УДК 517.51

©2005 р. О.О. Карлова

Чернівецький національний університет ім. Ю. Федьковича, Чернівці

БЕРІВСЬКА КЛАСИФІКАЦІЯ ВІДОБРАЖЕНЬ ЗІ ЗНАЧЕННЯМИ У ПІДМНОЖИНАХ СКІНЧЕННОВИМІРНИХ ПРОСТОРІВ

Доводиться, що кожне відображення $f: X \to T$ першого функціонального класу Лебеґа, яке діє з топологічного простору X у зв'язну і локально стягуванну підмножину T простору $\mathbb{R}^n$, належить до першого класу Бера.

It is proved that every mapping $f: X \to T$ of the first functional Lebesgue class which acts from topological space X to a connected and locally contractible subset T of $\mathbb{R}^n$ belongs to the first Baire class.

1. Для топологічних просторів X і Y позначимо через $B_1(X,Y)$ сукупність всіх функцій $f: X \to Y$ *першого класу Бера*, тобто поточкових границь послідовностей неперервних функцій $f_n: X \to Y$, через $H_1(X,Y)$ – сукупність всіх відображень $f: X \to Y$ *першого класу Лебеґа*, для яких $f^{-1}(F)$ подається у вигляді перетину послідовності відкритих множин в X для довільної замкненої в Y множини F, а через $H_1^*(X,Y)$ – сукупність всіх відображень $f: X \to Y$ *першого функціонального класу Лебеґа*, для яких $f^{-1}(F)$ подається у вигляді перетину послідовності функціонально відкритих множин в X для довільної замкненої в Y множини F. Зрозуміло, що $H_1^*(X,Y) \subseteq H_1(X,Y)$, причому для досконало нормального простору X ці класи збігаються.

Згідно з теоремою Лебеґа-Гаусдорфа [7, с. 402] включення $H_1(X,Y) \subseteq B_1(X,Y)$ виконується у випадку, коли X – метризовний простір, а $Y = [0,1]^n$, де $n \leq \aleph_o$.

В [5] було показано, що включення $H_1^*(X,Y) \subseteq B_1(X,Y)$ виконується, якщо X – топологічний простір, Y – метризовний сепарабельний топологічний векторний простір. Крім того, в [5] було введено поняття *слабкого локального гомеоморфізму*, тобто такого неперервного відображення $\varphi: X \to Y$, що для довільної точки $y \in Y$ існують окіл V цієї точки і відкрита в X множина U, такі, що $\varphi|_U : U \to V$ – гомеоморфізм, і з'ясовано, що має місце включення $H_1^*(X,Y) \subseteq B_1(X,Y)$, якщо X – топологічний простір, Y – лінделефовий простір і Z – топологічний простір, такі, що $H_1^*(X,Z) \subseteq B_1(X,Z)$ і існує слабкий локальний гомеоморфізм $\varphi: Z \to Y$.

Нагадаємо [2], що сім'я $\mathcal{B}$ підмножин простору X називається *базою для відображення* $f: X \to Y$, якщо прообраз $f^{-1}(G)$ довільної відкритої в Y множини G можна подати у вигляді об'єднання множин з $\mathcal{B}$. Якщо сім'я $\mathcal{B}$ є σ-дискретною, то ми називаємо її *σ-дискретною базою для* f і кажемо, що відображення $f: X \to Y$ є *σ-дискретним.* Зауважимо, що довільне відображення $f: X \to Y$, яке діє з топологічного простору X в метричний сепарабельний простір Y, є σ-дискретним.

М. Фосґерау в [1] показав, що кожне σ-дискретне відображення $f: X \to Y$ першого класу Лебеґа належить до першого класу Бера, якщо X – метричний простір, а Y – лінійно зв'язний і локально лінійно зв'язний метричний простір.

В цій роботі ми, використовуючи інший підхід, доводимо, що має місце включення $H_1^*(X,Y) \subseteq B_1(X,Y)$, якщо X – топологічний простір, Y – зв'язна і локально стягуванна підмножина $\mathbb{R}^n$.

2. В цьому пункті ми наведемо деякі допоміжні твердження.

2.1. Почнемо з уточненої редакції леми 4.1 з [5].

Нагадаємо [5], що множина A є *функціональною типу F_σ в X*, якщо вона подається у вигляді зліченного об'єднання функціонально замкнених множин в X. Множину A будемо називати *функціональною типу G_δ в X*, якщо доповнення до неї є функціональною F_σ-множиною. Якщо множина A одночасно є функціональною типу G_δ і F_σ, то вона називається *функціонально двосторонньою*.

Лема 1. *Нехай X, Y – топологічні простори, $(F_n)_{n=1}^{\infty}$ – послідовність функціональних множин типу F_σ в X, $X = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n$ і $f : X \to Y$ – таке відображення, що для довільної відкритої в Y множини G множина $f^{-1}(G) \cap F_n$ є функціональною типу F_σ в X для кожного $n \in \mathbb{N}$. Тоді $f \in H_1^*(X, Y)$.*

Доведення. Нехай G – відкрита в Y множина, тоді

$$f^{-1}(G) = f^{-1}(G) \cap (\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (f^{-1}(G) \cap F_n),$$

де множини $f^{-1}(G) \cap F_n$ є функціональними типу F_σ в X, отже, і множина $f^{-1}(G)$ є функціональною типу F_σ в X. ♢

Наступна теорема про підняття (теорема 4.2 з [5]) лежить в основі нашого методу. Покажемо, що для її доведення достатньо леми 1, виправивши тим самим неточність з [5].

