УДК 517.911

©2005 р. О.Є. Зернов, О.Р. Чайчук

Південноукраїнський державний педагогічний університет ім. К.Д.Ушинського, Одеса

СИНГУЛЯРНА ЗАДАЧА КОШІ ДЛЯ ФУНКЦІОНАЛЬНО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ: РОЗВ'ЯЗНІСТЬ, КІЛЬКІСТЬ РОЗВ'ЯЗКІВ, АСИМПТОТИКА

Якісні методи використані для доведення існування неперервно диференційовних розв'язків із потрібними асимптотичними властивостями в околі особливої точки.

The qualitative methods are employed to prove existence of continuously differentiable solutions with required asymptotic properties in the neighbourhood of a singular point.

Відомо, наскільки вагоме місце посідають як функціонально-диференціальні рівняння [1], [2], [10], [13], так і сингулярні задачі для звичайних диференціальних рівнянь, розв'язних відносно похідної невідомої функції [5], [9], [14]. У той же час сингулярні задачі для функціонально-диференціальних рівнянь нині досліджені досить мало [2], [3], [4], [11], [12], а асимптотичні властивості розв'язків таких задач практично не досліджені [2], [8]. У цій статті зроблена спроба розглянути одну з цих задач. При її аналізі використані методи якісної теорії диференціальних рівнянь [5], а також [6], [7], [8]. Ми хочемо звернути увагу на те, що розв'язки нами шукаються у класі функцій $x:(0,\rho]\to\mathbb{R}$, які неперервно диференційовні при всіх $t\in(0,\rho]$ і задовольняють рівняння при всіх $t\in(0,\rho]$ (ρ досить мале).

Розглядається задача Коші

$$t^r x'(t) = at + b_1 x(t) + b_2 x\left(g(t)\right) + \\ +\varphi\left(t, x(t), x\left(g(t)\right), x'(t), x'\left(h(t)\right)\right), \qquad (1)$$

$$x(0)=0, \qquad (2)$$

де $t\in(0,\tau)$, невідома функція $x:(0,\tau)\to\mathbb{R}$, r, a, b_1, b_2 – сталі, $r>1$, $g:(0,\tau)\to(0,+\infty)$ та $h:(0,\tau)\to(0,+\infty)$ – неперервно диференційовні функції, $0<g(t)\le t$, $0<h(t)\le t$, $g'(t)\ge 0$, $h'(t)\ge 0$ при $t\in(0,\tau)$, причому

$$g(t)=g_0 t + g_1(t), \quad t\in(0,\tau),$$

де g_0 – стала, $g_1(t)=o(t)$ при $t\to+0$, $\varphi:\mathcal{D}\to\mathbb{R}$ – неперервна функція,

$$\mathcal{D}=\{(t,x,y,u,v): t\in(0,\tau), |x|<\nu_1 t, \\ |y|<\nu_1 g(t), |u|<\nu_2 t^{1-r}(h(t))^{1-r}, |v|<\nu_2\}.$$

Означення. Розв'язком задачі (1), (2) називається неперервно диференційовна функція $x:(0,\rho]\to\mathbb{R}$, $0<\rho<\tau$, така, що: 1) $(t,x(t),x(g(t)),x'(t),x'(h(t)))\in\mathcal{D}$ при всіх $t\in(0,\rho]$; 2) $x(t)$ тотожньо задовольняє рівняння (1) при всіх $t\in(0,\rho]$.

