УДК 517.98

©2005 р. І.І. Дрінь

Чернівецький торговельно-економічний інститут Київського національного торговельно-економічного університету, Чернівці

ПЕРЕТВОРЕННЯ ТИПУ ГАУССА-ВЕЙЄРШТРАССА ФОРМАЛЬНИХ РЯДІВ ФУР'Є-ЛАГЕРРА

Досліджуються властивості формальних рядів Фур'є-Лагерра, просумованих методами типу Гаусса-Вейєрштрасса.

The properties of formal Fourier-Laguerre series are studied. These series are summed with the help of Gauss-Weierstrass methods.

При дослідженні багатьох задач аналізу та математичної фізики виникають диференціально-операторні рівняння з невід'ємним самоспряженим оператором A в певному сепарабельному гільбертовому просторі H, спектр якого є суто дискретним. Оператор A будується за ортонормованим базисом $\{e_k, k \geq 1\}$ простору H так, що вектори $e_k, k \in \mathbb{N}$, є його власними векторами, а власні числа мають наперед задані властивості. При цьому позитивні та негативні простори, що відповідають оператору A, та простір H вкладаються в простір формальних рядів Фур'є (Фур'є-Ерміта, Фур'є-Лагерра, Фур'є-Якобі та ін.) вигляду $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k e_k$, які ототожнюються з лінійними неперервними функціоналами над простором основних елементів

$$\Phi = \lim_{m\to\infty} \text{ ind } \Phi_m,$$

$$\Phi_m = \{\varphi \in H \,|\, \varphi = \sum_{k=1}^{m} b_k e_k, \quad b_k \in \mathbb{C}, \quad m \in \mathbb{N}\}.$$

Розглядувані питання тісно пов'язані з сумуванням вказаних рядів різними методами (Абеля-Пуассона, Гаусса-Вейєрштрасса та ін.), оскільки розв'язки вказаних диференціально-операторних рівнянь подаються у вигляді формальних рядів Фур'є, просумованих певними методами. Тут розглядаються формальні ряди Фур'є-Лагерра, які відповідають невід'ємному самоспряженому оператору в гільбертовому просторі $H = L_2((0, +\infty))$, спектр якого є дискретним і складається з власних значень $\lambda_n = 4n + 1$, $n \in \mathbb{Z}_+$, з єдиною граничною точкою в нескінченності; доведено, що простори типу $S_{\beta/2}^{\beta/2}$, $\beta \geq 1$, збігаються з класами Жевре порядку β цього оператора. Досліджуються властивості перетворень типу Гаусса-Вейєрштрасса таких рядів та їхніх ядер.

1. Простори основних та узагальнених функцій. Нехай $H = L_2((0, \infty))$. Ортонормований базис у цьому просторі утворюють функції Лагерра

$$l_{n,\alpha}(x) = e^{-x/2} \hat{L}_{n,\alpha}(x),$$

$$x \in (0, \infty), \quad n \in \mathbb{Z}_+,$$

де $\hat{L}_{n,\alpha}$ — ортонормовані многочлени Лагерра, побудовані за ваговою функцією $h_\alpha(x) = x^\alpha e^{-x}$, $x \in (0, +\infty)$, $\alpha > -1$ (α — фіксований параметр),

$$\hat{L}_{n,\alpha}(x) = \frac{(-1)^n x^\alpha e^x}{\sqrt{n!\Gamma(n + \alpha + 1)}} (x^{\alpha+n} e^{-x})^{(n)},$$

$$n \in \mathbb{Z}_+, \quad x \in (0, \infty), \quad \alpha > -1.$$

Простір Φ у даному випадку складається з функцій вигляду

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{m} c_{k,\varphi} l_k(x),$$

$$c_{k,\varphi} \in \mathbb{C}, \quad x \in (0, \infty), \quad m \in \mathbb{Z}_+.$$