Теорема 2. *Нехай X – топологічний простір, Y – ліндел*е*фовий простір, $f \in H_1^*(X, Y)$ і Z – топологічний простір, такий, що існує слабкий локальний гомеоморфізм $\varphi : Z \to Y$. Тоді існує відображення $g \in H_1^*(X, Z)$, таке, що $f(x) = \varphi(g(x))$ для всіх $x \in X$.*

Доведення. Відображення $\varphi : Z \to Y$ є слабким локальним гомеоморфізмом, тому для довільного $y \in Y$ існують відкритий окіл V_y точки y і відкрита в Z множина U_y, такі, що $\varphi|_{U_y} : U_y \to V_y$ – гомеоморфізм. Нехай $\mathcal{V} = \{V_y : y \in Y\}$, $\mathcal{U} = \{U_y : y \in Y\}$. Система $\mathcal{V}$ утворює відкрите покриття ліндселефового простору Y, тому існує відкрите зліченне підпокриття $\tilde{\mathcal{V}} = \{V_{y_n} : n \in \mathbb{N}\}$ простору Y. Позначимо через U_n відповідні множини з $\mathcal{U}$, такі, що $\varphi_n = \varphi|_{U_n} : U_n \to V_{y_n}$ – гомеоморфізм.

Оскільки $f \in H_1^*(X, Y)$, то $A_n = f^{-1}(V_{y_n})$ є функціональними F_σ-множинами в X і $X = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$. З [5, лема 3.2] випливає, що існує послідовність $(F_n)_{n=1}^{\infty}$ диз'юнктних функціонально двосторонніх множин в X, таких, що $F_n \subseteq A_n$ і $X = \bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n$. Нехай $B_n = f(F_n) \subseteq V_{y_n}$ і $C_n = \varphi_n^{-1}(B_n) \subseteq U_n$. Тоді $\varphi_n|_{C_n} : C_n \to B_n$ – гомеоморфізм. Позначимо $\psi_n = (\varphi_n|_{C_n})^{-1} : B_n \to C_n$ і покладемо $g(x) = \psi_n(f(x))$, якщо $x \in F_n$. Покажемо, що $f(x) = \varphi(g(x))$. Справді, якщо $x \in X$, то існує n, таке, що $x \in F_n$. Оскільки $f(x) \in B_n$, то $\psi_n(f(x)) = \varphi_n^{-1}(f(x))$, тоді

$$\varphi(g(x)) = \varphi(\psi_n(f(x))) = \varphi(\varphi_n^{-1}(f(x))) =$$

$$= \varphi(\varphi^{-1}(f(x))) = f(x).$$

Нехай G – відкрита в Z множина і $n \in \mathbb{N}$. Перевіримо, що

$$g^{-1}(G) \cap F_n = f^{-1}(\varphi(G \cap U_n)) \cap F_n.$$

Якщо $x \in g^{-1}(G) \cap F_n$, то $g(x) \in G$ і $f(x) \in B_n$. Тоді $g(x) = \psi_n(f(x)) \in C_n \subseteq U_n$, звідки $g(x) \in G \cap U_n$ і $f(x) = \varphi(g(x)) \subseteq \varphi(G \cap U_n)$.

Нехай тепер x належить до правої частини рівності. Тоді $f(x) = \varphi(g(x)) \in \varphi(G \cap U_n)$. З того, що $x \in F_n$ випливає, що $g(x) = \psi_n(f(x)) \in C_n \subseteq U_n$, а $f(x) \in B_n \subseteq V_{y_n}$. Відображення $\varphi|_{U_{y_n}} : U_n \to V_{y_n}$ – бієкція, тому $g(x) \in G \cap U_n$, отже, $g(x) \in G$.

Оскільки $\varphi_n : U_n \to V_{y_n}$ – гомеоморфізм, то множина $\varphi(G \cap U_n)$ відкрита в V_{y_n}, а значить і в Y, отже, множина $f^{-1}(\varphi(G \cap U_n))$ є функціональною типу F_σ в X, тоді і множина $g^{-1}(G) \cap F_n$ є такою ж. З леми 1 випливає, що $g \in H_1^*(X, Z)$. ♢

2.2. Наступні два твердження узагальнюють леми 3.5 і 3.6 з [5] на випадок лінійно зв'язного простору Y.

Лема 3. *Нехай X – топологічний простір, Y – лінійно зв'язний простір, $F_1, \ldots, F_n$ – диз'юнктні функціонально замкнені множини в X і $y_1, \ldots, y_n \in Y$. Тоді існує таке неперервне відображення*

$f: X \to Y$, що $f(x) = y_i$ при $x \in F_i$ для всіх $i = 1, \dots, n$.