Вважатимемо, що виконані умови:

1) $|\varphi(t,x_1,y,u,v)-\varphi(t,x_2,y,u,v)|\le$
$\le l_2(t)\,|x_1-x_2|$, $(t,x_i,y,u,v)\in\mathcal{D}$,
$|\varphi(t,x,y_1,u,v)-\varphi(t,x,y_2,u,v)|\le$
$\le l_3(t)\,|y_1-y_2|$, $(t,x,y_i,u,v)\in\mathcal{D}$,
$|\varphi(t,x,y,u_1,v)-\varphi(t,x,y,u_2,v)|\le$
$\le l_4 t^r\,|u_1-u_2|$, $(t,x,y,u_i,v)\in\mathcal{D}$,
$|\varphi(t,x,y,u,v_1)-\varphi(t,x,y,u,v_2)|\le$
$\le l_5\,(h(t))^r\,|v_1-v_2|$,
$(t,x,y,u,v_i)\in\mathcal{D}$, $i\in\{1,2\}$,
де $l_j:(0,\tau)\to(0,+\infty)$ – неперервні функції, $\lim\limits_{t\to+0} l_j(t)=0$, $j\in\{1,2\}$, l_4, l_5 – сталі, $l_4+l_5<1/2$;

2) $|\varphi(t,ct,cg(t),c,c)|\le t\beta(t)$, $t\in(0,\tau)$, де c – розв'язок рівняння $a+(b_1+b_2g_0)\,c=0$ такий, що $|c|<\nu_1$, $\beta:(0,\tau)\to(0,+\infty)$ – неперервно диференційовна функція з властивостями: $\beta'(t)\ge 0$, $t\in(0,\tau)$, $\lim\limits_{t\to+0}\beta(t)=0$, $\lim\limits_{t\to+0} t\beta'(t)\,(\beta(t))^{-1}=\beta_0$, $0\le\beta_0<+\infty$,

$$\lim_{t\to+0} t^{r-1}(\beta(t))^{-1} = L,\ 0 \le L < +\infty,$$
$$\lim_{t\to+0} g_1(t)(t\beta(t))^{-1} = G,\ 0 \le G < +\infty.$$

Позначимо через $\mathcal{U}(\rho, M)$ множину всіх неперервно диференційовних функцій $u : (0,\rho] \to \mathbb{R}$, які задовольняють умову

$$|u(t) - ct| \le Mt\beta(t),\ t \in (0,\rho];$$

де ρ, M – додатні сталі, $\rho < \tau$.

Теорема 1. Нехай виконуються умови:

$|\varphi(t_1, x, y, u, v) - \varphi(t_2, x, y, u, v)| \le l_1(t_\varepsilon) \cdot$ $\cdot |t_1 - t_2|$, $0 < t_\varepsilon \le t_1, t_2 < \tau$, $(t_i, x, y, u, v) \in \mathcal{D}$, $i \in \{1, 2\}$, де $l_1 : (0,\tau) \to (0,+\infty)$ – неперервна неспадна функція;

$$\begin{aligned} &|b_2| < |b_1|(1 - 2(l_4 + l_5));\\ &|h(t_1) - h(t_2)| \le |t_1 - t_2|, \quad 0 < t_1, t_2 < \tau;\\ &\lim_{t\to+0} tg'(t)(g(t))^{-1} = g_*, \quad 0 \le g_* < +\infty\\ &\lim_{t\to+0} th(t)(h(t))^{-1} = h_*, \quad 0 \le h_* < +\infty. \end{aligned}$$

Тоді: а) якщо $b_1 > 0$, то існують сталі ρ, M такі, що задача (1), (2) має безліч розв'язків $x : (0,\rho] \to \mathbb{R}$, які належать множині $\mathcal{U}(\rho, M)$. При цьому для будь-якої сталої α, яка задовольняє умову

$$|\alpha - c\rho| < M\rho\beta(\rho), \tag{3}$$

знайдеться хоча б один розв'язок $x_\alpha \in \mathcal{U}(\rho, M)$ такий, що $x_\alpha(\rho) = \alpha$;

б) якщо $b_1 < 0$, то існують сталі ρ, M такі, що задача (1), (2) має хоча б один розв'язок $x : (0,\rho] \to \mathbb{R}$, який належить множині $\mathcal{U}(\rho, M)$.

Доведення. Оберемо M, q так, щоб

$$2|b_1| < q < \frac{|b_1| - |b_2|}{l_4 + l_5}, M > (|b_1| - |b_2| - -q(l_4 + l_5))^{-1}(|b_2 c| G + L|c| + 1).$$

Зазначимо, що тут ρ досить мале.