Для многочленів $\hat{L}_{n,\alpha}$ відомі такі рекурентні співвідношення [1]:

$$\sqrt{(n+1)(n+\alpha+1)}\hat{L}_{n+1,\alpha}(x)-$$
$$-(x-2n-\alpha-1)\hat{L}_{n,\alpha}(x)+$$
$$+\sqrt{n(n+\alpha)}\hat{L}_{n-1,\alpha}(x)=0. \qquad (1)$$

Домноживши (1) на $\exp(-x/2)$, дістанемо, що

$$xl_{n,\alpha}(x)=\sqrt{(n+1)(n+\alpha+1)}l_{n+1,\alpha}(x)+$$
$$+\sqrt{n(n+\alpha)}l_{n-1,\alpha}(x)+(2n+1+\alpha)l_{n,\alpha}(x).$$

Звідси вже випливає, що операція $\Phi \ni \varphi \mapsto x\varphi \in \Phi$ визначена й неперервна в просторі Φ.

У просторі Φ визначена та неперервна також операція диференціювання. Ця властивість випливає із співвідношень [1]:

$$\hat{L}_{n,\alpha}=L_{0,\alpha}+L_{1,\alpha}+...+L_{n-1,\alpha},$$

де $L_{k,\alpha}$ — стандартизований многочлен Лагерра, тобто $L_{k,\alpha}=(-1)^k(\Gamma(k+\alpha+1)/k!)^{1/2}\cdot \hat{L}_{k,\alpha}$. Врахувавши тепер зв'язок між многочленами $L_{k,\alpha}$ і $\hat{L}_{k,\alpha}$, а також вигляд функцій Лагерра, дістаємо потрібне твердження. Отже, елементи простору Φ є нескінченно диференційованими на $(0,\infty)$ функціями.

Надалі будемо розглядати многочлени $\hat{L}_{n,-1/2}$, які будуються за ваговою функцією $h_{-1/2}(x)=x^{-1/2}e^{-x}$, $x\in(0,\infty)$. Відповідні функції Лагерра позначатимемо символом l_n, $n\in\mathbb{Z}_+$, тобто $l_n(x)=e^{-x/2}\hat{L}_{n,-1/2}(x)$. Відомо, що ортонормовані многочлени Лагерра $\hat{L}_{n,-1/2}$ зображаються через ортонормовані многочлени Ерміта $\hat{H}_{2n}$ так [1]:

$$\hat{L}_{n,-1/2}(x)=\frac{\pi^{1/4}}{2^n}\sqrt{\frac{(2n)!}{n!\Gamma(n+1/2)}}\hat{H}_{2n}(\sqrt{x}),$$
$$x\in[0,\infty), \quad n\in\mathbb{Z}_+.$$

Оскільки $\Gamma(n+1/2)=(2n)!2^{-2n}(n!)^{-1}\sqrt{\pi}$, $n\in\mathbb{Z}_+$, то легко перевіряємо, що

$$\pi^{1/4}2^{-n}((2n)!)^{1/2}(n!\Gamma(n+1/2))^{-1/2}=1,$$
$$n\in\mathbb{Z}_+.$$

Отже, звідси дістаємо таке співвідношення: $l_n(x^2)=h_{2n}(x)$, $n\in\mathbb{Z}_+$, $x\in[0,+\infty)$.

У просторі Φ' лінійних неперервних функціоналів на Φ зі слабкою збіжністю за загальною схемою (див. [2]) побудуємо оператор $\hat{A}$ за функцією $G(x)=4x+1$, $x\in[0,\infty)$. Звуження оператора $\hat{A}$ на $L_2((0,\infty))$ позначимо символом A. Тоді функції l_n, $n\in\mathbb{Z}_+$, є власними для оператора A, що відповідають власним значенням $\lambda_n=4n+1$, $n\in\mathbb{Z}_+$. Кожне власне значення λ_n, $n\in\mathbb{Z}_+$, є простим.