Доведення. Нехай $n = 2$. Оскільки множини F_1 та F_2 диз'юнктні і функціонально замкнені, то існує неперервна функція $g : X \to [0,1]$, така, що $F_1 = g^{-1}(0)$ і $F_2 = g^{-1}(1)$. Простір Y лінійно зв'язний, тому існує неперервне відображення $\gamma : [0,1] \to Y$, таке, що $\gamma(0) = y_1$ і $\gamma(1) = y_2$. Покладаючи $f = \gamma \circ g$, отримаємо шукану функцію.

Нехай тепер $n > 2$. Згідно з [5, лема 3.4] існують диз'юнктні функціонально відкриті в X множини $U_1, \dots, U_n$, такі, що $F_i \subseteq U_i$ для кожного $i = 1, \dots, n$. Виберемо довільну точку $y_o \in Y$ і покладемо $F_o = X \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{n} U_i$, $f_o(x) = y_o$ для всіх $x \in X$. З доведеного вище випливає, що для кожного $i = 1, \dots, n$ існує неперервне відображення $f_i : X \to Y$, таке, що $f_i(x) = y_o$ на F_o і $f_i(x) = y_i$ на F_i. Покладемо

$$f(x) = \begin{cases} f_i(x), & \text{якщо} \quad x \in \bigcup\limits_{i=1}^{n} U_i, \\ f_o(x), & \text{якщо} \quad x \in F_o. \end{cases}$$

Позначимо $\tilde{F}_o = F_o$, $\tilde{F}_i = \overline{U}_i$ при $i = 1, \dots, n$. Покажемо, що $f_i|_{\tilde{F}_i \cap \tilde{F}_j} = f_j|_{\tilde{F}_i \cap \tilde{F}_j}$ для всіх $i \neq j$. Нехай $i, j > 0$. Якщо $x \in \tilde{F}_i \cap \tilde{F}_j$, $i \neq j$, то $x \in \overline{U}_i$, звідки $x \notin U_k$ для всіх $k \neq i$. Аналогічно $x \notin U_k$ для всіх $k \neq j$. Тоді $f_i(x) = f_j(x) = y_o$ на $\overline{U}_i \cap \overline{U}_j$. Нехай тепер $j = 0$. Якщо $x \in \overline{U}_i \cap F_o$, то $f_i(x) = f_o(x) = y_o$. Таким чином, згідно з [9, с. 119] відображення f є неперервним. $\diamondsuit$

Лема 4. *Нехай X – топологічний простір, Y – лінійно зв'язний простір, $f : X \to Y$ – відображення першого функціонального класу Лебеґа з дискретним не більш ніж зліченним образом* $\mathrm{im} f = \{y_k : k \in \mathbb{N}\}$. *Тоді $f \in B_1(X, Y)$.*

Доведення. Оскільки множина $\mathrm{im} f$ дискретна, то для кожного k множини $A_k = f^{-1}(y_k)$ є функціональними типу F_σ в X, отже існують зростаючі послідовності $(F_{k,n})_{n=1}^{\infty}$ функціонально замкнених множин, такі, що $A_k = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_{k,n}$. Згідно з лемою 3 для кожного $n \in \mathbb{N}$ існує неперервна функція $f_n : X \to Y$, така, що $f_n(x) = y_k$, якщо $x \in F_{k,n}$, $1 \leq k \leq n$.

Покажемо, що $f(x) = \lim\limits_{n \to \infty} f_n(x)$. Нехай $x \in X$. Оскільки $X = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$, то існує таке $k \in \mathbb{N}$, що $x \in A_k$. Тоді існує $n_o \geq k$, таке, що для всіх $n \geq n_o$ виконується включення $x \in F_{k,n}$. Отже, $f_n(x) = y_k$ і $f(x) = f_n(x)$ для всіх $n \geq n_o$. $\diamondsuit$

2.3. Добре відомо [7, с. 395], що рівномірна границя послідовності відображень $f_n \in H_1(X, Y)$ для довільних метричних просторів X і Y сама належить до першого класу Лебеґа. Природно постає питання: чи вірне це твердження і для відображень з першого класу Бера? Поки що нам вдалося отримати ствердну відповідь на це питання лише для метричних просторів Y, які підлягають певним обмеженням.

Неперервне відображення $\gamma_\varepsilon : Y \times Y \to Y$ назвемо *ε-ретракцією на просторі Y*, якщо для кожного $y \in Y$ відображення $\gamma_\varepsilon(\cdot, y)$ є ретракцією простору Y на кулю $B[y, \varepsilon]$. Метричний простір Y назвемо *R-простором*, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ існує ε-ретракція на Y.

Іншими словами, (Y, d) є R-простором, якщо що для кожного $\varepsilon > 0$ існує неперервне відображення $\gamma_\varepsilon : Y \times Y \to Y$, яке для всіх $y, y' \in Y$ має наступні властивості:

$$(i) \quad d(y, y') \leq \varepsilon \quad \Rightarrow \quad \gamma_\varepsilon(y, y') = y,$$

$$(ii) \quad d(\gamma_\varepsilon(y, y'), y') \leq \varepsilon.$$

Прикладом R-простору є нормований простір Y, де ε-ретракція будується наступним чином:

$$\gamma_\varepsilon(y, y') = \begin{cases} y, & \|y - y'\| \leq \varepsilon \\ y' + \frac{\varepsilon}{\|y - y'\|}(y - y'), & \|y - y'\| > \varepsilon. \end{cases}$$