Нехай $\mathcal{B}$ – простір неперервно диференційовних функцій $x : [0,\rho] \to \mathbb{R}$ з нормою

$$\|x\|_{\mathcal{B}} = \max_{t\in[0,\rho]} (|x(t)| + |x'(t)|). \tag{4}$$

Позначимо через $\mathcal{U}$ підмножину $\mathcal{B}$, кожен елемент $u : [0,\rho] \to \mathbb{R}$ якої при будь-якому $t \in (0,\rho]$ задовольняє умови

$$\begin{aligned} &|u(t) - ct^{r+1}| \le Mt^{r+1}\beta(t),\\ &|u'(t) - (r+1)ct^r| \le qMt\beta(t), \end{aligned} \tag{5}$$

причому $u(0) = 0$, $u'(0) = 0$ і, крім того,

$$\begin{aligned} &\forall\varepsilon > 0\ \forall u \in \mathcal{U}\ \forall t_i \in [0,\rho], i \in \{1,2\}:\\ &|t_1 - t_2| \le \delta(\varepsilon) \Rightarrow |u'(t_1) - u'(t_2)| \le \varepsilon, \end{aligned} \tag{6}$$

де $\delta(\varepsilon) = (1 - l_4 - l_5)\varepsilon(2\mathcal{B}(t_\varepsilon))^{-1}$; тут $\mathcal{B}(t_\varepsilon) = l_1(t_\varepsilon) + (g(t_\varepsilon))^{-r} + (t_\varepsilon h(t_\varepsilon))^{-r}$, стала $t_\varepsilon \in (0,\rho)$ обрана так, що при $t \in (0, t_\varepsilon]$ одночасно виконуються нерівності

$$\begin{aligned} qMt\beta(t) &\le (1 - l_4 - l_5)\varepsilon/12,\\ r(r+1)|c|t^{r-1} &\le (1 - l_4 - l_5)\varepsilon/12. \end{aligned}$$

Неважко переконатися в тому, що $\mathcal{U}$ – замкнена, обмежена, опукла і (згідно з критерієм Арцела) компактна множина.

Покладемо $x = y/t^r$, де $y : (0,\tau) \to \mathbb{R}$ – нова невідома функція. Тоді від задачі (1), (2) ми перейдемо до задачі Коші

$$\begin{aligned} y'(t) = at + b_1 t^{-r} y(t) + rt^{-1} y(t) +\\ +b_2(g(t))^{-r} y(g(t)) + \varphi\big(t, t^{-r} y(t),\\ (g(t))^{-r} y(g(t)), t^{-r} y'(t) - rt^{-r-1} y(t),\\ (h(t))^{-r} y'(h(t)) - r(h(t))^{-r-1} y(h(t))\big), \end{aligned} \tag{7}$$

$$y(0) = 0. \tag{8}$$

Далі розглядаємо диференціальне рівняння

$$\begin{aligned} y'(t) = at + b_1 t^{-r} y(t) + rt^{-1} y(t) +\\ +b_2(g(t))^{-r} u(g(t)) + \varphi\big(t, t^{-r} u(t),\\ (g(t))^{-r} u(g(t)), t^{-r} u'(t) - rt^{-r-1} u(t),\\ (h(t))^{-r} u'(h(t)) - r(h(t))^{-r-1} u(h(t))\big), \end{aligned} \tag{9}$$

де $u \in \mathcal{U}$ – довільна фіксована функція. Нехай $\mathcal{D}_0 = \{(t,y) : t \in (0,\rho], y \in \mathbb{R}\}$. Якщо $(t,y) \in \mathcal{D}_0$, то для рівняння (9) виконані умови теореми існування і єдиності розв'язку та неперервної залежності розв'язків від початкових даних. Далі будемо проводити міркування за схемою, запропонованою раніше (див. [7], [8]); для зручності посилань збережемо тут термінологію та позначення роботи [8]. Покладемо

$$\Phi_1 = \{(t,y) : t \in (0,\rho]\,, \\ |y - ct^{r+1}| = Mt^{r+1}\beta\,(t)\}\,,$$
$$\mathcal{D}_1 = \{(t,y) : t \in (0,\rho]\,, \\ |y - ct^{r+1}| < Mt^{r+1}\beta\,(t)\}\,,$$
$$H = \{(t,y) : t = \rho, \\ |y - c\rho^{r+1}| < M\rho^{r+1}\beta\,(\rho)\}\,.$$

