Тому, беручи до уваги (1.24), будемо при $t \uparrow \omega$ мати

$$y''(t) \sim \alpha_i p_i(t)[(t-\omega)y'(t)]^{1+\sigma_i}\psi_i(\omega-t). \quad (2.33)$$

З цього асимптотичного співвідношення з урахуванням означення $\Pi^0_\omega(0)$- розв'язку знаходимо, що при $t \uparrow \omega$

$$[-y'(t)]^{-\sigma_i} = \alpha_i\sigma_i I_{i3}(t)[1+o(1)], \quad (2.34)$$

звідки випливає умова (1.25) й асимптотичне зображення (1.28). Справедливість зображення (1.27) випливає з (2.32) з урахуванням (1.28).

На підставі (2.33) і (2.34)

$$\frac{(\omega-t)y''(t)}{y'(t)} \sim \frac{p_i(t)(\omega-t)^{2+\sigma_i}\psi_i(\omega-t)}{\sigma_i I_{i3}(t)}$$

при $t \uparrow \omega$. Оскільки тут, відповідно до означення $\Pi^0_\omega(0)$- розв'язку, ліва частина прямує до нуля при $t \uparrow \omega$, то виконується умова (1.26).

*Достатність.* Нехай $m_1 < m$ і для деякого $i \in \{m_1+1, \dots, m\}$ виконуються умови (1.21), (1.22), $\sigma_i \neq 0$, (1.24) і (1.25), (1.26). Покажемо, що в цьому випадку рівняння (1.1) має $\Pi^0_\omega(0)$- розв'язки, які допускають при $t \uparrow \omega$ асимптотичні зображення (1.27), (1.28).

Диференціальне рівняння (1.1) за допомогою перетворення

$$\begin{aligned} y(t) &= (\omega-t)\,|\sigma_i\, I_{i3}(t)|^{-\frac{1}{\sigma_i}}\,[1+v_1(x)],\\ y'(t) &= -\,|\sigma_i\, I_{i3}(t)|^{-\frac{1}{\sigma_i}}\,[1+v_2(x)], \qquad (2.35)\\ x &= \beta\ln|I_{i3}(t)|, \end{aligned}$$

де

$$\beta = \begin{cases} 1, & \text{якщо} \quad \alpha_i\sigma_i > 0,\\ -1, & \text{якщо} \quad \alpha_i\sigma_i < 0, \end{cases}$$

зведемо до системи диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} v_1' = \dfrac{\beta}{h_i(t)}\left[\dfrac{h_i(t)}{\sigma_i} + \left(1+\dfrac{h_i(t)}{\sigma_i}\right)v_1 - v_2\right],\\ v_2' = \dfrac{\beta}{\sigma_i}\left[1+v_2- -\dfrac{1}{q_i(t)}\displaystyle\sum_{k=1}^{m}\alpha_k p_k(t)[1+r_k(t)]\varphi_k\left(Y_i(t,v_1)\right)\right], \end{cases} \quad (2.36)$$

в якій $t$-функція є оберненою до $x = \beta\ln|I_{i3}(t)|$,

$$h_i(t) = \frac{(\omega-t)I'_{i3}(t)}{I_{i3}(t)},$$

$$q_i(t) = \frac{p_i(t)(\omega-t)^{1+\sigma_i}\psi_i(\omega-t)}{\sigma_i I_{i3}(t)\,|\sigma_i I_{i3}(t)|^{\frac{1}{\sigma_i}}},$$

$$Y_i(t,v_1) = (\omega-t)|\sigma_i I_{i3}(t)|^{-\frac{1}{\sigma_i}}(1+v_1).$$

Оскільки справджується умова (1.26), то

$$\lim_{t\uparrow\omega} h_i(t) = 0 \quad (2.37)$$

і для функції $L(t) = |\sigma_i I_{i3}(t)|^{-\frac{1}{\sigma_i}}$ виконується умова(1.23). Тому

$$\lim_{t\uparrow\omega} Y_i(t,0) = 0, \qquad \lim_{t\uparrow\omega}\frac{(\omega-t)Y_i'(t,0)}{Y_i(t,0)} = -1 \quad (2.38)$$