Як випливає із загальної теорії невід'ємних самоспряжених операторів у гільбертовому просторі, простори $H_\infty(A)$, $G_{\{\beta\}}(A)$, $(H_\infty(A))'$, $(G_{\{\beta\}}(A))$, $\beta>0$ (означення цих просторів див. у [2]), побудовані за даним оператором A, з точки зору поведінки коефіцієнтів Фур'є-Лагерра їхніх елементів описуються так [2]:

а) $(f\in H_\infty(A))\Leftrightarrow(\forall\,\alpha>0\;\exists\, c=c_\alpha>0:$ $|c_k(f)|\le c(4k+1)^{-\alpha},\; k\in\mathbb{Z}_+)$;

б) $(f\in(H_\infty(A))')\Leftrightarrow(\exists\,\alpha>0\;\exists\, c>0:$ $|c_k(f)|\le c(4k+1)^{\alpha},\; k\in\mathbb{Z}_+)$;

в) $(f\in G_{\{\beta\}}(A))\Leftrightarrow(\exists\,\alpha>0\;\exists\, c>0:$ $|c_k(f)|\le c\exp\{-\alpha(4k+1)^{1/\beta},\; k\in\mathbb{Z}_+)$;

г) $(f\in(G_{\{\beta\}}(A))')\Leftrightarrow(\forall\,\alpha>0\;\exists\, c=c_\alpha>0:$ $|c_k(f)|\le c\exp\{\alpha(4k+1)^{1/\beta}\},\; k\in\mathbb{Z}_+)$ (тут $c_k(f)=<f,l_k>, k\in\mathbb{Z}_+$).

Символом $S^{\beta,+}_{\beta,+}$, $\beta\ge 1/2$, β — фіксоване, позначимо сукупність функцій $\psi:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ таких, що відповідно до функції $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $\varphi(x):=\psi(x^2)$, $x\in\mathbb{R}$, є елементами простору S^β_β:

$$S^\beta_\beta:=\{\varphi\in S\,|\,\exists\, c>0\;A>0\;\exists\, B>0$$
$$\forall\,\{k,m\}\subset\mathbb{Z}_+\;\forall\, x\in\mathbb{R}:$$
$$|x^k\varphi^{(m)}(x)|\le cA^kB^mk^{k\beta}m^{m\beta}\}.$$

При цьому функція φ є парною. Зрозуміло, що множину $S^{\beta,+}_{\beta,+}$ можна трактувати як сукупність усіх функцій $\psi(x)=\varphi(\sqrt{x})$, $x\in[0,\infty)$, де φ — парна функція з простору S^β_β, звужена на піввісь $(0,\infty)$. Наприклад, функції Лагерра l_n, $n\in\mathbb{Z}_+$, є елементами множини $S^{1/2,+}_{1/2,+}$, оскільки $l_n(x^2)=h_{2n}(x)$, $x\in\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{Z}_+$, де h_{2n} — функції Ерміта, які належать до простору $S^{1/2}_{1/2}$. Зокрема,

$e^{-x} \in S^{1/2,+}_{1/2,+}$, оскільки $e^{-x^2} \in S^{1/2}_{1/2}$. Очевидно, що $S^{\beta,+}_{\beta,+}$ утворює лінійний простір відносно звичайних операцій. Збіжність в $S^{\beta,+}_{\beta,+}$ визначимо так: послідовність $\{\psi_\nu, \nu \geq 1\} \subset S^{\beta,+}_{\beta,+}$ збігається в $S^{\beta,+}_{\beta,+}$ до функції $\psi \in S^{\beta,+}_{\beta,+}$, якщо $\varphi_\nu \to \varphi$ при $\nu \to \infty$ у просторі S^β_β, де $\varphi_\nu(x) := \psi_\nu(x^2)$, $\varphi(x) := \psi(x^2)$, $x \in \mathbb{R}$, $\nu \in \mathbb{N}$. Нагадаємо ще, що необхідною й достатньою умовою належності функції φ до простору S^β_β у термінах її коефіцієнтів Фур'є-Ерміта є умова [2]:

$$\exists\, \mu > 0\ \exists\, c > 0\ \forall\, k \in \mathbb{Z}_+ :$$

$$|c_k| \leq c \exp\{-\mu(2k+1)^{1/\beta}\}. \qquad (2)$$

Теорема 1. *При $\beta \geq 1$ правильною є топологічна рівність*

$$G_{\{\beta\}}(A) = S^{\beta/2,+}_{\beta/2,+}.$$

Доведення. Нехай $\psi \in S^{\beta/2,+}_{\beta/2,+}$. Тоді

$$\psi(x) = \varphi(\sqrt{x}) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k h_k(\sqrt{x}), \quad x > 0,$$