Нехай допоміжна функція $A_1 : \mathcal{D}_0 \to [0,+\infty)$ визначається рівністю $A_1(t,y) = (y - ct^{r+1})^2\,(t^{r+1}\beta(t))^{-2}$. Неважко переконатися в тому, що для $(t,y) \in \Phi_1$ на підставі рівняння (9) похідна функції A_1 додатна для $b_1 > 0$ і від'ємна, коли $b_1 < 0$. Тому для $b_1 > 0$ всі точки Φ_1 – точки строгого входу для $\mathcal{D}_1$ відносно (9), а якщо $b_1 < 0$, то всі точки Φ_1 – точки строгого виходу для $\mathcal{D}_1$ відносно (9). Отже, для $b_1 > 0$ кожна з інтегральних кривих рівняння (9), які перетинають H, залишається в $\mathcal{D}_1$ при всіх $t \in (0,\rho]$. Якщо ж $b_1 < 0$, то серед інтегральних кривих, які перетинають H, існує одна й тільки одна, яка залишається в $\mathcal{D}_1$ при всіх $t \in (0,\rho]$. Для доведення єдиності для випадку $b_1 < 0$ розглядається однопараметрична сім'я кривих $\Phi_2\,(\nu) = \{(t,y) : t \in (0,\rho]\,,$ $|y - y_u\,(t)| = \nu t^{r+1}\beta\,(t)\,(-\ln t)\}$, де ν – параметр, $\nu \in (0,1]$ і допоміжна функція $A_2 : \mathcal{D}_0 \to [0,+\infty)$, що визначена рівністю $A_2\,(t,y) = (y - y_u\,(t))^2\,(t^{r+1}\beta\,(t)\,(-\ln t))^{-2}$. Якщо $b_1 > 0$, то фіксуємо будь-яку точку $G\,(\rho, y_G) \in H$ і позначаємо через $J_u : (t, y_u\,(t))$ ту інтегральну криву (9), для якої $y_u\,(\rho) = y_G$. Якщо ж $b_1 < 0$, то через $J_u : (t, y_u\,(t))$ позначаєтья та єдина інтегральна крива рівняння (9), яка залишається в $\mathcal{D}_1$ при всіх $t \in (0,\rho]$. Неважко переконатися в тому, що при $t \in (0,\rho]$

$$\begin{gathered} |y_u\,(t) - ct^{r+1}| \le Mt^{r+1}\beta\,(t)\,, \\ |y'_u\,(t) - (r+1)\,ct^r| \le qMt\beta\,(t)\,. \end{gathered} \tag{10}$$

