УДК 517.928

©2005 р. П.М. Дудницький

Чернівецький національний університет ім. Ю.Федьковича, Чернівці

УСЕРЕДНЕННЯ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ З ПАРАМЕТРАМИ ДЛЯ КОЛИВНОЇ СИСТЕМИ З ІМПУЛЬСНОЮ ДІЄЮ

Знайдено оцінки похибки методу усереднення для однієї крайової задачі з параметрами та імпульсною дією у фіксовані моменти часу. Основне припущення при цьому стосується не всіх гармонік правої частини системи, а лише резонансних.

New error estimates of the averaging method for the boundary-value problem with parameters and impulse effect in fixed time moments have been proved. Main assumption at the same time is being imposed not on all harmonics of the right-hand part of the system, but only on the resonant ones.

На сьогоднішній день теорія крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь має широкий арсенал методів дослідження існування та єдиності розв'язків та їх наближеної побудови. Досить плідними з них виявились чисельно-аналітичні [1] та проекційно-ітеративні [2] методи, а також підходи, що базуються на використанні асимптотичних методів, зокрема і методу усереднення [3]. Останній з них виявився результативним при вивченні розв'язності імпульсних багатоточкових задач, в тому числі і задач з параметрами [3–6]. У даній статті процедура усереднення використовується при дослідженні розв'язності одної крайової задачі з параметрами для багаточастотної системи з імпульсною дією, якій властиве явище резонансу. Слід зазначити, що, на відміну від праці [4], у нашому випадку основне обмеження стосується не всіх, а лише резонансних гармонік майже періодичних функцій правої частини системи.

Нехай задано нелінійну систему звичайних диференціальних рівнянь із імпульсною дією у фіксовані моменти часу t_ν, $\nu \in N$, вигляду [3, 4]

$$\frac{dx}{d\tau} = a(x,\varphi,\tau,\mu),$$

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{\omega(x,\varphi,\tau)}{\varepsilon} + b(x,\varphi,\tau,\mu), \quad \tau \neq \tau_\nu$$

$$\Delta x|_{\tau=\tau_\nu} = \varepsilon p_\nu(x,\varphi,\mu),$$

$$\Delta\varphi|_{\tau=\tau_\nu} = \varepsilon q_\nu(x,\varphi,\mu). \qquad (1)$$

Тут $x \in D \subset R^n$, $\varphi \in R^m$, $\tau = \varepsilon t \in [0,L]$, $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$ – малий параметр, $\varepsilon_0 < 1$, $\mu \in G \subset R^s$ – параметри, $\tau_\nu = \varepsilon t_\nu$, $t_{\nu+1} > t_\nu$, N – множина всіх натуральних чисел, D і G – обмежені області, дійсні функції a, b, ω, p_ν, q_ν та їх частинні похідні першого порядку за x, φ, μ неперервні на множині $D \times R^m \times [0,L] \times G$ й обмежені числом σ_1.

Вважатимемо, що a і p_ν, $\nu \in N$, належать класу майже періодичних за кожною з координат φ_j, $j \in \overline{1,m}$, вектора φ функцій, які розкладаються в ряд Фур'є

$$a(x,\varphi,\tau,\mu) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k(x,\tau,\mu)e^{i(\lambda_k,\varphi)},$$

$$p_\nu(x,\varphi,\mu) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} p_{\nu,k}(x,\mu)e^{i(\lambda_k,\varphi)},$$

де i – уявна одиниця, $\lambda_k = (\lambda_k^{(1)},\ldots,\lambda_k^{(m)})$ – векторний показник Фур'є, $\lambda_0 = 0$, $\lambda_k \neq 0$ при $k \neq 0$, (λ_k,φ) – скалярний добуток в R^m.

Припустимо, що ряди

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \|a_k(x,\tau,\mu)\|, \qquad \sum_{k=-\infty}^{\infty} \|p_{\nu,k}(x,\mu)\| \qquad (2)$$

збігаються рівномірно на множині $(x,\tau,\mu,\nu) \in D \times [0,L] \times G \times N$ та існують границі

$$\lim_{\nu\to\infty}(t_{\nu+1} - t_\nu) = \theta > 0,$$

$$\lim_{\nu\to\infty} p_\nu(x,\varphi,\mu) = \overline{p}(x,\varphi,\mu), \qquad (3)$$

причому друга з них – рівномірно за $(x,\varphi,\mu)\in D\times R^m\times G$.