причому, оскільки φ — парна функція, то

$$c_k(\varphi) = \begin{cases} a_{2m}(\varphi), & k = 2m, \\ 0, & k = 2m+1, \quad m \in \mathbb{Z}_+, \end{cases}$$

де

$$a_{2m}(\varphi) = (\varphi, h_{2m}) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) h_{2m}(x) dx.$$

Врахувавши співвідношення

$$l_n(x) = h_{2n}(\sqrt{x}), \quad x > 0, \quad n \in \mathbb{Z}_+,$$

дістаємо, що

$$\psi(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_{2m} h_{2m}(\sqrt{x}) = \sum_{m=0}^{\infty} a_{2m} l_m(x),$$

$$x > 0,$$

причому $|a_{2m}| \leq x \exp\{-\mu(4m+1)^{1/\beta}\}$, $m \in \mathbb{Z}_+$. Отже, $\psi \in G_{\{\beta\}}(A)$, тобто $S^{\beta/2,+}_{\beta/2,+} \subseteq G_{\{\beta\}}(A)$.

Навпаки, якщо $\psi \in G_{\{\beta\}}(A)$, то $\psi(x) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m l_m(x)$, $x > 0$, причому

$$\exists\, \mu > 0\ \exists\, c > 0\ \forall\, m \in \mathbb{Z}_+ :$$

$$|c_m| \leq c \exp\{-\mu(4m+1)^{1/\beta}\}.$$

Тоді, врахувавши співвідношення $l_m(x) = h_{2m}(\sqrt{x})$, $m \in \mathbb{Z}_+$, $x > 0$, одержимо розклад:

$$\psi(x) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m h_{2m}(\sqrt{x}), \quad x > 0.$$

Нехай $\varphi(x) := \psi(x^2)$, або ж $\varphi(\sqrt{x}) = \psi(x)$. Тоді

$$\varphi(x) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m h_{2m}(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Отже, функція φ парна, причому $c_m = b_{2m}$, $m \in \mathbb{Z}_+$, де $b_{2m} = (\varphi, h_{2m})$, $m \in \mathbb{Z}_+$. Таким чином, $\varphi(x) = \sum_{m=0}^{\infty} b_{2m} h_{2m}(x)$, а для коефіцієнтів b_{2m}, $m \in \mathbb{Z}_+$, Фур'є-Ерміта функції φ правильними є оцінки:

$$\exists\, \mu\, 0\ \exists\, c > 0\ \forall\, m \in \mathbb{Z}_+ :$$

$$|c_m| = |b_{2m}| \leq c \exp\{-\mu(4m+1)^{1/\beta}\}.$$

Звідси вже випливає, що $\varphi \in S^{\beta/2}_{\beta/2}$. Цим доведено, що $\psi \in S^{\beta/2,+}_{\beta/2,+}$, тобто, $G_{\{\beta\}}(A) \subset S^{\beta/2,+}_{\beta/2,+}$.

Доведемо тепер, що $G_{\{\beta\}}(A)$ і $S^{\beta/2,+}_{\beta/2,+}$ збігаються не лише як множини, але й топологічно. Для цього символом $\overset{\circ}{S}_\beta$ позначимо сукупність усіх збіжних до нуля послідовностей, елементи яких задовольняють умову (2). Відображення

$$G_{\{\beta\}}(A) \ni \psi \xrightarrow{F_1} \{c_k(\psi), k \in \mathbb{Z}_+\} \in \overset{\circ}{S}_\beta,$$