і на підставі (1.24)

$$\varphi_i\left(Y_i(t,0)\right) = = \left((\omega-t)\,|\sigma_i I_{i3}(t)|^{-\frac{1}{\sigma_i}}\right)^{1+\sigma_i}\psi_i(\omega-t)[1+o(1)]$$

при $t \uparrow \omega$. З останього співвідношення з урахуванням (1.25) знаходимо, що при $t \uparrow \omega$

$$q_i(t) = \alpha_i p_i(t)\varphi_i\left(Y_i(t,0)\right)[1+o(1)]. \quad (2.39)$$

Згідно з (2.38), функція $Y_i(t,0)$ має всі властивості $\Pi^0_\omega(0)$- розв'язку, що були використані в [1] при доведенні справедливості твердження леми 1.3 (випадок $\mu_0 = 0$). Тому будемо мати

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{p_k(t)\varphi_k\left(Y_i(t,0)\right)}{p_i(t)\varphi_i\left(Y_i(t,0)\right)} = 0 \text{ при } k \neq i. \quad (2.40)$$

Крім того, у зв'язку з (1.3)-(1.5), лемою 1.1 і (2.38) рівномірно за $v_1 \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ будуть виконуватися умови (2.10)-(2.12).

Отримавши ці факти, розглянемо систему диференціальних рівнянь (2.36) на множині $\Omega = [x_0, +\infty[ \times D_1 \times D_2$, де $D_i = \left\{v_i \in \mathbb{R} : |v_i| \le \frac{1}{2}\right\}$ $(i = 1, 2)$, $x_0 = \beta \ln |I_{i3}(t_0)|$ і число $t_0 \in [a, \omega[$, обране з урахуванням першої з умов (2.38) таким чином, щоб при $t \in [t_0, \omega[$ справджувалась нерівність $3Y_i(t, 0) < 2y_0$.

На цій множині праві частини системи неперервні й мають неперервні частинні похідні до другого порядку включно за змінною $v_1$. Розклавши при фіксованому $t \in [t_0, \omega[$ функції $\varphi_k(Y_i(t, v_1))$ $(k = 1, \dots, m)$ за формулою Тейлора з залишковим членом у формі Лагранжа в околі $v_1 = 0$ до другого порядку включно, перепишемо систему диференціальних рівнянь (2.36) у вигляді

$$\begin{cases} v_1' = \dfrac{\beta}{h_i(t(x))} \left[f_1(x) + c_1(x)v_1 - v_2\right], \\ v_2' = \dfrac{\beta}{\sigma_i} \left[f_2(x) + c_2(x)v_1 + v_2 + V(x, v_1)\right], \end{cases} \tag{2.41}$$

де

$$f_1(x) = \frac{h_i(t)}{\sigma_i}, \quad f_2(x) = 1 - \frac{1}{q_i(t)} \times$$

$$\times \sum_{k=1}^{m} \alpha_k p_k(t)[1 + r_k(t)]\varphi_k(Y_i(t, 0)),$$

$$c_1(x) = 1 + \frac{h_i(t)}{\sigma_i},$$

$$c_2(x) = -\frac{(\omega - t)\,|\sigma_i I_{i3}(t)|^{-\frac{1}{\sigma_i}}}{q_i(t)} \times$$

$$\times \sum_{k=1}^{m} \alpha_k p_k(t)[1 + r_k(t)]\varphi_k'(Y_i(t, 0)),$$

$$V(x, v_1) = -\frac{v_1^2 \left((\omega - t)\,|\sigma_i I_{i3}(t)|^{-\frac{1}{\sigma_i}}\right)^2}{2q_i(t)} \times$$

$$\times \sum_{k=1}^{m} \alpha_k p_k(t)[1 + r_k(t)]\varphi_k''(Y_i(t, \xi_k))$$

і $\xi_k = \xi_k(t, v_1)$ $(k = 1, \dots, m)$ такі, що $|\xi_k(t, v_1)| \le |v_1|$ при усіх $t \ge t_0$ і $v_1 \in D_1$.