Теорема 5. *Нехай X – топологічний простір, (Y, d) – R-простір і відображення $f : X \to Y$ є рівномірною границею послідовності відображень $f_n \in B_1(X, Y)$. Тоді $f \in B_1(X, Y)$.*

Доведення. Покладемо $\varepsilon_n = \frac{1}{2^n}$. Оскільки $f_n \rightrightarrows f$, то можна вважати, що

$$d(f_n(x), f_{n+1}(x)) \le \varepsilon_{n+1}, \quad n \ge 1.$$

Для кожного n існує послідовність $(g_{n,m})_{m=1}^{\infty}$ неперервних відображень $g_{n,m} : X \to Y$, така, що $\lim\limits_{m\to\infty} g_{n,m}(x) = f_n(x)$ на X.

Покладемо для $x \in X$ і $m \in \mathbb{N}$

$$\varphi_{1,m}(x) = g_{1,m}(x),$$

$$\varphi_{n,m}(x) = \gamma_{\varepsilon_{n-1}}(g_{n,m}(x), \varphi_{n-1,m}(x)),$$

при $n > 1$. Відображення $\varphi_{n,m} : X \to Y$ неперервні. Крім того, для кожного $n \in \mathbb{N}$ для всіх $x \in X$ виконується нерівність

$$d(\varphi_{n+1,m}(x), \varphi_{n,m}(x)) \le \varepsilon_n.$$

Нехай $x \in X$. Покажемо, що для кожного $n \in \mathbb{N}$ існує номер m_n, такий, що $\varphi_{n,m}(x) = g_{n,m}(x)$ для всіх $m \ge m_n$. При $n = 1$ твердження виконується. Припустимо, що $n > 1$ і $\varphi_{n-1,m}(x) = g_{n-1,m}(x)$ при $m \ge m_{n-1}$. Оскільки $g_{n,m}(x) \to f_n(x)$, а $g_{n-1,m}(x) \to f_{n-1}(x)$, то існує номер m_0, такий, що для всіх $m \ge m_0$

$$d(g_{n,m}(x), f_n(x)) < \varepsilon_{n+1},$$

$$d(g_{n-1,m}(x), f_{n-1}(x)) < \varepsilon_{n+1}.$$

Покладемо $m_n = \max\{m_0, m_{n-1}\}$. Тоді для всіх $m \ge m_n$

$$d(g_{n,m}(x), \varphi_{n-1,m}(x)) = d(g_{n,m}(x), g_{n-1,m}(x)) \le$$

$$\le d(g_{n,m}(x), f_n(x)) + d(f_n(x), f_{n-1}(x)) +$$

$$d(f_{n-1}(x), g_{n-1,m}(x)) \le \varepsilon_{n+1} + \varepsilon_n + \varepsilon_{n+1} = \varepsilon_{n-1}.$$

Тоді $\varphi_{n,m}(x) = \gamma_{\varepsilon_{n-1}}(g_{n,m}(x), \varphi_{n-1,m}(x)) = g_{n,m}(x)$ для всіх $m \ge m_n$. Звідси негайно випливає, що $\lim\limits_{m\to\infty} \varphi_{n,m}(x) = f_n(x)$ для кожного $n \in \mathbb{N}$.

Далі, покажемо, що $\lim\limits_{m\to\infty} \varphi_{m,m}(x) = f(x)$. Візьмемо $\varepsilon > 0$. Існує номер $n_0 \in \mathbb{N}$, такий, що $\varepsilon_{n_o-1} < \frac{\varepsilon}{3}$ і $d(f_{n_0}(x), f(x)) \le \frac{\varepsilon}{3}$. Оскільки $\lim\limits_{m\to\infty} \varphi_{n_0,m}(x) = f_{n_0}(x)$, то існує $m_0 > n_0$, таке, що для всіх $m \ge m_0$ виконується нерівність

$$d(\varphi_{n_0,m}(x), f_{n_0}(x)) \le \frac{\varepsilon}{3}.$$

Тоді при $m \ge m_0$ маємо

$$d(\varphi_{m,m}(x), f(x)) \le d(\varphi_{m,m}(x), \varphi_{m-1,m}(x)) +$$

$$+ \dots + d(\varphi_{n_0+1,m}(x), \varphi_{n_0,m}(x)) +$$

$$+ d(\varphi_{n_0,m}(x), f_{n_0}(x) + d(f_{n_0}(x), f(x)) <$$

$$< \varepsilon_{m-1} + \dots + \varepsilon_{n_o} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} <$$

$$< \varepsilon_{n_o-1} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon.$$

Отже, $f \in B_1(X, Y)$. ♢

3. Нагадаємо [4, с. 31], що простір X називається *локально стягуванним в точці* x_o , якщо для довільного околу U точки x_o існують окіл $U_o \subseteq U$ точки x_o і неперервне відображення $\lambda : U_o \times [0, 1] \to U_o$, такі, що $\lambda(x, 0) = x$ і $\lambda(x, 1) = x_o$ для довільної точки $x \in U_o$.

Простір X називається *локально стягуванним*, якщо він є таким у кожній своїй точці.