де $c_k(\psi)$ — коефіцієнти Фур'є-Лагерра функції ψ за базисом $\{l_k, k \in \mathbb{Z}_+\}$, є бієктивним. При цьому збіжність у просторі $G_{\{\beta\}}(A)$ рівносильна покоординатній збіжності відповідних послідовностей до нуля в просторі

$\overset{\circ}{S}_\beta$ зі швидкістю, яка забезпечується оцінкою (2). Відображення

$$S_{\beta/2,+}^{\beta/2,+} \ni \varphi \overset{F_2}{\longmapsto} \{c_k(\varphi), k \in \mathbb{Z}_+\} \in \overset{\circ}{S}_\beta,$$

де $c_k(\varphi)$ — коефіцієнти Фур'є-Ерміта функції φ: $\varphi(x) = \psi(x^2)$, $x \in \mathbb{R}$, за базисом $\{h_k, k \in \mathbb{Z}_+\}$ є також бієктивним. При цьому збіжність у просторі $S_{\beta/2,+}^{\beta/2,+}$ рівносильна покоординатній збіжності відповідних послідовностей до нуля в просторі $\overset{\circ}{S}_\beta$ зі швидкістю, яка також забезпечується оцінкою (2). Звідси вже дістаємо, що якщо послідовність $\{\psi_\nu, \nu \geq 1\} \subset G_{\{\beta\}}(A)$ збігається до нуля в просторі $G_{\{\beta\}}(A)$, то ця ж послідовність збігається до нуля й у просторі $S_{\beta/2,+}^{\beta/2,+}$. Справді, якщо $\psi_\nu \to 0$, $\nu \to \infty$, у просторі $G_{\{\beta\}}(A)$, то $F_1[\psi_\nu] \to 0$, $\nu \to \infty$, у просторі $\overset{\circ}{S}_\beta$. Але $F_1[\psi_\nu] = F_2[\varphi_\nu]$, де $\varphi_\nu(x) = \psi_\nu(x^2)$, $\nu \geq 1$, $x \in \mathbb{R}$. Отже, $F_2[\varphi_\nu] \to 0$, $\nu \to \infty$, у просторі $\overset{\circ}{S}_\beta$. Правильним є й обернене твердження. Теорема доведена.

Символом S_+ позначимо сукупність функцій $\psi : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ таких, що відповідно до функції $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\varphi(x) = \psi(x^2)$, $x \in \mathbb{R}$, є елементами простору Шварца S. Збіжність в S_+ означимо так: послідовність функцій $\{\psi_\nu, \nu \geq 1\} \subset S_+$ збігається в S_+ до функції $\psi \in S_+$, якщо $\varphi_\nu \to \varphi$, $\nu \to \infty$, у просторі S, де $\varphi_\nu(x) := \psi_\nu(x^2)$, $\varphi(x) := \psi(x^2)$, $x \in \mathbb{R}$, $\nu \geq 1$.

Теорема 2. *Простори $H_\infty(A)$ та S_+ збігаються не тільки як множини, але й топологічно.*

Доведення цієї теореми аналогічне доведенню теореми 1.

2. Перетворення типу Гаусса-Вейєрштрасса формальних рядів Фур'є-Лагерра. Нехай $f = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k l_k \in \Phi'$, $c_k(f) =< f, l_k >$, $k \in \mathbb{Z}_+$. Перетворенням типу Гаусса-Вейєрштрасса ряду Фур'є-Лагерра узагальненої функції f назвемо перетворення вигляду

$$g_{t,\gamma}(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \exp\{-t(4k+1)^\gamma\} c_k(f) l_k(x),$$
$$x \in (0, \infty), \tag{3}$$

де $t > 0$, $\gamma > 0$ — фіксовані параметри.

Теорема 3. *Правильними є наступні твердження.*

а) Якщо $f \in (S_{\omega,+}^{\omega,+})'$ ($\omega = 1/2$, якщо $\gamma \geq 1$; $\omega = 1/(2\gamma)$, якщо $0 < \gamma < 1$), то ряд (3) збігається при кожному $t > 0$ рівномірно за x; $g_{t,\gamma} \in S_{\omega,+}^{\omega,+}$ при кожному $t > 0$ і $\gamma > 0$.