Тут і надалі під нормою вектора розуміємо евклідову норму, а норма матриці узгоджена з евклідовою нормою вектора.

Задамо для системи (1) крайові умови

$$F(x|_{\tau=\tau^{(1)}},\ldots,x|_{\tau=\tau^{(r)}},\mu)=0,$$

$$\sum_{j=1}^{r} B_j(x|_{\tau=\tau^{(1)}},\ldots,x|_{\tau=\tau^{(r)}},\mu)\varphi|_{\tau=\tau^{(j)}} =$$

$$= \widetilde{b}(x|_{\tau=\tau^{(1)}},\ldots,x|_{\tau=\tau^{(r)}},\mu), \qquad (4)$$

в яких $0\le\tau^{(1)}<\tau^{(2)}<\cdots<\tau^{(r)}\le L$, $r\ge 2$, $m\times m$-матриці B_j і m-вимірна вектор-функція $\widetilde{f}$ неперервні в області $D\times G$, а $(n+s)$-вимірна вектор-функція F має неперервні частинні похідні першого порядку за всіма змінними в тій же області.

Розв'язати задачу (1),(4) – означає знайти такий розв'язок $x(\tau,x^0,\varphi^0,\mu,\varepsilon)$, $\varphi(\tau,x^0,\varphi^0,\mu,\varepsilon)$, де $x(0,x^0,\varphi^0,\mu,\varepsilon)=x^0$, $\varphi(0,x^0,\varphi^0,\mu,\varepsilon)=\varphi^0$, системи (1) і таке значення параметра μ, які задовольняють умови (4).

У випадку систем вигляду (1) без імпульсної дії та параметрів μ існування розв'язку багатоточкової задачі доведено в монографії [3] за допомогою методу усереднення за всіма швидкими змінними $\varphi_1,\ \ldots,\ \varphi_m$, а для більш загальних систем з $\omega=\omega(x,\varphi,t)$ – у працях [6, 7] шляхом усереднення за часовою змінною t. Слід зазначити, що навіть у такому частинному випадку крайових умов (4) часто залишається відкритим питання про єдиність розв'язку [5, 6].

Для розв'язання імпульсної крайової задачі з параметрами (1), (4) ми також застосуємо метод усереднення. Побудуємо усереднену за всіма швидкими змінними задачу

$$\frac{d\overline{x}}{d\tau} = a_0(\overline{x},\tau,\mu) + \frac{1}{\theta}\overline{p}_0(\overline{x},\mu), \qquad (5)$$

$$F(\overline{x}|_{\tau=\tau^{(1)}},\ldots,\overline{x}|_{\tau=\tau^{(r)}},\mu)=0, \qquad (6)$$

в якій $a_0(x,\tau,\mu)$ і $\overline{p}_0(x,\mu)$ – середні майже періодичних по φ_j, $j=\overline{1,m}$, функцій $a(x,\varphi,\tau,\mu)$ і $\overline{p}(x,\varphi,\mu)$.

Для того, щоб метод усереднення правильно описував еволюцію повільних змінних, потрібно накласти певні умови на вектор частот ω [4]. Нехай

$$\left((\lambda_k,\omega)-\frac{2\pi}{\theta}j\right)^2 + \left(\lambda_k,\frac{\partial\omega}{\partial\tau}+\frac{\partial\omega}{\partial x}\delta_1\right)\times$$

$$\times\left(\lambda_k,\frac{\partial\omega}{\partial x}\delta_2\right)\ge\gamma_T \qquad (7)$$

для всіх $j\in N$, $x\in D$, $\varphi\in R^m$, $\tau\in[0,L]$, $\mu\in G$, $T\in N$, $1<|k|<T$ і деякого $\alpha\in\left(0,\dfrac{\pi}{\theta}\right)$, де $\omega=\omega(x,\tau,\mu)$, γ_T – додатне число, залежне від T, (λ_k,ω) – скалярний добуток векторів λ_k і ω. Тут

$$\delta_1=\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k(x,\tau,\mu)h_\alpha((\lambda_k,\omega(x,\tau,\mu)))e^{i(\lambda_k,\varphi)},$$