Теорема 6. *Нехай X – топологічний простір, $T \subseteq \mathbb{R}^n$ – зв'язна локально стягуванна множина. Тоді $H_1^*(X, T) \subseteq B_1(X, T)$.*

Доведення. Ми вважаємо, що $|T| > 1$. Нехай $\mathbb{B}_{n+1} = \{p \in \mathbb{R}^{n+1} : \|p\| < 1\}$,

$$\mathbb{S}_n = \{p \in \mathbb{R}^{n+1} : \|p\| = 1\}, \ R = \mathbb{R}^{2n+2}.$$

Для числа $\delta > 0$ і точки $p_o \in R$ позначимо

$$B(p_o, \delta) = \{p \in R : \|p - p_o\| < \delta\},$$

$$B[p_o, \delta] = \{p \in R : \|p - p_o\| \le \delta\}.$$

Згідно з [8, с. 126] можна вважати, що $T \subseteq \mathbb{S}_{2n+1}$. Покладемо $Y = T \cup \mathbb{B}_{2n+2}$. Множина T локально стягуванна, тому з [8, c. 378] випливає, що T є околовим ретрактом простору Y, тобто існують відкрита в Y множина $\tilde{G}$, яка містить T, і ретракція $\tilde{r} : \tilde{G} \to T$. Множина T зв'язна, тому існує єдина компонента зв'язності G множини $\tilde{G}$, така, що $T \subseteq G$. Оскільки Y – локально зв'язний простір, то, згідно з [3, с. 126] множина G є відкритою в $\tilde{G}$, а значить, і в Y. Покладаючи $r = \tilde{r}|_G : G \to T$, ми отримаємо ретракцію множини G на T.

Виберемо довільні різні точки y_1 і y_2 з множини T. Існує число $\delta > 0$, таке, що

$B[y_1,\delta]\cap B[y_2,\delta]=\emptyset$ і $C_1=B(y_1,\delta)\cap Y\subseteq G$, $C_2=B(y_2,\delta)\cap Y\subseteq G$. Позначимо $D_1=B(y_1,\frac{\delta}{2})\cap Y$ і $D_2=B(y_2,\frac{\delta}{2})\cap Y$. Множина $G_o=G\setminus(B[y_1,\frac{\delta}{2}]\cup B[y_2,\frac{\delta}{2}])$ відкрита в Y. Тому існують відкриті в Y опуклі множини G_n, такі, що $G_o=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}G_n$. Покладемо $C_n=G_{n-2}$ при $n\geq 3$. Тоді $G=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}C_n$, де множини C_n опуклі і відкриті в Y для всіх $n\geq 1$.

Побудуємо простір Z наступним чином. Позначимо $W_2=Y$, $c_2=0$, $z_2=y_1$. Нехай u_o – довільний вектор, ортогональний до вектора z_2 і такий, що $\|u_o\|=1$. Покладемо

$$z_n=z_2+3(n-2)u_o,\quad c_n=3(n-2)u_o$$

для всіх $n\geq 1$. Нехай $Y_1=W_2+c_1$ і $h:Y_1\to h(Y_1)$ – гомеоморфізм, такий, що $h(y_2+c_1)=z_1$, $h(c_1)=c_1$ і $\|h(y')-h(y'')\|=\|y'-y''\|$ для всіх $y',y''\in Y_1$. Тоді покладемо $W_1=h(Y_1)$, $W_n=W_2+c_n$, якщо $n\geq 2$, $F=\{\lambda u_o+z_2:\lambda\in[-3,+\infty)\}$, $W=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}W_n$ і $Z=F\cup W$.

Доведемо, що послідовність $(W_n)_{n=1}^{\infty}$ дискретна. Нехай $u\in W_n$, $v\in W_m$ і $m\neq n$. Оскільки

$$\|u-v\|\geq\|c_n-c_m\|-\|c_n-u\|-\|v-c_m\|\quad\text{і}$$

$$\|c_n-c_m\|=\|3n-3u_o-3m+3u_o\|=3|n-m|,$$

то $\|u-v\|\geq 3|n-m|-2\geq 1$, отже $d(W_n,W_m)\geq 1$, де d – метрика на просторі Z, індукована з R.

Зауважимо, що $F\cap[W_n]_R=\{z_n\}$ для всіх $n\geq 1$, де $[W_n]_R$ – це замикання множини W_n в просторі R. Дійсно, якщо $n\geq 1$ і $u\in F\cap[W_n]_R$, то $u=\lambda u_o+z_2$ і $\|u-c_n\|\leq 1$. Тоді

$$\|u-c_n\|^2=(u-c_n,u-c_n)=$$

$$=(\lambda u_o-3(n-2)u_o+z_2,\lambda u_o-3(n-2)u_o+z_2)=$$

$$=(\lambda u_o-3(n-2)u_o,\lambda u_o-3(n-2)u_o)+$$

$$+(\lambda u_o-3(n-2)u_o,z_2)+$$

$$+(z_2,\lambda u_o-3(n-2)u_o)+(z_2,z_2)=$$

$$=(\lambda u_o-3(n-2)u_o,\lambda u_o-3(n-2)u_o)+(z_2,z_2),$$

адже $(z_2,\lambda u_o-3(n-2)u_o)=0$. З іншого боку

$$\|u-z_n\|^2+\|z_n-c_n\|^2=(u-z_n,u-z_n)+$$

$$+(z_n-c_n,z_n-c_n)=$$

$$=(\lambda u_o-3(n-2)u_o,\lambda u_o-3(n-2)u_o)+(z_2,z_2).$$

Таким чином,

$$\|u-z_n\|^2+\|z_n-c_n\|^2=\|u-c_n\|^2\leq 1.$$

Але $\|z_n-c_n\|=1$, тому $\|u-z_n\|=0$, звідки випливає, що $u=z_n$.