Покладемо за означенням $y_u(0) = 0$, $y'_u(0) = 0$. Покажемо, що для функції $y_u : [0,\rho] \to \mathbb{R}$ виконана умова (6). Якщо $t_i \in [t_\varepsilon, \rho]$, $i \in \{1,2\}$, $|t_1 - t_2| \le \delta(\varepsilon)$, то $|y'_u(t_1) - y'_u(t_2)| \le l_4|u'(t_1) - u'(t_2)| + l_5|u'(h(t_1)) - u'(h(t_2))| + B(t_\varepsilon)|t_1 - t_2|$. Так як $|t_1 - t_2| \le \delta(\varepsilon)$, то $|u'(t_1) - u'(t_2)| \le \varepsilon$. В той же час $|h(t_1) - h(t_2)| \le |t_1 - t_2| \le \delta(\varepsilon)$, і тому $|u'(h(t_1)) - u'(h(t_2))| \le \varepsilon$ також. Отже, $|y'_u(t_1) - y'_u(t_2)| \le (l_4 + l_5)\varepsilon + B(t_\varepsilon)\delta(\varepsilon) = (l_4 + l_5)\varepsilon + (1 - l_4 - l_5)\varepsilon/2 < \varepsilon = (1 + l_4 + l_5)\varepsilon/2 < \varepsilon$. Якщо $t_i \in [0, t_\varepsilon]$, $i \in \{1,2\}$, то $|y'_u(t_1) - y'_u(t_2)| \le |y'_u(t_1) - (r+1)ct_1^r| + |y'_u(t_2) - (r+1)ct_2^r| + (r+1)|c||t_1^r - t_2^r| \le (1 - l_4 - l_5)\varepsilon/4 < \varepsilon$. Нарешті, якщо $t_1 \in [0, t_\varepsilon]$ і $t_2 \in [t_\varepsilon, \rho]$, причому $|t_1 - t_2| \le \delta(\varepsilon)$, то, оскільки $|t_\varepsilon - t_1| \le |t_1 - t_2| \le \delta(\varepsilon)$, $|y'_u(t_1) - y'_u(t_2)| \le |y'_u(t_1) - y'_u(t_\varepsilon)| + |y'_u(t_\varepsilon) - y'_u(t_2)| \le (1 + l_4 + l_5)\varepsilon/2 + (1 - l_4 - l_5)\varepsilon/2 = \varepsilon$.

Ми показали, що існує, і причому цілком визначена, функція $y_u : [0,\rho] \to \mathbb{R}$, яка належить множині $\mathcal{U}$ і при цьому є розв'язком задачі Коші (9), (8) при $t \in (0,\rho]$. Визначимо оператор $T : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$, покладаючи $Tu = y_u$. Доведемо, що оператор $T : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ є неперервний. Нехай $u_i \in \mathcal{U}$, $i \in \{1,2\}$ – довільні фіксовані функції, $\|u_1 - u_2\|_{\mathcal{B}} = d$, $d > 0$. Позначимо $Tu_i = y_i$, $i \in \{1,2\}$. Будемо досліджувати асимптотичне поводження при $t \to +0$ інтегральних кривих диференціального рівняння

$$\begin{gathered} y'(t) = at + b_1 t^{-r} y(t) + rt^{-1} y(t) + \\ + b_2 (g(t))^{-r} u_1(g(t)) + \varphi\big(t, t^{-r} u_1(t), \\ (g(t))^{-r} u_1(g(t)), t^{-r} u'_1(t) - rt^{-r-1} u_1(t), \\ (h(t))^{-r}\, u'_1\,(h(t)) - r\,(h(t))^{-r-1}\, u_1\,(h(t))\big). \end{gathered} \tag{11}$$

Вважатимемо, що

$$\Phi_3 = \Bigg\{(t,y) : t \in (0,\rho], |y - y_2(t)| = \gamma d^\nu \cdot \\ \cdot \big(t^{r+1}\beta(t)\big)^{1-\nu} \left(\left(\frac{g(t)h(t)}{t^2}\right)^{r+1} \frac{\beta(g(t))\beta(h(t))}{(\beta(t))^2}\right)^{-\nu}\Bigg\},$$

$$\mathcal{D}_3 = \Bigg\{(t,y) : t \in (0,\rho], |y - y_2(t)| < \gamma d^\nu \cdot \\ \cdot \big(t^{r+1}\beta(t)\big)^{1-\nu} \left(\left(\frac{g(t)h(t)}{t^2}\right)^{r+1} \frac{\beta(g(t))\beta(h(t))}{(\beta(t))^2}\right)^{-\nu}\Bigg\},$$

де ν, γ – сталі, що задовольняють умовам

$$\begin{gathered} 0 < \nu < (r+1)^{-1}, \\ \gamma > 2\,(2M)^{1-\nu}\,|b_1|^{-1}\,(|b_2| + r + 2)\,. \end{gathered}$$