Тут, згідно з умовами (2.37)-(2.40), (2.10)-(2.12) і виглядом функції $Y_i(t, v_1)$, маємо

$$\lim_{x \to +\infty} f_i(x) = 0 \quad (i = 1, 2),$$
$$\lim_{x \to +\infty} c_1(x) = 1, \ \lim_{x \to +\infty} c_2(x) = -1 - \sigma_i, \tag{2.42}$$

$$\lim_{v_1 \to 0} \frac{V(x, v_1)}{v_1} = 0 \tag{2.43}$$

рівномірно за $x \in [x_0, +\infty[$.

Припускаючи тепер у (2.41)

$$v_1 = w_1, \ v_2 = \rho(x)w_1 + w_2, \tag{2.44}$$

де $\rho : [x_1, +\infty[ \longrightarrow \mathbb{R}$ $(x_1 \ge x_0)$- зникаючий у $+\infty$ розв'язок диференціального рівняння

$$\rho' = \beta \left[\frac{c_2(x)}{\sigma_i} - \frac{\rho}{h_i(t(x))} + \frac{\rho^2}{h_i(t(x))}\right], \tag{2.45}$$

існуючий згідно з умовами $\lim\limits_{x \to +\infty} c_2(x) = -1 - \sigma_i$ і $\lim\limits_{x \to +\infty} h_i(t(x)) = 0$ на підставі теореми 1.3 праці [3], отримаємо систему диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} w_1' = \frac{\beta}{h_i(t(x))} \left[f_1(x) + C_1(x)w_1 + w_2\right], \\ w_2' = \frac{\beta}{\sigma_i} \left[f_2(x) - \rho(x) + C_2(x)w_2 + V(x, w_1)\right], \end{cases} \tag{2.46}$$

де

$$C_1(x) = 1 + \frac{h_i(t(x))}{\sigma_i} - \rho(x),$$

$$C_2(x) = 1 + \frac{\sigma_i \rho(x)}{h_i(t(x))}.$$

Відповідно до умов $\lim\limits_{x \to +\infty} \rho(x) = 0$, (2.37), (2.42) і (2.43)

$$\lim_{x \to +\infty} f_1(x) = 0, \quad \lim_{x \to +\infty} [f_2(x) - \rho(x)] = 0,$$

$$\lim_{x \to +\infty} C_1(x) = 1,$$

$\lim\limits_{w_1 \to 0} \dfrac{V(x, w_1)}{w_1} = 0$ рівномірно за $x \in [x_1, +\infty[$.

Крім того, маємо

$$\int\limits_{x_0}^{+\infty} \frac{dx}{h_i(t(x))} = \beta \int\limits_{t_0}^{+\infty} \frac{dt}{\omega - t} = \pm\infty.$$

З (2.45) випливає, що

$$\frac{\sigma_i\rho(x)}{h_i(t(x))} = \frac{\beta\sigma_i\rho'(x)}{\rho(x)-1} - \frac{c_2(x)}{\rho(x)-1} \quad \text{при } x \geq x_1.$$

Тому

$$C_2(x) = 1 - \frac{c_2(x)}{\rho(x)-1} + \frac{\beta\sigma_i\rho'(x)}{\rho(x)-1}.$$

Тут за умовами (2.42) і $\lim\limits_{x\to+\infty}\rho(x)=0$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[1-\frac{c_2(x)}{\rho(x)-1}\right] = -\sigma_i \neq 0,$$

$$\int\limits_{x_1}^{+\infty}\frac{\beta\sigma_i\rho'(x)\,dx}{\rho(x)-1} = \beta\sigma_i\ln|\rho(x)-1|\Big|_{x_1}^{+\infty} = \text{const}.$$

Отже, показано, що для системи диференціальних рівнянь (2.46) виконано всі умови теореми 1.3 з [3]. На підставі цієї теореми вона має хоча б один розв'язок $w_i : [x_2,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ $(i=1,2)$, де $(x_2 \geq x_1)$, який прямує до нуля при $x\to+\infty$. Йому з урахуванням перетворень (2.44) і (2.35) відповідає розв'язок $y$ диференціального рівняння (1.1), що допускає при $t\to+\infty$ асимптотичні зображення (1.27), (1.28). У силу цих зображень і умов теореми даний розв'язок, очевидно, задовольняє означенню $\Pi^0_\omega(0)$- розв'язку. Теорему повністю доведено.