$$\delta_2=\sum_{k=-\infty}^{\infty} \overline{p}_k(x,\mu)H_\alpha((\lambda_k,\omega(x,\tau,\mu)))e^{i(\lambda_k,\varphi)},$$

$$\overline{p}_k(x,\overline{\mu})=\lim_{t\to\infty} t^{-m}\int\limits_0^t\ldots\int\limits_0^t \overline{p}(x,\varphi,\overline{\mu})\times$$

$$\times e^{-i(\lambda_k,\varphi)}d\varphi_1\ldots d\varphi_m,$$

$h_\alpha(z)$; $0<\alpha<\dfrac{\pi}{\theta}$, – парна як функція z, що визначається рівністю

$$h_\alpha(z)=\begin{cases} 1, & z\in[0,\alpha/2],\\ 16\alpha^{-4}z^2(\alpha-z), & z\in[\alpha/2,\alpha),\\ 0, & z\in[\alpha,\infty),\end{cases}$$

а $H_\alpha(z)$ – періодична з періодом $\dfrac{2\pi}{\theta}$ функція, яка збігається з $h_\alpha(z)$ при $z\in\left[-\pi\theta^{-1},\pi\theta^{-1}\right]$.

Зазначимо, що, згідно з означенням функцій $h_\alpha(z)$ і $H_\alpha(z)$, умова (7) накладається не на всі, а лише на резонансні гармоніки функцій a і p [8].

Позначимо через $A(x^0,\mu^0)$ і $B(x^0,\mu^0)$ відповідно $(n+s)$- і m-вимірні квадратні матриці

$$A(x^0,\mu^0)=\begin{pmatrix} \displaystyle\sum_{j=1}^{r}\frac{\partial F^0}{\partial z_j}\frac{\partial\overline{x}(\tau^{(j)},x^0,\mu^0)}{\partial x^0} \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{r}\frac{\partial F^0}{\partial z_j}\frac{\partial\overline{x}(\tau^{(j)},x^0,\mu^0)}{\partial\mu^0}+\frac{\partial F^0}{\partial\mu}\end{pmatrix}^T,$$

$$B(x^0,\mu^0)=$$

$$=\sum_{j=1}^{r}B_j(\overline{x}(\tau^{(1)},x^0,\mu^0),\ldots,\overline{x}(\tau^{(r)},x^0,\mu^0),\mu^0),$$

де $\dfrac{\partial F^0}{\partial z_j}$ і $\dfrac{\partial F^0}{\partial \mu}$ – значення матриць частинних похідних $\dfrac{\partial F}{\partial z_j}$ і $\dfrac{\partial F}{\partial \mu}$ функції $F(z_1,\ldots,z_r,\mu)$ при $z_l=z_l^0=\overline{x}(\tau^{(l)},x^0,\mu^0)$, $l=\overline{1,r}$, $\mu=\mu^0$, а $x(\tau,x^0,\mu)$ – той розв'язок системи диференціальних рівнянь (5), який при $\tau=0$ набуває значення x^0.

Теорема. *Нехай: 1) виконуються припущення (3), (7) і ряди (2) збігаються рівномірно; 2) B_j, $j=\overline{1,r}$ і $\widetilde{b}$ – неперервні в області $D^r\times G$, а F має неперервні частинні похідні першого порядку за всіма змінними в $D^r\times G$; 3) існує розв'язок $\overline{x}(\tau,x^0,\mu^0)$, μ^0 усередненої задачі (5), (6), який визначений і лежить в $D\times G$ при $\tau\in[0,L]$ і для якого матриці $A(x^0,\mu^0)$ і $B(x^0,\mu^0)$ невироджені. Тоді для довільного $\eta>0$ можна вказати таке $\varepsilon_0=\varepsilon_0(\eta)>0$, що при кожному $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$ задача (1), (4) має розв'язок $x(\tau,\varepsilon)$, $\varphi(\tau,\varepsilon)$, $\mu(\varepsilon)$, який задовольняє нерівність*

$$\|x(\tau,\varepsilon)-\overline{x}(\tau,x^0,\mu^0)\|+\|\mu(\varepsilon)-\mu^0\|<\eta$$