Нехай допоміжна функція $A_3 : \mathcal{D}_0 \to [0, +\infty)$ визначається рівністю

$$A_3(t,y) = (y - y_2(t))^2 \left(t^{r+1}\beta(t)\right)^{-2(1-\nu)} \cdot \\ \cdot \left(\frac{g(t)h(t)}{t^2}\right)^{-2(r+1)} \left(\frac{\beta(g(t))\beta(h(t))}{(\beta(t))^2}\right)^{2\nu}.$$

Неважко переконатись в тому, що для $b_1 > 0$ похідна функції A_3 в силу рівняння (11) додатна при $(t,y) \in \Phi_3$, а якщо $b_1 < 0$, то похідна функції A_3 в силу рівняння (11) від'ємна при $(t,y) \in \Phi_3$. Тому

$$|y_1(t) - y_2(t)| + |y_1'(t) - y_2'(t)| \le \\ \le (g(t)h(t)\beta(g(t))\beta(h(t)))^{-\nu(r+1)} d^\nu \quad (12) \\ \text{при } t \in (0,\rho].$$

Тепер звернемося безпосередньо до доведення неперервності оператора $T : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$. Нехай $\varepsilon > 0$ дано. Існує таке t_ε, що $2Mt^{r+1}\beta(t) + 2qMt\beta(t) \le \varepsilon/2$ при $t \in (0, t_\varepsilon]$. Якщо $t \in (0, t_\varepsilon]$, то $|y_1(t) - y_2(t)| +$ $+|y_1'(t) - y_2'(t)| \le |y_1(t) - ct^{r+1}| +$ $+|y_2(t) - ct^{r+1}| + |y_1'(t) - (r+1)ct^r| +$ $+|y_2(t) - (r+1)ct^r| \le \varepsilon/2$.
Нехай далі $t \in [t_\varepsilon, \rho]$. З (12) випливає, що

$$|y_1(t) - y_2(t)| + |y_1'(t) - y_2'(t)| \le \\ \le (\omega(t_\varepsilon))^{-\nu} d^\nu, \quad t \in [t_\varepsilon, \rho], \quad (13)$$

де $\omega(t_\varepsilon) = \left(g(t_\varepsilon)h(t_\varepsilon)\beta(g(t_\varepsilon))\beta(h(t_\varepsilon))\right)^{r+1}$. Нехай $\delta(\varepsilon) = (\varepsilon/2)^\nu \omega(t_\varepsilon)$. Якщо $d < \delta(\varepsilon)$, то з (13) випливає, що

$$|y_1(t) - y_2(t)| + |y_1'(t) - y_2'(t)| \le \varepsilon/2 \quad (14)$$

при $t \in [t_\varepsilon, \rho]$. Отже, якщо $d < \delta(\varepsilon)$, то оцінка (14) виконується при всіх $t \in [0, \rho]$. Таким чином, доведено, що якщо $\|u_1 - u_2\|_\mathcal{B} = d < \delta(\varepsilon)$, то $\max\limits_{t \in [0,\rho]} (|y_1(t) - y_2(t)| + |y_1'(t) - y_2'(t)|) =$ $= \|y_1 - y_2\|_\mathcal{B} = \|Tu_1 - Tu_2\|_\mathcal{B} \le \varepsilon/2 < \varepsilon$.
Ці міркування не залежать ні від вибору функцій $u_i \in \mathcal{U}$, $i \in \{1,2\}$, ні від вибору $\varepsilon > 0$. Неперервність оператора $T : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ доведена.

Для завершення доведення теореми 1 залишається застосувати до оператора $T : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ теорему Шаудера про нерухому точку.