**3. Приклад рівняння зі степеневими коефіцієнтами.** У праці [1] як приклад, що ілюструє отримані результати, було розглянуто диференціальне рівняння

$$y'' = a_1t^{\gamma_1} + a_2t^{\gamma_2}y^{\sigma_2}\sin y + a_3t^{\gamma_3}y^{1+\sigma_3}|\ln y|^\lambda, \tag{3.1}$$

де

$$(t,y)\in]0,+\infty[\times]0,1[,$$

$a_k\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, $\gamma_k\in\mathbb{R}$ $(k=1,2,3)$, а $\sigma_2,\sigma_3,\lambda\in\mathbb{R}$ і такі, що $\sigma_2\neq-1$, $|1+\sigma_3|+|\lambda|\neq 0$. Це рівняння є рівнянням вигляду (1.1), в якому $m=3$,

$$\alpha_k = \operatorname{sign} a_k, \quad p_k(t) = |a_k|t^{\gamma_k} \quad (k=1,2,3),$$

$$\varphi_1(y)\equiv 1, \quad \varphi_2(y) = y^{\sigma_2}\sin y,$$

$$\varphi_3(y) = y^{1+\sigma_3}|\ln y|^\lambda.$$

Тут $\varphi_1'(y)\equiv 0$, а при будь-якому $k\in\{2,3\}$ $\varphi_k'(y)\neq 0$ у правому околі нуля і

$$\lim_{y\downarrow 0}\frac{y\varphi_k''(y)}{\varphi_k'(y)} = \sigma_k.$$

Тому маємо випадок, коли $m_1 = 1$.

В [1] при встановленні умов існування й асимптотики $\Pi^0_\omega(0)$- розв'язків диференціального рівняння (3.1) були розглянуті всі ситуації, крім тих, які відображені в теоремах 1.1-1.4 даної праці. Використовуючи тепер ці чотири теореми, доповнимо отримані в [1] результати для рівняння (3.1).

Спочатку, вважаючи $\omega=+\infty$ і враховуючи, що в цьому випадку $\pi_\omega(t)=t$, будемо для кожного $i\in\{1,2,3\}$ мати

$$\frac{|\pi_\omega(t)|p_i'(t)}{p_i(t)} \equiv \gamma_i,$$

$$I_{i1}(t) = |a_i|\int\limits_{A_{i1}}^{t}\tau^{\gamma_i}\,d\tau \sim$$

$$\sim\begin{cases}\dfrac{|a_i|t^{1+\gamma_i}}{1+\gamma_i}, & \text{якщо } \gamma_i\neq-1,\\[2ex] |a_i|\ln t, & \text{якщо } \gamma_i=-1,\end{cases}$$

$$Q_{i1}(t) = \int\limits_{A'_{i1}}^{t} I_{i1}(\tau)\,d\tau \sim$$

$$\sim\begin{cases}\dfrac{|a_i|t^{2+\gamma_i}}{(1+\gamma_i)(2+\gamma_i)}, & \text{якщо } \gamma_i\neq-1,-2,\\[2ex] -|a_i|\ln t, & \text{якщо } \gamma_i=-2,\\[2ex] |a_i|t\ln t, & \text{якщо } \gamma_i=-1,\end{cases}$$

$$I_{i2}(t) = |a_i|\int\limits_{A_{i2}}^{t}\tau^{1+\gamma_i}\,d\tau \sim$$

$$\sim\begin{cases}\dfrac{|a_i|t^{2+\gamma_i}}{2+\gamma_i}, & \text{якщо } \gamma_i\neq-2,\\[2ex] |a_i|\ln t, & \text{якщо } \gamma_i=-2,\end{cases}$$

$$Q_{i2}(t)=\int\limits_{A'_{i2}}^{t}\frac{|a_i|\tau^{\gamma_i}\,d\tau}{I_{i2}(\tau)}\sim$$

$$\sim\begin{cases}-\dfrac{2+\gamma_i}{t}, & \text{якщо } \gamma_i\neq-2,\\[2ex] -\dfrac{1}{t\ln t}, & \text{якщо } \gamma_i=-2.\end{cases}$$