$$\forall(\tau,\varepsilon)\in[0,L]\times(0,\varepsilon_0]. \tag{8}$$

Доведення. Оскільки D і G – відкриті множини, то існує таке додатне число ρ, що $\overline{x}(\tau,x^0,\mu^0)\in\overline{D}_\rho$ і $\mu^0\in\overline{G}_\rho$, де $\overline{D}_\rho$ і $\overline{G}_\rho$ – замикання множин точок, що належать відповідно D і G разом із ρ-околом. Якщо $\overline{x}(\tau,\widetilde{x},\mu)\in\overline{D}_{\frac{1}{2}\rho}$ і $\mu\in\overline{G}_{\frac{1}{2}\rho}$, то при виконанні умови 1) теореми для довільного $\xi>0$ існує таке $\varepsilon_1(\xi)>0$, що при $\varepsilon_0\le\varepsilon_1(\xi)$ справедлива нерівність

$$\|x(\tau,\widetilde{x},\widetilde{\varphi},\mu,\varepsilon)-\overline{x}(\tau,\widetilde{x},\mu)\|<\xi \tag{9}$$

для всіх $\tau\in[0,L]$, $\widetilde{\varphi}\in R^m$, $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$, $\mu\in\overline{G}_{\frac{1}{2}\rho}$.

Розглянемо далі рівності

$$\overline{x}(\tau,x^0+y,\mu^0+d)=\overline{x}(\tau,x^0,\mu^0)+$$

$$+\frac{\partial\overline{x}(\tau,x^0,\mu^0)}{\partial x^0}y+\frac{\partial\overline{x}(\tau,x^0,\mu^0)}{\partial \mu^0}d+B_1(\tau,u)$$

$$F(z_1^0+l_1,\ldots,z_r^0+l_r,\mu^0+d)=$$

$$=F(z_1^0,\ldots,z_r^0,\mu^0+d)+\sum_{j=1}^{r}\frac{\partial F^0}{\partial z_j}l_j+$$

$$+\frac{\partial F^0}{\partial \mu}d+B_2(l), \tag{10}$$

в яких

$$B_1(\tau,u)=\int_0^1\left(\frac{\partial f(\tau,u^0+ut)}{\partial u^0}-\frac{\partial f(\tau,u^0)}{\partial u^0}\right)dtu,$$

$$B_2(l)=\int_0^1\left(\frac{\partial g(z^0+lt)}{\partial z^0}-\frac{\partial g(z^0)}{\partial z^0}\right)dtl,$$

$$u=(y,d),\ u^0=(x^0,\mu^0),\ z^0=(z_1^0,\ldots,z_r^0,\mu^0)$$

$$l=(l_1,\ldots,l_r,d),\ f(\tau,u^0)=\overline{x}(\tau,x^0,\mu^0),$$

$$g(z^0)=F(z_1^0,\ldots,z_r^0,\mu^0).$$

На підставі рівномірної неперервності функцій $\dfrac{\partial f(\tau,v)}{\partial v}$ і $\dfrac{\partial g(z)}{\partial z}$ на множинах відповідно $[0,L]\times\overline{D}_{\frac{1}{2}\rho}\times\overline{G}_{\frac{1}{2}\rho}$ і $\overline{D}^r_{\frac{1}{2}\rho}\times\overline{G}_{\frac{1}{2}\rho}$ маємо, що для довільних додатних чисел ξ_1 і ξ_2 існують такі числа $\eta_1=\eta_1(\xi_1)>0$ і $\eta_2=\eta_2(\xi_2)>0$, що

$$\|B_1(\tau,u)\|<\xi_1\|u\|,\quad \|B_2(l)\|<\xi_2\|l\|$$

для всіх $\tau\in[0,L]$ при $\|u\|<\eta_1$ і $\|l\|<\eta_2$.

Крім того, з усереднених рівнянь (5) легко одержати нерівності

$$\|\overline{x}(\tau,x^0+y,\mu^0+d)-\overline{x}(\tau,x^0,\mu^0)\|\le$$

$$\le\sigma_2\|u\|<\frac{1}{2}\rho \tag{11}$$

при $\tau\in[0,L]$ і $\|u\|<\rho(2\sigma_2)^{-1}$, де $\sigma_2=(1+L\sigma_1(1+\theta^{-1}))e^{L\sigma_1(1+\theta^{-1})}$, тому для вказаних u крива $\overline{x}=\overline{x}(\tau,x^0+y,\mu^0+d)$ лежить в $\overline{D}_{\frac{1}{2}\rho}$.