Теорема 2. Нехай виконані умови
1) У рівнянні (1) $b_2 = 0$;
2) $l_2(t) = l_2 t^{r-1}$, $l_3(t) = l_3(g(t))^{r-1}$, $t \in (0, \tau)$, де l_2, l_3 – сталі;
3) $l_2 + l_3 + r(l_4 + l_5) < 1/2$.
Тоді:
а) якщо $b_1 > 0$, то існують сталі ρ, M такі, що задача (1), (2) має безліч розв'язків $x : (0, \rho] \to \mathbb{R}$, які належать множині $\mathcal{U}(\rho, M)$. При цьому для будь-якої сталої α, яка задовольняє умову (3), знайдеться єдиний розв'язок $x_\alpha \in \mathcal{U}(\rho, M)$ такий, що $x_\alpha(\rho) = \alpha$;
б) якщо $b_1 < 0$, то існують сталі ρ, M такі, що задача (1), (2) має єдиний розв'язок $x : (0, \rho] \to \mathbb{R}$, який належить множині $\mathcal{U}(\rho, M)$.

Доведення. Оберемо M, q так, щоб

$$2|b_1| < q < |b_1|(l_4 + l_5)^{-1}, \\ M > (|b_1| - q(l_4 + l_5))^{-1} (L|c| + 1).$$

Тут ρ досить мале. Нехай $\mathcal{B}$ - простір неперервно диференційовних функцій $x : [0, \rho] \to \mathbb{R}$ з нормою (4). Позначимо через $\mathcal{U}$ підмножину $\mathcal{B}$, кожен елемент $u : [0, \rho] \to \mathbb{R}$ якої задовольняє умови (5), причому $u(0) = 0$, $u'(0) = 0$. Множина $\mathcal{U}$ обмежена і замкнена.

Покладемо $x = y/t^r$, де $y : (0, \tau] \to \mathbb{R}$ – нова невідома функція. В результаті отримаємо замість задачі (1), (2) задачу (7), (8). Будемо розглядати диференціальне рівняння (9), де $u \in \mathcal{U}$ – довільна фіксована функція. Повторивши міркування, що проведені у відповідній частині доведення теореми 1, встановимо, що:

а) якщо $b_1 > 0$, то кожна інтегральна крива рівняння (9), яка перетинає H, визначена при $t \in (0, \rho]$ і залишається в $\mathcal{D}_1$ при всіх $t \in (0, \rho]$. Фіксуємо будь-яку точку $G(\rho, y_G) \in H$ і позначаємо через $J_u : (t, y_u(t))$ ту інтегральну криву (9), для якої $y_u(\rho) = y_G$.

б) якщо $b_1 < 0$, то серед інтегральних кривих рівняння (9), які перетинають H, існує одна і лише одна інтегральна крива (позначимо її через $J_u : (t, y_u(t))$, яка визначена при $t \in (0, \rho]$ і залишається в $\mathcal{D}_1$ при всіх $t \in (0, \rho]$.

Неважко переконатись у тому, що виконані нерівності (10). Покладемо за означенням $y_u(0)=0$, $y'_u(0)=0$. Тоді $y_u\in\mathcal{U}$. Визначимо оператор $T:\mathcal{U}\to\mathcal{U}$, вважаючи $Tu=y_u$. Доведемо, що оператор $T:\mathcal{U}\to\mathcal{U}$ є стисненим. Для цього проводимо міркування за схемою, запропонованою раніше одним із авторів у [7] (доведення теореми 1). Нехай $y_u\in\mathcal{U}$, $i\in\{1,2\}$ – довільні фіксовані функції. Позначимо $y_i=Tu_i$, $i\in\{1,2\}$. Нехай $\|u_1-u_2\|_{\mathcal{B}}=d$, $d>0$. Будемо досліджувати асимптотичну поведінку при $t\to+0$ інтегральних кривих диференціального рівняння (11). Покладемо

$$\begin{aligned}\Phi_4 &= \{(t,y): t\in(0,\rho], |y-y_2(t)|=\gamma d t^r\},\\ \mathcal{D}_4 &= \{(t,y): t\in(0,\rho], |y-y_2(t)|<\gamma d t^r\},\end{aligned}$$