б) Нехай

$$G_{t,\gamma,x} := \sum_{k=0}^{\infty} \exp\{-t(4k+1)^\gamma\} l_k(x) l_k(y),$$
$$t > 0, \quad \gamma > 0, \quad \{x, y\} \subset (0, \infty).$$

Тоді $G_{t,\gamma,x} \in S_{\omega,+}^{\omega,+}$ при кожному $t > 0$ і $\gamma > 0$. Якщо $\gamma \geq 1$, то

$$|D_y^q G_{t,\gamma,x^2}(y^2)| \leq c_0 c_t (\operatorname{cth}(t/2))^{q/2} q^{q/2} \times$$
$$\times \exp\{-\frac{1}{4}\operatorname{th}(t/2) x^2\}, \tag{4}$$

де $q \in \mathbb{Z}_+$, $c_0 > 1$,

$$c_t = \max\{e\pi^{-1/2}, \pi^{-1/4}(e^{2t}-1)^{-1/4}\} \times$$
$$\times (e^{3t}-1)^{-1} e^{5t/2}.$$

в) Для функції $g_{t,\gamma}$ правильним є зображення

$$g_{t,\gamma}(x) =< f, G_{t,\gamma,x}(\cdot) >,$$
$$t > 0, \quad \gamma > 0, \quad x \in (0, \infty).$$

г) $g_{t,\gamma} \to f$ при $t \to +0$ у просторі $(S_{\omega,+}^{\omega,+})'$.

д) При кожному фіксованому $x \in (0, \infty)$ та $\gamma > 0$ $G_{t,\gamma,x}$, як абстрактна функція параметра t у просторі $S_{\omega,+}^{\omega,+}$, нескінченно диференційовна за t.

е) Функція $g_{t,\gamma}$ нескінченно диференційовна за t, причому

$$\frac{\partial^m}{\partial t^m} g_{t,\gamma}(x) =< f, \frac{\partial^m}{\partial t^m} G_{t,\gamma,x}(\cdot) >, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Доведення. а) Нехай $\gamma \geq 1$. Якщо $f \in (S_{\omega,+}^{\omega,+})' \equiv (S_{1/2,+}^{1/2,+})'$, то для довільного $\mu > 0$

існує стала $c = c(\mu) > 0$ така, що $|c_k(f)| \le c\exp(\mu(4k+1))$, $k \in \mathbb{Z}_+$. При фіксованому $t > 0$ візьмемо $\mu = t/2$ і врахуємо те, що $|l_k(x)| \le 1$, $\forall\, k \in \mathbb{Z}_+$, $x \in (0, +\infty)$. Тоді

$$|\exp\{-t(4k+1)^\gamma\}c_k(f)l_k(x)| \le$$

$$\exp\{-t(4k+1)\}|c_k(f)| \le c\exp\{-t(4k+1)/2\},$$

звідки й випливає рівномірна збіжність за x ряду (3). З останньої нерівності випливає також, що $g_{t,\gamma} \in S^{1/2,+}_{1/2,+}$ при кожному $t > 0$ та $\gamma \ge 1$. Випадок $0 < \gamma < 1$ розглядається аналогічно.

б) Те, що $G_{t,\gamma,x} \in S^{\omega,+}_{\omega,+}$ (при кожному $t > 0$, $x \in (0,\infty)$), випливає з оцінок:

$$|c_k(G_{t,\gamma,x})| = |\exp\{-t(4k+1)^\gamma\}l_k(x)| \le$$

$$\le \exp\{-t(4k+1)^\gamma\}, \quad t > 0, \gamma > 0, x \in (0,\infty).$$

Далі, оскільки $l_k(x) = h_{2k}(\sqrt{x})$, $k \in \mathbb{Z}_+$, $x \in (0,\infty)$, то

$$G_{t,\gamma,x^2}(y^2) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \exp\{-t(4k+1)^\gamma\}l_k(x^2)l_k(y^2) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \exp\{-t(4k+1)^\gamma\}h_{2k}(x)h_{2k}(y).$$

Звідси, з урахуванням оцінок похідних функції Ерміта (див. [3]), дістаємо нерівності (4).