Аналогічно [3] розв'язок задачі (1), (4) будуємо у вигляді

$$x(\tau,\varepsilon)=x(\tau,x^0+y,\psi,\mu,\varepsilon),$$

$$\varphi(\tau,\varepsilon)=\varphi(\tau,x^0+y,\psi,\mu,\varepsilon),\mu=\mu^0+d, \tag{12}$$

а невідомі величини $y = y(\varepsilon)$, $\psi = \psi(\varepsilon)$ і $d = d(\varepsilon)$ визначаємо із крайових умов (4). Тоді для знаходження $(n+s)$- і m-вимірного векторів $u = (y, d)$ і ψ дістанемо рівності

$$u = -A^{-1}(x^0, \mu^0)\times$$
$$\times(F(z_1^0 + l_1 + \widetilde{l}_1, \ldots, z_r^0 + l_r + \widetilde{l}_r, \mu^0 + d) -$$
$$-F(z_1^0, \ldots, z_r^0, \mu^0) - A(x^0, \mu^0)u) \equiv M_1(u, \psi),$$
$$\psi = -B^{-1}(x^0, \mu^0)\times$$
$$\times(-\widetilde{f}(x(\tau^{(1)}, \varepsilon), \ldots, x(\tau^{(r)}, \varepsilon), \mu) +$$
$$+\sum_{j=1}^{r} B_j(x(\tau^{(1)}, \varepsilon), \ldots, x(\tau^{(r)}, \varepsilon), \mu)\times$$
$$\times(\varphi(\tau^{(j)}, \varepsilon) - \psi)) +$$
$$+\sum_{j=1}^{r}(B_j(x(\tau^{(1)}, \varepsilon), \ldots, x(\tau^{(r)}, \varepsilon), \mu) -$$
$$-B_j(z_1^0, \ldots, z_r^0, \mu^0))\psi \equiv M_2(u, \psi), \qquad (13)$$

де

$$l_j = \frac{\partial \overline{x}(\tau^{(j)}, x^0, \mu^0)}{\partial x^0} y + \frac{\partial \overline{x}(\tau^{(j)}, x^0, \mu^0)}{\partial \mu^0} d,$$

$$\widetilde{l}_j = x(\tau^{(j)}, \varepsilon) - \overline{x}(\tau^{(j)}, x^0 + y, \mu) + B_1(\tau^{(j)}, u).$$

Виберемо $\xi < \dfrac{1}{6}\rho$. Використовуючи оцінку (9) і зображення (10), отримаємо нерівність

$$\|M_1(u, \psi)\| \leq (\sigma_3\xi_1 + \sigma_4\xi_2)\|u\| + \sigma_3\xi, \quad (14)$$

в якій

$$\sigma_3 = \widetilde{\sigma}_3 r\|A^{-1}(x^0, \mu^0)\|, \quad \sigma_4 =$$
$$= 2r\|A^{-1}(x^0, \mu^0)\|(1 + L\sigma_1(\theta^{-1} + 1))e^{L\sigma_1(1+\theta^{-1})},$$

а $\widetilde{\sigma}_3$ – стала, яка обмежує неперервні частинні похідні першого порядку функції $F(z_1, \ldots, z_r, \mu)$ на замкненій множині $\overline{D}^r_{\frac{1}{3}\rho}$ і $\overline{G}_{\frac{1}{3}\rho}$.

З системи диференціальних рівнянь із імпульсною дією (1) одержимо нерівності

$$\|\varphi(\tau, \varepsilon) - \psi\| \leq \int_0^\tau \left(\frac{1}{\varepsilon}\|\omega(x(\tau, \varepsilon), t, \mu)\| + \right.$$
$$\left. + \|b(x(\tau, \mu), \varphi(t, \mu), \mu)\|\right) dt +$$
$$+\varepsilon \sum_{0<\tau_\nu<\tau} \|q_\nu(x(\tau_\nu, \varepsilon), \varphi(\tau_\nu, \varepsilon), \mu)\| \leq$$
$$\leq \frac{1}{\varepsilon}\sigma_1(2L + \theta_1^{-1}(L + \theta_1))$$

для всіх $\tau \in [0, L]$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ та додатною сталою θ_1, яка визначається умовою $t_{\nu+1} - t_\nu \geq \theta_1$, $\nu \in N$.