Для всіх $n\geq 1$ покладемо $B_n=W_n\setminus\{z_n\}$ і покажемо, що множини B_n відкриті в Z. Справді, для кожного $n\geq 1$ множина $(\bigcup\limits_{m\neq n}[W_m]_R)\cup F$ замкнена в R, тому множина $U_n=R\setminus(F\cup(\bigcup\limits_{m\neq n}[W_m]_R))$ відкрита в R. Тоді $B_n=U_n\cap Z$. Дійсно, якщо $z\in B_n$, то $z\in W_n$ і $z\neq z_n$, тоді $z\notin F$ і $z\notin[W_m]_R$ для всіх $m\neq n$, бо послідовність $(W_m)_{m=1}^{\infty}$ дискретна. Навпаки, якщо $z\in U_n\cap Z$, то $z\notin F$, $z\notin[W_m]_R$ для всіх $m\neq n$ і $z\in Z$, отже, $z\in W_n$. Таким чином, множини B_n відкриті в Z для кожного $n\geq 1$.

Зауважимо також, що множини W_n замкнені в Z, бо $W_n=B[c_n,1]\cap Z$.

Нехай $\psi_n(y)=y+c_n$ для всіх $y\in Y$, $n\geq 2$, і $\psi_1(y)=h(y+c_1)$. Тоді $\psi_n:Y\to W_n$ – гомеоморфізм для кожного $n\geq 1$. Покладемо $A_n=\psi_n(C_n)$, $n\geq 1$.

Доведемо, що $z_n\notin[A_n]_Z$ для всіх $n\geq 1$. Справді, $y_1\in D_1$, а $D_1\cap C_n=\emptyset$ при $n\neq 1$ і множини D_1 та C_n відкриті в Y, тому $D_1\cap[C_n]_Y=\emptyset$, звідки $y_1\notin[C_n]_Y$. Аналогічно $y_2\notin[C_n]_Y$ для всіх $n\neq 2$. Тоді $z_n=\psi_n(y_1)\notin\psi_n([C_n]_Y)=[A_n]_{W_n}$ для всіх $n\geq 2$. Якщо $n=1$, то $z_1=\psi_1(y_2)=h(y_2+c_1)$. З того, що $y_2+c_1\notin[C_1]_Y+c_1$ і відображення h – це ізометрія, випливає, що $z_1\notin h([C_1]_Y+c_1)=[A_1]_{W_1}$. Оскільки множини W_n замкнені в Z, то $z_n\notin[A_n]_Z$.

Множини C_n відкриті в Y, а відображення $\psi_n:Y\to W_n$ гомеоморфізм, тому множини A_n відкриті в W_n. Але $z_n\notin A_n$, тому множини A_n відкриті в B_n, а значить і в Z.

Доведемо, що $[A_n]_Z\subseteq B_n$ для всіх $n\geq 1$. Нехай $z\in[A_n]_Z\setminus A_n$, тоді $z\neq z_n$, адже $z_n\notin$

$[A_n]_Z$, З того, що $[A_n]_Z = [A_n]_R \cap Z$ випливає, що $z \in [A_n]_R$ і $z \in Z$. Тоді $z \in F$ або $z \in W$. Але $F \cap [A_n]_R \subseteq F \cap [W_n]_R = \{z_n\}$, звідки $z \notin F$, тобто $z \in W$. Тоді $z \notin W_m$ для всіх $m \neq n$, бо $d(W_n, W_m) \geq 1$. Отже, $z \in W_n \setminus \{z_n\} = B_n$.

Відображення $\varphi_n = \psi_n^{-1} : W_n \to Y$ – гомеоморфізм, причому $\varphi_n|_{[A_{n+1}]_Z} : [A_{n+1}]_Z \to [C_{n+1}]_Y$ – гомеоморфізм для всіх $n \geq 1$. Оскільки множини $[C_{n+1}]_Y$ опуклі, то згідно з теоремою Дуґунджі [4, с. 86] для кожного $n \geq 1$ існує неперервне відображення $h_n : Z \to [C_{n+1}]_Y$, таке, що $h_n|_{[A_{n+1}]_Z} = \varphi_n|_{[A_{n+1}]_Z}$. З того, що відображення $\varphi_n|_{A_{n+1}} : A_{n+1} \to C_{n+1}$ також є гомеоморфізмом і з [6, лема 3] випливає, що існує слабкий локальний гомеоморфізм $\varphi : Z \to G$.

Нехай $f \in H_1^*(X, T)$. Тоді $f \in H_1^*(X, G)$. Згідно з теоремою 2 існує відображення $g \in H_1^*(X, Z)$, таке, що $f = \varphi \circ g$. Простір Z сепарабельний, тому з [5] випливає, що існує послідовність $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ простих функцій $g_n \in H_1^*(X, Z)$, така, що $g_n \rightrightarrows g$. З леми 4 випливає, що $g_n \in B_1(X, Z)$, адже простір Z лінійно зв'язний.

