УДК 517.98

©2005 р. М.І. Дмитришин

Прикарпатський університет ім. В. Стефаника, Івано-Франківськ

ІНТЕРПОЛЯЦІЙНІ ШКАЛИ СПЕКТРАЛЬНИХ ПІДПРОСТОРІВ ОДНОГО КЛАСУ ВИРОДЖЕНИХ ЕЛІПТИЧНИХ ОПЕРАТОРІВ

Визначено інтерполяційні шкали спектральних підпросторів еліптичних операторів із сильно виродженими коефіцієнтами поблизу границі. Показано існування узагальненого спектрального розкладу таких операторів.

The interpolation scales of spectral subspaces of elliptic operators with strong singular coefficients near boundary are defined. The existence of generalized spectral decomposition is shown for such operators.

Вступ. Дана робота присвячена проблемі побудови спектральних розкладів у просторах L_p $(1 < p < \infty)$ вироджених еліптичних диференціальних операторів.

Для замкненого оператора A зі щільною областю визначення $\mathcal{D}(A)$ в банаховому просторі $\mathfrak{X}$ і довільного $\nu > 0$ покладемо

$$\mathcal{E}_1^\nu(A,\mathfrak{X}) =$$
$$= \Big\{x \in \mathcal{C}^\infty(A) : \sum_{k=0}^{\infty} \|(A/\nu)^k x\| < \infty\Big\},$$

де $\mathcal{C}^\infty(A) := \bigcap_{k=0}^\infty \mathcal{D}(A^k)$ — множина нескінченно диференційованих векторів оператора A. Елементи множини $\mathcal{E}(A,\mathfrak{X}) := \bigcup\limits_{\nu>0} \mathcal{E}_1^\nu(A,\mathfrak{X})$ називаються цілими векторами експоненціального типу оператора A [1].

У [2] показано, що у випадку операторів із точковим спектром підпростір $\mathcal{E}_1^\nu(A,\mathfrak{X})$ збігається з прямою сумою кореневих підпросторів, що відповідають власним значенням у колі радіуса ν. Таким чином, у банаховому просторі за допомогою цілих векторів експоненціального типу можна описати спектральні підпростори оператора.

У даній роботі використовується техніка операторного числення, розвиненого в [3]. Зазначимо, що для операторів із точковим спектром це числення розширено на алгебру символів, яка є проективною границею банахових скінченновимірних алгебр [4].

Інтерполяційні властивості просторів цілих векторів експоненціального типу та спектральних підпросторів замкнених операторів розглядались у [5, 6]. На їх основі в даній роботі визначено інтерполяційні шкали спектральних підпросторів еліптичних операторів, що характеризуються сильним виродженням коефіцієнтів поблизу границі (теорема 1).

Для вказаного класу вироджених операторів показано існування аналогу розкладу простору $L_p(\Omega)$ в ряди їх інваріантних спектральних підпросторів (теорема 2).

У роботі використовується стандартна термінологія з [8].

Вироджені еліптичні оператори. Нехай Ω — довільна область в $\mathbb{R}^n$, $\rho(t) \in C^\infty(\Omega)$ — додатна функція така, що:

(1) для довільного мультиіндексу α існує таке додатне число c_α, що $|D^\alpha \rho(t)| \le c_\alpha\, \rho^{1+|\alpha|}(t)$ для всіх $t \in \Omega$, $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$, $\alpha_i \in \mathbb{Z}_+$, $i = \overline{1,n}$;

(2) для довільного додатного числа K існують числа $\varepsilon_K > 0$ і $r_K > 0$ такі, що $\rho(t) > K$, якщо $d(t) \le \varepsilon_K$ або $|\,t\,| \ge r_K$, $t \in \Omega$ ($d(t)$ — відстань до границі області Ω). Покладемо

$$\Omega^{(j)} = \{u \in \Omega : \rho(t) < 2^j\},\ j = N, N+1, \ldots,$$
$$\Omega^{(N)} \ne \emptyset,\ \Omega_N = \Omega^{(N+2)}, \Omega_j = \Omega^{(j+2)} \backslash \Omega^{(j-1)},$$
$$j = N+1, N+2, \ldots.$$

Припустимо, що система функцій $\psi_j(t) \in C_0^\infty(\Omega_j)$, $(j \in \mathbb{N})$ задовольняє умови:

(1) $0 \le \psi_j(t) \le 1$, $\sum_{j=N}^{\infty} \psi_j(t) = 1$, $t \in \Omega$;

(2) для довільного мультиіндексу γ існує таке додатне число c_γ, що $|D^\gamma \psi_j(t)| \le c_\gamma\, 2^{j|\gamma|}$, $j = N, N+1, \ldots$, $0 < |\gamma| < \infty$.

Нехай $1 < p < \infty$, $1 \le q < \infty$, $s \ge 0$, $\tau \ge \mu + sp$, $\tau, \mu \in \mathbb{R}$. Виходячи з означення 3.2.4/2 [8], покладемо

$$B^s_{p,q}(\Omega\,;\,\rho^\mu;\,\rho^\tau) =$$

$$= \Bigg\{ u \in L_p(\Omega) : \|u\|_{B^s_{p,q}(\Omega\,;\,\rho^\mu;\,\rho^\tau)} =$$

$$= \Bigg[\sum_{j=N}^{\infty} \Big(2^{j\mu} \|\psi_j u\|^p_{B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)} +$$

$$+ 2^{j\tau} \|\psi_j u\|^p_{L_p(\mathbb{R}^n)} \Big) \Bigg]^{1/p} \Bigg\},$$

де $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ — простір Бєсова. Для $s = 0, 1, 2, \ldots$

$$W^s_p(\Omega\,;\,\rho^\mu;\,\rho^\tau) =$$

$$= \Big\{ u \in L_p(\Omega) : \|u\|_{W^s_p(\Omega\,;\,\rho^\mu;\,\rho^\tau)} =$$

$$= \Big[\sum_{j=N}^{\infty} \Big(2^{j\mu} \|\psi_j u\|^p_{W^s_p(\mathbb{R}^n)} +$$

$$+ 2^{j\tau} \|\psi_j u\|^p_{L_p(\mathbb{R}^n)} \Big) \Big]^{1/p} \Big\},$$

де $W^s_p(\mathbb{R}^n)$ — простір Соболєва.