в) Нехай

$$S_{n,t,\gamma,x}(y) := \sum_{k=0}^{\infty} \exp\{-t(4k+1)^\gamma\}l_k(x)l_k(y),$$

$$t > 0, \quad \{x, y\} \subset (0,\infty).$$

Доведемо, що $S_{n,t,\gamma,x} \to G_{t,\gamma,x}$, $n \to \infty$, у просторі $S^{\omega,+}_{\omega,+}$ (при фіксованих $t > 0$, $\gamma > 0$, $x \in (0,\infty)$). Оскільки $S^{\omega,+}_{\omega,+} = G_{\{2\omega\}}(A) = H_{\{2\omega\}} = \bigcup_{\mu>0} H_{\mu,2\omega}$, де $H_{\mu,2\omega}$ — сукупність тих функцій $\varphi \in S^{\omega,+}_{\omega,+}$, для яких при фіксованому $\mu > 0$

$$\|\varphi\|^2_{H_{\mu,2\omega}} :=$$

$$:= \sum_{k=0}^{\infty} \exp(2\mu(4k+1)^{1/(2\omega)})|c_k(\varphi)|^2 < \infty,$$

$$c_k(\varphi) = (\varphi, l_k)_{L_2((0,\infty))}, \quad k \in \mathbb{Z}_+,$$

то досить довести, що $S_{n,t,\gamma,x} \to G_{t,\gamma,x}$, $n \to \infty$, у просторі $H_{\{2\omega\}}$ (при фіксованих $t > 0$, $\gamma > 0$, $x \in (0,\infty)$). Іншими словами, потрібно встановити, що:

1) послідовність $\{S_{n,t,\gamma,x}, n \ge 1\}$ обмежена в просторі $H_{\{2\omega\}}$, тобто

$$\exists\, c > 0\ \forall\, n \in \mathbb{N}: \ \|S_{n,t,\gamma,x}\|^2_{H_{\mu,2\omega}} \le c$$

при деякому $\mu > 0$ та фіксованих $t > 0$, $\gamma > 0$, $x \in (0,\infty)$;

2) $\|S_{n,t,\gamma,x} - G_{t,\gamma,x}\|^2_{H_{\mu,2\omega}} \to 0$, $n \to \infty$, при деякому $\mu > 0$ та фіксованих $t > 0$, $\gamma > 0$, $x \in (0,\infty)$.

Для доведення 1) зазначимо, що

$$c_k(S_{n,t,\gamma,x}) =$$

$$= < S_{n,t,\gamma,x}, l_k > = (S_{n,t,\gamma,x}, l_k)_{L_2((0,\infty))} =$$

$$= \begin{cases} \exp\{-t(4k+1)^\gamma\}l_k, & k \le n, \\ 0, & k > n. \end{cases}$$

Нехай $0 < \gamma < 1$, тобто $\omega = 1/(2\gamma)$. Тоді для довільно фіксованого $\mu < t$ маємо:

$$\|S_{n,t,\gamma,x}\|^2_{H_{\mu,2\omega}} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \exp\{2\mu(4k+1)^\gamma\}|c_k(S_{n,t,\gamma,x})|^2 =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \exp\{-2(t-\mu)(4k+1)^\gamma\}|l_k(x)|^2 \le$$

$$\le \sum_{k=0}^{\infty} \exp\{-2(t-\mu)(4k+1)^\gamma\} < \infty$$

(тут ми скористались тим, що $|l_k(x)| \le 1$, $k \in \mathbb{Z}_+$, $x \in (0,\infty)$). Отже, послідовність $\{S_{n,t,\gamma,x}, n \ge 1\}$ обмежена в просторі $H_{\{2\omega\}}$.