Крім того, у зв'язку з рівномірною неперервністю функцій $B_j(z_1, \ldots, z_r, \mu)$ на множині $\overline{D}^r_{\frac{1}{3}\rho} \times \overline{G}_{\frac{1}{3}\rho}$ існує така стала $\underset{\sim}{\sigma}_3$, що

$$\|B_j(z_1, \ldots, z_r, \mu) - B_j(z_1^0, \ldots, z_r^0, \mu^0)\| \leq$$
$$\leq (2r\|B^{-1}(x^0, \mu^0)\|)^{-1} \qquad (15)$$

для всіх $z_j \in \overline{D}_{\frac{1}{3}\rho}$, $\mu \in \overline{G}_{\frac{1}{3}\rho}$, $j = \overline{1,3}$ при $\|z_j - z_j^0\| \leq \underset{\sim}{\sigma}_3$ і $\|\mu - \mu^0\| < \underset{\sim}{\sigma}_3$.

Якщо вважати, що $z_j = x(\tau^{(j)}, \varepsilon) \equiv x(\tau^{(j)}, x^0 + y, \psi, \mu, \varepsilon)$, то на підставі нерівностей (9) і (11) оцінка (15) справедлива при $\xi + \sigma_2\|u\| < \underset{\sim}{\sigma}_3$, $\|u\| < \underset{\sim}{\sigma}_3$.

З цих міркувань випливає нерівність

$$\|M_2(u, \psi)\| \leq \frac{1}{2}\|\psi\| + \frac{1}{\varepsilon}\underset{\sim}{\sigma}_4, \qquad (16)$$

де

$$\underset{\sim}{\sigma}_4 = \|B^{-1}(x^0, \mu^0)\|\widetilde{\sigma}_4(1 + r\sigma_1(2L + \theta_1^{-1}(1 + \theta_1))),$$

а стала $\widetilde{\sigma}_4$ визначається нерівностями

$$\|\widetilde{f}(z_1, \ldots, z_r, \mu)\| \leq \widetilde{\sigma}_4,$$
$$\|B_j(z_1, \ldots, z_r, \mu)\| \leq \widetilde{\sigma}_4, \quad j = \overline{1, r},$$

при $(z_1, \ldots, z_r, \mu) \in \overline{D}^r_{\frac{1}{3}\rho} \times \overline{G}_{\frac{1}{3}\rho}$.

Покладемо $\xi_1 = (4\sigma_3)^{-1}$, $\xi_2 = (4\sigma_4)^{-1}$ і обчислимо $\eta_1 = \eta_1(\xi_1)$, $\eta_2 = \eta_2(\xi_2)$. Вважатимемо далі $\xi > 0$ настільки малим, що

$$\xi < \min\{(2\sigma_3)^{-1}\eta_1;$$
$$(4r\sigma_3(1 + L\sigma_1(1 + \theta^{-1}))e^{L\sigma_1(1+\theta^{-1})})^{-1}\eta_2;$$
$$\frac{1}{6}\rho, \widetilde{\sigma}_3(1 + (1 + \sigma_2)2\sigma_3)^{-1}\} = \xi_0.$$

Нехай далі

$$K_1 = \{u \,|\, u \in R^{n+s},\ \|u\| \le 2\sigma_3\xi\},$$

$$K_2 = \{\psi \,|\, \psi \in R^m,\ \|\psi\| \le 2\underset{\sim}{\sigma}_4\varepsilon^{-1}\},$$

$$K_1 \times K_2 = K,\ (M_1(u,\psi), M_2(u,\psi)) = M(u,\psi).$$

Тоді з нерівностей (14) і (16) випливає, що при кожному $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ M відображає множину K в себе. Крім того, на підставі зроблених припущень розв'язки систем (1) та (5) неперервно залежать від початкових даних і параметрів, тому відображення M: $K \to K$ неперервне за u, ψ при кожному значенні ε. Використовуючи теорему Брауера [9], доводимо існування розв'язку $u = u(\varepsilon) = (y(\varepsilon), d(\varepsilon)) \in K_1$, $\psi = \psi(\varepsilon) \in K_2$ системи рівнянь (13) і цей розв'язок породжує розв'язок (12) крайової задачі з параметрами (1), (4).