Для довільних точок $z', z'' \in Z$ позначимо

$$[z', z''] = \{\lambda_1 z' + \mu_1 u, \lambda_2 u + \mu_2 v, \lambda_3 v + \mu_3 z'' :$$

$$\lambda_i + \mu_i = 1,\ \lambda_i, \mu_i \geq 0,\ i = 1, 2, 3\},$$

де

$$(u, v) = \begin{cases} (z_n, z_m), & z' \in W_n, \quad z'' \in W_m, \\ (z', z''), & z', z'' \in F, \\ (z', z''), & z', z'' \in W_n, \\ (z_n, z''), & z' \in W_n, \quad z'' \in F, \\ (z', z_m), & z' \in F, \quad z'' \in W_m. \end{cases}$$

Іншими словами $[z', z'']$ – це: відрізок в Z, який з'єднує точки z' і z'', якщо $z', z'' \in W_n$, або $z', z'' \in F$; ламана $z' z_n z_m z''$, якщо $z' \in W_n$ і $z'' \in W_m$; ламана $z' z_n z''$, якщо $z' \in W_n$ і $z'' \in F$; і ламана $z' z_m z''$, якщо $z' \in F$ і $z'' \in W_m$.

Покладемо

$$\rho(z', z'') = d(z', u) + d(u, v) + d(v, z'').$$

Легко бачити, що ρ – це метрика на Z. Зауважимо, що ρ породжує на Z його вихідну топологію, адже на F і на всіх W_n метрика ρ збігається з метрикою з простору R.

Доведемо тепер, що простір (Z, ρ) є R-простором.

Для $z', z'' \in Z$ і $t \geq 0$ покладемо

$$\psi(z', z'', t) = z \iff z \in [z', z''] \quad \text{і}$$

$$\frac{\rho(z, z'')}{\rho(z', z'')} = t, \quad \text{якщо} \quad z' \neq z'',$$

$$\text{і} \quad \psi(z', z', t) = z' \quad \text{для кожного} \quad t \in [0, 1],$$

а при $t > 1$ покладемо $\psi(z', z'', t) = z'$.

Покажемо, що відображення $\psi : Z \times Z \times [0, +\infty) \to Z$ неперервне. Оскільки $\psi(z', z'', 1) = z'$ і при $t > 1$ відображення ψ неперервне, то досить перевірити його неперервність при $t \in [0, 1]$.

Зафіксуємо $z'_o, z''_o \in Z$ і $t_o \in [0, 1]$. Нехай $(z'_n)_{n=1}^{\infty}$ і $(z''_n)_{n=1}^{\infty}$ – довільні послідовності, такі, що $z'_n \to z'_o$ і $z''_n \to z''_o$ в (Z, ρ), і $(t_n)_{n=1}^{\infty}$ – послідовність чисел з відрізка $[0, 1]$, така, що $t_n \to t_o$. Позначимо $u_n = \psi(z'_n, z''_n, t_n)$, $z_o = \psi(z'_o, z''_o, t_o)$ і покажемо, що $u_n \to z_o$ в (Z, ρ).

Нехай $z'_o = z_k$ і $z''_o = z_m$ для деяких $k, m \geq 1$, $k < m$. Можна вважати, що $z'_n \neq z''_n$ для всіх $n \geq 1$. Тоді $z_o \in [z_k, z_m]$, $\rho(z_k, z_m) = d(z_k, z_m)$, $t_o = \dfrac{d(z_o, z_m)}{d(z_k, z_m)}$, $u_n \in [z'_n, z''_n]$ і $t_n = \dfrac{\rho(u_n, z''_n)}{\rho(z'_n, z''_n)}$. Крім того, $\rho(z'_n, z''_n) = \rho(z'_n, u_n) + \rho(u_n, z''_n)$ і $d(z_k, z_m) = d(z_k, z_o) + d(z_o, z_m)$.

З того, що $t_n \to t_o$ випливає, що $\rho(u_n, z_m) \to d(z_o, z_m)$ і $\rho(u_n, z_k) \to d(z_o, z_k)$. Якщо $t_o = 0$, то $z_o = z_k$ і $\rho(u_n, z_k) \to 0$, тобто $u_n \to z_o$. Якщо ж $t_o = 1$, то $z_o = z_m$ і $\rho(u_n, z_m) \to 0$, тобто $u_n \to z_o$.

Нехай $0 < t_o < 1$. Оскільки $z_k \neq z_o$ і $z_o \neq z_m$, то існує число $\lambda > 0$, таке, що $B(z_k, \lambda) \cap B(z_m, \lambda) = \emptyset$, причому $B(z_k, \lambda) \cap W_n = \emptyset$ для всіх $n \neq k$ і $B(z_m, \lambda) \cap W_n = \emptyset$ для всіх $n \neq m$. Позначимо $U = B(z_k, \lambda) \cap Z$, $V = B(z_m, \lambda) \cap Z$. З того, що $z'_n \to z_k$, а $z''_n \to z_m$ випливає, що існує номер n_o, такий, що $z'_n \in U$, $z''_n \in V$ для всіх $n \geq n_o$. Оскільки $u_n \in [z'_n, z''_n]$, то $u_n \in U \cup [z_k, z_m] \cup V$ для всіх $n \geq n_o$.