Звідси зрозуміло, що для будь-якого $i\in\{1,2,3\}$ мають місце при $t\to+\infty$ асимптотичні співвідношення

$$\frac{I_{i1}^2(t)}{p_i(t)Q_{i1}(t)}\sim\begin{cases}\dfrac{2+\gamma_i}{1+\gamma_i}, & \text{якщо } \gamma_i\neq-1,-2,\\[2ex] \ln t, & \text{якщо } \gamma_i=-1,\\[2ex] -\dfrac{1}{\ln t}, & \text{якщо } \gamma_i=-2,\end{cases}$$

$$\frac{\pi_\omega(t)I'_{i2}(t)}{I_{i2}(t)}\sim\begin{cases}2+\gamma_i, & \text{якщо } \gamma_i\neq-2,\\[2ex] \dfrac{1}{\ln t}, & \text{якщо } \gamma_i=-2,\end{cases}$$

$$\frac{I'_{i2}(t)}{I_{i2}(t)Q_{i2}(t)}\sim-1.$$

Згідно з цими асимптотичними співвідношеннями й умовою $\omega=+\infty$, з теорем 1.1-1.3 випливають наступні твердження.

1) Рівняння (3.1) не має $\Pi^0_{+\infty}(0)$- розв'язків.

2) Якщо $\sigma_i<-1$ і $\sigma_{5-i}>\sigma_i$ при $i\in\{2,3\}$, то рівняння (3.1) не має $\Pi^0_{+\infty}(\pm\infty)$- розв'язків.

3) Якщо $\sigma_i\neq0$ і $\gamma_{5-i}<\gamma_i$ при $i\in\{2,3\}$, то для існування в рівняння (3.1) $\Pi^0_{+\infty}(-1)$-розв'язків необхідно й достатньо, щоб

$$a_i>0,\quad \sigma_i>0,\quad \gamma_i=-2.$$

Більш того, для кожного такого розв'язку мають місце при $t\to+\infty$ асимптотичні зображення

$$\frac{y(t)}{\varphi_i(y(t))}=a_i\sigma_i\ln t[1+o(1)],\qquad (3.2_i)$$

$$\frac{y'(t)}{y(t)}=-\frac{1+o(1)}{\sigma_i t\ln t}.\qquad (3.3_i)$$

Уточнимо тепер зазначені в 3) асимптотичні зображення.

Оскільки $\lim\limits_{t\to+\infty}y(t)=0$ і $\varphi_2(y)=y^{\sigma_2}\sin y$, то

$$\varphi_2(y(t))\sim y^{1+\sigma_2}(t)\quad\text{при}\quad t\to+\infty.$$

Тому з $(3.2_2)$ знаходимо, що при $t\to+\infty$

$$y(t)=(a_2\sigma_2\ln t)^{-\frac{1}{\sigma_2}}[1+o(1)].\qquad (3.2'_2)$$

При $i=3$ з $(3.3_i)$ маємо

$$\ln y(t)\sim-\frac{1}{\sigma_3}\ln\ln t\quad\text{при}\quad t\to+\infty.$$

Тоді, враховуючи, що $\varphi_3(y)=y^{1+\sigma_3}|\ln y|^\lambda$, одержимо при $t\to+\infty$ зображення вигляду

$$\varphi_3(y(t))\sim y^{1+\sigma_3}(t)\left|\frac{1}{\sigma_3}\ln\ln t\right|^\lambda.$$

З урахуванням цього зображення з $(3.2_3)$ випливає, що при $t\to+\infty$

$$y(t)=\left(a_3\sigma_3^{1-\lambda}\ln t\ln^\lambda\ln t\right)^{-\frac{1}{\sigma_3}}[1+o(1)].\quad (3.2'_3)$$

Далі, виберемо за $\omega$ довільне додатне число і з'ясуємо з використанням теорем 1.1-1.2 і 1.4 питання про наявність у рівняння (3.1) $\Pi^0_\omega(\mu_0)$- розв'язків із значеннями $\mu_0\in\{\pm\infty,-1,0\}$ і асимптотику цих розв'язків при $t\uparrow\omega$. Оскільки в даному випадку $\pi_\omega(t)=t-\omega$, то для кожного $i\in\{1,2,3\}$ при $t\uparrow\omega$

$$\frac{|\pi_\omega(t)|p'_i(t)}{p_i(t)}\sim\frac{\gamma_i}{\omega}(\omega-t),$$

$$I_{i1}(t)=|a_i|\int\limits_\omega^t\tau^{\gamma_i}\,d\tau\sim|a_i|\omega^{\gamma_i}(t-\omega),$$

$$Q_{i1}(t)=\int\limits_\omega^t I_{i1}(\tau)\,d\tau\sim\frac{|a_i|\omega^{\gamma_i}}{2}(t-\omega)^2,$$