Зафіксуємо довільне $\eta > 0$. Тоді з нерівностей (9), (11) і обмеження $u(\varepsilon) \in K_1$ при

$$\xi < \min\{\xi_0; (1 + 2\sigma_2\sigma_3)^{-1}\eta\}$$

одержуємо оцінку (8). Теорему доведено.

Зауваження. *Нехай виконуються умови теореми за таких додаткових припущень:*

а) $t_{\nu+1} - t_\nu = \theta$, $p_\nu(x,\varphi,\mu) = \overline{p}(x,\varphi,\mu)$ *для всіх* $\nu \in N$, $x \in D$, $\varphi \in R^m$, $\mu \in G$;

б) $a(x,\varphi,\tau,\mu) = \sum\limits_{k=-T}^{T} a_k(x,\tau,\mu)e^{i(\lambda_k,\varphi)}$, $\overline{p}(x,\varphi,\mu) = \sum\limits_{k=-T}^{T} \overline{p}_k(x,\mu)e^{i(\lambda_k,\varphi)}$;

в) $a(x,\varphi,\tau,\mu)$ *задовольняє умову Гельдера за* τ:

$$\|a(x,\varphi,\tau,\mu) - a(x,\varphi,\tau',\mu)\| \le \sigma_1|\tau - \tau'|^\beta$$

для всіх $x \in D$, $\varphi \in R^m$, $\tau \in [0,L]$, $\tau' \in [0,L]$, $\mu \in G$.

У цьому випадку нерівність (9) набуває вигляду [4]

$$\|x(\tau,\widetilde{x},\widetilde{\varphi},\mu) - \overline{x}(\tau,\widetilde{x},\mu)\| < c_1\varepsilon^{\frac{\beta}{2(1+\beta)}},$$

де c_1 *– стала, незалежна від* $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$, *а* ε_0 *– досить мале додатне число. Тоді, згідно з нерівністю (14) замість оцінки (8) дістанемо оцінку*

$$\|x(\tau,\varepsilon) - \overline{x}(\tau,x^0,\mu^0)\| + \|\mu(\varepsilon) - \mu^0\| < c_2\varepsilon^{\frac{\beta}{2(\beta+1)}} \tag{17}$$

зі сталою c_2, *не залежною від* ε.

Нарешті, зазначимо, що коли замість умови в) припустити, що a має неперервну в $D \times R^m \times [0,L] \times G$ частинну похідну першого порядку за τ, то на підставі рівномірних оцінок осциляційних інтегралів та сум від розривних функцій нерівність (17) можна покращити відносно порядку за ε до вигляду

$$\|x(\tau,\varepsilon) - \overline{x}(\tau,x^0,\mu^0)\| + \|\mu(\varepsilon) - \mu^0\| < c_3\sqrt{\varepsilon}.$$

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Самойленко А.М., Ронто Н.И.* Численно-аналитические методы в теории краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений.— К.: Наук. думка, 1992.— 279 с.
2. *Лучка А.Ю.* Проективно-итеративные методы.— К.: Наук. думка, 1993.— 315 с.
3. *Самойленко А.М., Петришин Р.І.* Багаточастотні коливання нелінійних систем.— К.: Ін-т математики НАН України, 1998.— 340 с.
4. *Самойленко А.М., Петришин Р.І., Лакуста Л.М.* Оцінки похибки методу усереднення для імпульсних коливних систем // Укр. мат. журн.— 2003.— **55**, № 4.— С.510—524.
5. *Петришин Я.Р.* Усереднення багатоточкових задач для нелінійних коливних систем з повільно змінними частотами.: Дис. ... канд. фіз.-мат. наук: 01.01.02.— Київ, 2001.— 131 с.
6. *Плотников В.А.* Метод усреднения в задачах управления. — Киев-Одесса: Лыбидь, 1992.— 188 с.
7. *Плотников В.А., Бардай В.В.* Усреднение краевых задач для дифференциальных уравнений с медленными и быстрыми переменными // Укр. мат. журн.— 1990.— **42**, № 9.— С.1275—1278.
8. *Хапаев М.М.* Усреднение в теории устойчивости.— М.: Наука, 1986.— 192 с.
9. *Рейсиг Р., Сансоне Г., Конти Р.* Качественная теория нелинейных дифференциальных уравнений.— М.: Наука, 1974.— 320 с.

Стаття надійшла до редколегії 21.02.2005