де γ – стала, яка задовольняє умову $K|b_1|^{-1}<\gamma<(1-K)|b_1|^{-1}$, де $K=l_2+l_3+(r+1)(l_4+l_5)$. Нехай допоміжна функція $A_4:\mathcal{D}_0\to[0,+\infty)$ визначається рівністю $A_4(t,y)=(y-y_2(t))^2\,t^{-2r}$. Неважко переконатися в тому, що якщо $b_1>0$, то похідна функції A_4 в силу рівняння (11) додатна при $(t,y)\in\Phi_4$, а якщо $b_1<0$, то похідна функції A_4 в силу рівняння (11) від'ємна при $(t,y)\in\Phi_4$. Звідси випливає, що інегральна крива $J:(t,y(t))$ рівняння (11) залишається в $\mathcal{D}_4$ при всіх $t\in(0,\rho]$. З цього випливає, що $|y_1(t)-y_2(t)|\le\gamma d t^r$, $t\in(0,\rho]$ і тому, оскільки ρ достатньо мале, $|y_1(t)-y_2(t)|+|y'_1(t)-y'_2(t)|\le\theta d,\ t\in(0,\rho]$, де $\theta=(|b_1|\gamma+K+1)/2,\ \ 0<\theta<1$. Проведені міркування не залежать від вибору функцій $u_i\in\mathcal{U}$, $i\in\{1,2\}$. Отже, $T:\mathcal{U}\to\mathcal{U}$ – стиснений оператор, що і треба було довести.

Для завершення доведення теореми 2 залишається застосувати до оператора $T:\mathcal{U}\to\mathcal{U}$ принцип Банаха стиснених відображень.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Азбелев Н.В., Максимов В.П, Рахматуллина Л.Ф.* Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений.—М.: Наука, 1991.— 280 с.

2. *Азбелев Н.В.* Современное состояние и тенденции развития теории функционально-дифференциальных уравнений // Изв. высш. учебн. завед. Математика,— 1994.— №6.— С. 8-19.

3. *Азбелев Н.В., Алвеш М.Ж., Бравый Е.И.* О сингулярных краевых задачах для линейного функционально-дифференциального уравнения второго порядка //Изд. высш. учебн. завед. Математика.— 1999.— №2.— С. 3-11.

4. *Бравый Е.И.* Линейные функционально-дифференциальные уравнения с внутренними сингулярностями. Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук.— Пермь, 1996.— 18 с.

5. *Еругин Н.П.* Книга для чтения по общему курсу дифференциальных уравнений.— М.: Наука и техника, 1972.— 664 с.

6. *Зернов А.Е.* Асимптотика решений одной задачи Коши, не разрешенной относительно производной // Дифференц. уравнения.— 1995. — Т.31, №1. — С.37-43.

7. *Зернов А.Е.* Качественный анализ неявной сингулярной задачи Коши // Украинский матем. журнал.— 2001.— Т.53, №3.— С. 302-310.

8. *Зернов А.Е.* О разрешимости и асимптотике решений некоторого функционально-дифференциального уравнения с сингулярностью // Украинский матем. журнал.— 2001.— Т.53, №4.— С.455-465.

9. *Кигурадзе И.Т.* Некоторые сингулярные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений.— Тбилиси: Изд-во Тбилисского ун-та, 1975.— 352 с.

10. *Хейл Дж.* Теория функционально-дифференциальных уравнений.— М.: Мир, 1984.— 421 с.

11. *Шиндяпин А.И.* О краевой задаче для одного сингулярного уравнения // Дифференц. уравнения.— 1984.— Т.20, №3.— С.450-455.

12. *Grimm L.J. and Hall L.M.* Holomorphic solutions of singular functional differential equations // Journal of Math Anal. and Appl.— 1975.— V.50, №3.— P.627-638.

13. *Iserles A.* On the generalized pantograph functional differential equation // Europ. J. Appl. Math. — 1993. — №4 — P.1-38.

14. *März R. and Weinmüller E.B.* Solvability of boundary value problems for systems of singular differential-algebraic equations // SIAM J. Math. Anal. — 1993. — V.24. — №1. — P.200-215.

Надійшла до редколегії 18.10.2003