Крім того, при $t\uparrow\omega$

$$I_{23}(t)=\int\limits_{A_{23}}^t|a_2|\tau^{\gamma_2}(\omega-\tau)^{\sigma_2}\sin(\omega-\tau)\,d\tau\sim$$

$$\sim \begin{cases} -\dfrac{|a_2|\omega^{\gamma_2}(\omega-t)^{2+\sigma_2}}{2+\sigma_2}, & \text{якщо } \sigma_2 \neq -2, \\ -|a_2|\omega^{\gamma_2}\ln(\omega-t), & \text{якщо } \sigma_2 = -2, \end{cases}$$

$$I_{33}(t) = \int_{A_{33}}^{t} |a_3|\tau^{\gamma_3}(\omega-\tau)^{1+\sigma_3}|\ln(\omega-\tau)|^{\lambda}\,d\tau \sim$$

$$\sim \begin{cases} -\dfrac{|a_3|\omega^{\gamma_3}(\omega-t)^{2+\sigma_3}|\ln(\omega-t)|^{\lambda}}{2+\sigma_3}, \\ \qquad \text{якщо } \sigma_3 \neq -2, \\ \dfrac{|a_3|\omega^{\gamma_3}|\ln(\omega-t)|^{1+\lambda}}{1+\lambda}, \\ \qquad \text{якщо } \sigma_3 = -2,\ \lambda \neq -1, \\ |a_3|\omega^{\gamma_3}\ln|\ln(\omega-t)|, \\ \qquad \text{якщо } \sigma_3 = -2,\ \lambda = -1. \end{cases}$$

Звідси, зокрема, маємо

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{I_{i1}^2(t)}{p_i(t)Q_{i1}(t)} = 2 \quad (i=1,2,3),$$

і при $i = 2,3$

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{(\omega-t)I_{i3}'(t)}{I_{i3}(t)} =$$

$$= \begin{cases} -2-\sigma_i, & \text{якщо } \sigma_i \neq -2, \\ 0, & \text{якщо } \sigma_i = -2. \end{cases}$$

У зв'язку із зазначеними вище співвідношеннями умови теореми 1.2 не виконуються, а з теорем 1.1 і 1.4 випливають наступні твердження.

4) Якщо $\sigma_i < -1$ і $\sigma_{5-i} > \sigma_i$ при $i \in \{2,3\}$, то рівняння (3.1) не має $\Pi^0_{+\infty}(\pm\infty)$- розв'язків.

5) Якщо $\sigma_2 < -1$ і $\sigma_2 < \sigma_3$, то для існування в рівняння (3.1) $\Pi^0_{+\infty}(0)$- розв'язків необхідно й достатньо, щоб $\sigma_2 = -2$ і справджувалась нерівність $a_2 < 0$. При цьому для кожного такого розв'язку мають місце при $t \uparrow \omega$ асимптотичні зображення

$$y(t) = (\omega-t)\left|2a_2\omega^{\gamma_2}\ln(\omega-t)\right|^{\frac{1}{2}}[1+o(1)],$$

$$y'(t) = -\left|2a_2\omega^{\gamma_2}\ln(\omega-t)\right|^{\frac{1}{2}}[1+o(1)].$$

6) Якщо $\sigma_3 < -1$ і $\sigma_3 < \sigma_2$, то для існування в рівняння (3.1) $\Pi^0_{+\infty}(0)$- розв'язків необхідно й достатньо, щоб $\sigma_3 = -2$ і справджувалась нерівність $a_3(1+\lambda) < 0$, якщо $\lambda \neq -1$, і нерівність $a_3 < 0$, якщо $\lambda = -1$. Більше того, для кожного такого розв'язку мають місце при $t \uparrow \omega$ асимптотичні зображення

$$y(t) = (\omega-t)\left|\frac{2a_3\omega^{\gamma_3}}{1+\lambda}\right|^{\frac{1}{2}}|\ln(\omega-t)|^{\frac{1+\lambda}{2}}[1+o(1)],$$

$$y'(t) = -\left|\frac{2a_3\omega^{\gamma_3}}{1+\lambda}\right|^{\frac{1}{2}}|\ln(\omega-t)|^{\frac{1+\lambda}{2}}[1+o(1)],$$