Для доведення 2) досить встановити, що

$$r_{n,t,\gamma,x}(y) :=$$

$$:= \sum_{k=n+1}^{\infty} \exp\{-t(4k+1)^\gamma\}l_k(x)l_k(y) \to 0,$$

$$n \to \infty,$$

у просторі $H_{\{2\omega\}}$, тобто $\|r_{n,t,\gamma,x}\|^2_{H_{\mu,2\omega}} \to 0$, $n \to \infty$, при деякому $\mu > 0$ та фіксованих $t > 0$, $\gamma > 0$, $x \in (0,\infty)$.

Оскільки $r_{n,t,\gamma,x} \in S^{\omega,+}_{\omega,+}$ (при кожному $t > 0, \gamma > 0, x \in (0,\infty)$), то

$$c_k(r_{n,t,\gamma,x}) =$$

$$=< r_{n,t,\gamma,x}, l_k >= (r_{n,t,\gamma,x}, l_k)_{L_2((0,\infty))} =$$

$$= \begin{cases} \exp\{-t(4k+1)^\gamma\} l_k, & k \geq n+1, \\ 0, & k < n+1. \end{cases}$$

Нехай, наприклад, $0 < \gamma < 1$. Тоді для $\mu < t$ маємо:

$$\|r_{n,t,\gamma,x}\|^2_{H_{\mu,2\omega}} =$$

$$= \sum_{k=n+1}^{\infty} \exp\{2\mu(4k+1)^\gamma\} |c_k(r_{n,t,\gamma,x})|^2 =$$

$$= \sum_{k=n+1}^{\infty} \exp\{-2(t-\mu)(4k+1)^\gamma\} \to 0,$$

$$n \to \infty,$$

як залишок збіжного ряду. Аналогічно розглядається випадок $\gamma \geq 1$ (тоді $\omega = 1/2$). Цим доведено, що умова 2) виконується, тобто $S_{n,t,\gamma,x} \to G_{t,\gamma,x}$, $n \to infty$, у просторі $S^{\omega,+}_{\omega,+}$. Внаслідок властивості неперервності функціонала f маємо, що

$$< f, G_{t,\gamma,x}(\cdot) >=< f, \lim_{n\to\infty} S_{n,t,\gamma,x}(\cdot) >=$$

$$= \lim_{n\to\infty} < f, \sum_{k=0}^{n} \exp\{-t(4k+1)^\gamma\} l_k(x) l_k(y) >=$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \exp\{-t(4k+1)^\gamma\} c_k(f) l_k(x) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \exp\{-t(4k+1)^\gamma\} c_k(f) l_k(x) = g_{t,\gamma}(x),$$

що й потрібно було довести.

Доведення тверджень г), д) і е) здійснюється аналогічно доведенням відповідних тверджень про властивості перетворень типу Гаусса-Вейєрштрасса формальних рядів Фур'є-Ерміта [3].

Для рядів Фур'є-Лагерра, просумованих методами типу Гаусса-Вейєрштрасса, як і у випадку рядів Фур'є-Ерміта, справджується принцип локалізації.

Теорема 4 (принцип локалізації). *Якщо узагальнена функція* $f \in (S^{\beta,+}_{1/2,+})'$, $\beta > 1$, *і* f *збігається на інтервалі* $(a,b) \subset (0,\infty)$ *з неперервною функцією* g, *то* $g_{t,\gamma} \to g$ *при* $t \to +0$ *рівномірно за* x *на довільному відрізку* $[c,d] \subset (a,b)$, $\gamma \geq 1$.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Суетин П.К.* Классические ортогональные многочлены.— М.: Наука, 1976.— 328 с.

2. *Горбачук В.И., Горбачук М.Л.* Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений.— К.: Наук. думка, 1984.— 283 с.

3. *Gorodetsky V.V., Yarmolyk I.I.* About the summation of the formal Fourier-Hermite series by the Abel-Poisson method // Доповіді НАН України.— 1994.— № 6.— С.20—26.

Стаття надійшла до редколегії 17.02.2005