Покажемо, що існує номер $n_1 \geq n_o$, такий, що $u_n \in [z_k, z_m]$ для всіх $n \geq n_1$. Нехай це не так. Припустимо, що множина $U \backslash [z_k, z_m]$ містить нескінченну кількість елементів з послідовності (u_n), тобто існує зростаюча послідовність номерів $(n_p)_{p=1}^{\infty}$, така, що $u_{n_p} \in U \setminus [z_k, z_m]$. Тоді

$$\rho(u_{n_p}, z_m) = d(u_{n_p}, z_k) + d(z_k, z_m) =$$

$$= d(u_{n_p}, z_k) + d(z_k, z_o) + d(z_o, z_m),$$

звідки

$$\lim_{p\to\infty} d(u_{n_p}, z_k) = d(z_o, z_m) - d(z_k, z_o) -$$

$$-d(z_o, z_m) = -d(z_k, z_o),$$

що неможливо, оскільки $d(z_k, z_o) > 0$. Аналогічно доводиться, що множина $V \setminus [z_k, z_m]$ містить скінченну кількість елементів послідовності (u_n).

Оскільки $u_n \in [z_k, z_m]$ для всіх $n \geq n_1$, то

$$d(z_k, z_m) = d(z_k, z_o) + d(z_o, u_n) + d(u_n, z_m)$$

або

$$d(z_k, z_m) = d(z_k, u_n) + d(u_n, z_o) + d(z_o, z_m).$$

Тоді $\lim_{n\to\infty} d(u_n, z_o) = 0$, отже, $u_n \to z_o$.

Неперервність відображення ψ в інших випадках розташування точок z_o' і z_o'' перевіряється аналогічно.

Для числа $\varepsilon > 0$ покладемо

$$\gamma_\varepsilon(z', z'') = \psi\left(z', z'', \frac{\varepsilon}{\rho(z', z'')}\right),$$

якщо $z' \neq z''$, і $\gamma_\varepsilon(z', z') = z'$. Відображення $\gamma_\varepsilon : Z \times Z \to Z$ також неперервне.

Перевіримо умови (i) та (ii) для функції γ_ε. Зрозуміло, що у випадку $z' = z''$ ці умови виконуються.

Нехай $0 < \rho(z', z'') \leq \varepsilon$. Тоді $t = \dfrac{\varepsilon}{\rho(z', z'')} \geq 1$ і $\gamma_\varepsilon(z', z'') = \psi(z', z'', t) = z'$, тобто виконується умова (i). Крім того, для таких z' і z'' маємо

$$\rho(\gamma_\varepsilon(z', z''), z'') = \rho(z', z'') \leq \varepsilon,$$

тобто виконується умова (ii).

Залишилося перевірити (ii) у випадку, коли $\rho(z', z'') > \varepsilon$. Тоді $t = \frac{\varepsilon}{\rho(z', z'')} < 1$ і $\gamma_\varepsilon(z', z'') = \psi(z', z'', t) = z$, де $z \in [z', z'']$ і $\rho(z, z'') = t\rho(z', z'') = \varepsilon$. Отже, $\rho(\gamma_\varepsilon(z', z''), z'') = \varepsilon$.

Тоді, згідно з теоремою 5, $g \in B_1(X, Z)$ тобто існує така послідовність неперервних відображень $h_n : X \to Z$, що $h_n(x) \to g(x)$. Покладемо $f_n = \varphi \circ h_n$, $f_n : X \to G$, тоді $f_n(x) \to \varphi(g(x)) = f(x)$, таким чином, $f \in B_1(X, G)$. Відображення $r \circ f_n : X \to T$, є неперервними і $r(f_n(x)) \to r(f(x)) = f(x)$, адже множина T є ретрактом множини G. Отже, $f \in B_1(X, T)$. $\diamondsuit$

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Fosgerau, M.* When are Borel functions Baire functions? // Fund. Math.— 1993.— **143**.— P. 137—152.
2. *Hansell, R.W.* Borel measurable mappings for nonseparable metric spaces // Trans. Amer. Math. Soc.— 1971.— **161**.— P.145—169.
3. *Александров П.С.* Введение в теорию множеств и общую топологию.— М.: Наука, 1977.— 368 с.
4. *Борсук К.* Теория ретрактов.— М.: Мир, 1971.— 292 с.
5. *Карлова О.О.* Перший функціональний лебеґівський клас і берівська класифікація нарізно неперервних відображень // Наук. вісн. Чернівецького ун-ту. Вип. 191-192. Математика.— Чернівці: Рута, 2004.— С.52—60.
6. *Карлова О.О.* Про належність до першого класу Бера відображень зі значеннями в областях // у друці.
7. *Куратовский К.* Топология. Т.1.— М.: Мир, 1966.— 594 с.
8. *Куратовский К.* Топология. Т.2.— М.: Мир, 1969.— 624 с.
9. *Энгелькинг Р.* Общая топология.— М.: Мир, 1986.— 752 с.

Стаття надійшла до редколегії 25.02.2005