якщо $\lambda \neq -1$, і асимптотичні зображення -

$$y(t) = (\omega-t)\left|2a_3\omega^{\gamma_3}\ln|\ln(\omega-t)|\right|^{\frac{1}{2}}[1+o(1)],$$

$$y'(t) = -\left|2a_3\omega^{\gamma_3}\ln|\ln(\omega-t)|\right|^{\frac{1}{2}}[1+o(1)],$$

якщо $\lambda = -1$.

**Зауваження 3.1.** Якщо за $\omega$ вибрати довільне число із проміжку $[0,+\infty[$ і в рівнянні (3.1) зробити перетворення

$$t-\omega = \omega-\tau, \quad y(t) = z(\tau),$$

то одержимо рівняння, до якого можуть бути застосовані теореми 1.1-1.4. Це дозволить отримати для рівняння (3.1) результати про існування, а також асимптотику деяких типів розв'язків визначених у правому околі $\omega$, що зникають при $t \downarrow \omega$ (зокрема, для розв'язків, що зникають при $t \downarrow 0$).

**4. Висновки.** В [1] для нелінійного диференціального рівняння (1.1) був уведений достатньо широкий клас зникаючих при $t \uparrow \omega$ розв'язків, а саме клас так званих, $\Pi^0_\omega(\mu_0)$-розв'язків, де $-\infty \leq \mu_0 \leq +\infty$. Тут також були виділені умови, за яких на розв'язках із даного класу рівняння (1.1) рівносильно двочленному диференціальному рівнянню вигляду $y'' = \alpha_i p_i(t)\varphi_i(y)[1+o(1)]$, де $i \in \{1,\dots,m\}$. У результаті дослідження таких рівнянь в [1] і даній праці встановлено, що $\Pi^0_\omega(\mu_0)$-розв'язки за своїми асимптотичними властивостями розпадаються на чотири неперетинні підмножини, що відповідають наступним значенням параметра $\mu_0$:

1) $\mu_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1\}$; 2) $\mu_0 = 0$; 3) $\mu_0 = -1$; 4) $\mu_0 = \pm\infty$. Вивчення розв'язків кожної з цих підмножин вимагало розробки методики встановлення асимптотики таких розв'язків та їх похідних першого порядку. При цьому також були отримані необхідні й достатні умови існування розв'язків із даними асимптотичними зображеннями. Варто зазначити, що деякі з наведених тут асимптотичних зображень лише неявно визначають розв'язки вказаного типу. Однак наявність асимптотики для похідної дозволяє при конкретному вигляді функцій $\varphi_i$ (див. розглянутий вище приклад рівняння зі степеневими коефіцієнтами) отримати для них і явні асимптотичні формули.

Важливою особливістю запропонованої методики дослідження є те, що вона не розрізнює, як це звичайно робиться, випадки, коли $\omega < +\infty$ і $\omega = +\infty$. Тому результати даних двох праць можуть бути використані для опису асимптотики не тільки правильних, але й різного типу сингулярних розв'язків рівняння (1.1), що, зокрема, проілюстровано на прикладі рівняння (3.1).

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ


1. *Касьянова В.А.* Асимптотичні зображення зникаючих розв'язків істотно нелінійних диференціальних рівнянь другого порядку// Наук. вісник Чернівецького ун-ту: Зб. наук. пр. Вип. 228. Математика.— Чернівці: Рута, 2004.— С.15—29.
2. *Демидович Б.П.* Лекции по математической теории устойчивости.— М.: Наука, 1967.— 472 с.
3. *Евтухов В.М.* Об исчезающих на бесконечности решениях вещественных неавтономных систем квазилинейных дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения.— 2003.— **39**, № 4.— С.433-444.
4. *Сенета В.А.* Правильно меняющиеся функции.— М.: Наука, 1985.— 144 с.


Стаття надійшла до редколегії 24.01.2005