Нехай $m \in \mathbb{N}$, $\zeta, \eta \in \mathbb{R}$, $\eta > \zeta + 2m$. Покладемо $\aleph_l = \frac{1}{2m}\Big(\eta\,(2m - l) + \zeta\, l\Big)$, $l = 0, 1, \ldots, 2m$ і розглянемо оператор

$$Au = \sum_{l=0}^{m} \sum_{|\alpha|=2l} \rho^{\,\aleph_{2l}}(t)\, b_\alpha(t)\, D^\alpha u \; + \sum_{|\beta|<2m} a_\beta(t)\, D^\beta u\,, \tag{1}$$

де $b_\alpha(t) \in C^\infty(\Omega)$ $(|\alpha| = 2l,\ l = 0, 1, \ldots, m)$ — дійсні функції, всі похідні яких (і самі функції) обмежені в Ω. Передбачається, що існує таке додатне число C, що $(-1)^m \sum_{|\alpha|=2m} b_\alpha(t)\, \xi^\alpha \ge C\, |\xi|^{2m}$, $b_{(0,\ldots,0)}(t) \ge C$, $(-1)^l \sum_{|\alpha|=2l} b_\alpha(t)\, \xi^\alpha \ge 0$, $l = 1, \ldots, m-1$, для всіх $\xi \in \mathbb{R}^n$ і всіх $t \in \Omega$. Крім цього, $a_\beta(t) \in C^\infty(\Omega)$ $(0 \le |\beta| < 2m)$ і існує додатне число $\delta > 0$ таке, що $D^\alpha a_\beta(t) = O\left(\rho^{\,\aleph_{|\beta|} + |\alpha| - \delta}\right)$ для $0 \le |\beta| < 2m$ і всіх мультиіндексів α.

Рівність (1), за наведених вище умов, визначає широкий клас вироджених еліптичних операторів [7]. Зокрема, якщо Ω — обмежена область і існують такі додатні числа c_1 і c_2, що $c_1\, d(t) \le \rho^{-1}(t) \le c_2\, d(t)$, то цьому класу належить оператор

$$Au = \rho^\zeta(t)\,(-\triangle)^m u + \rho^\eta(t) u, \ \ \eta > \zeta + 2m.$$

Інтерполяційні простори. Нехай $\eta > 0$, $1 < p < \infty$ і $\rho^{-a}(t) \in L_1(\Omega)$ для деякого $a \ge 0$. Далі, нехай оператор A, заданий рівністю (1), з областю визначення $W^{2m}_p(\Omega\,;\,\rho^{p\zeta};\,\rho^{p\eta})$ діє в просторі $L_p(\Omega)$. Згідно з теоремою 6.5.2/1 [8], оператор A^r, $r \in \mathbb{N}$, здійснює ізоморфізм простору $W^{2rm}_p(\Omega\,;\,\rho^{p\,r\,\zeta};\,\rho^{p\,r\,\eta})$ на $L_p(\Omega)$.

Для довільних чисел $\nu > 0, 1 \le q \le \infty$ визначимо простір $\mathcal{E}^\nu_q(A, W^{2rm}_p(\Omega\,;\,\rho^{p\,r\,\zeta};\,\rho^{p\,r\,\eta}))$ з нормою

$$\|u\|_{\mathcal{E}^\nu_q(A, W^{2rm}_p)} = \Big(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|A^k u\|^q_{W^{2rm}_p}}{\nu^{kq}} \Big)^{1/q},$$

$$1 \le q < \infty,$$

$$\|u\|_{\mathcal{E}^\nu_\infty(A, W^{2rm}_p)} = \sup_{k \in \mathbb{Z}_+} \frac{\|A^k u\|_{W^{2rm}_p}}{\nu^k},$$

де $W^{2rm}_p := W^{2rm}_p(\Omega\,;\,\rho^{p\,r\,\zeta};\,\rho^{p\,r\,\eta})$.

Нехай $0 < t, \nu_0, \nu_1 < \infty$, $1 \le q_0, q_1 \le \infty$, $0 < \theta < 1$. Визначимо інтерполяційний простір $\left(\mathcal{E}^{\nu_0}_{q_0}(A, W^{2rm}_p), \mathcal{E}^{\nu_1}_{q_1}(A, W^{2rm}_p)\right)_{\theta,q}$ з нормою

$$\|u\|_{\left(\mathcal{E}^{\nu_0}_{q_0}(A, W^{2rm}_p), \mathcal{E}^{\nu_1}_{q_1}(A, W^{2rm}_p)\right)_{\theta,q}} =$$

$$= \Big(\int_0^\infty \big[t^{-\theta} \mathcal{K}_r(t, u) \big]^q \frac{dt}{t} \Big)^{1/q},$$

$$\|u\|_{\left(\mathcal{E}^{\nu_0}_{q_0}(A, W^{2rm}_p), \mathcal{E}^{\nu_1}_{q_1}(A, W^{2rm}_p)\right)_{\theta,\infty}} = \sup_{t>0} t^{-\theta} \mathcal{K}_r(t, u),$$

$$\mathcal{K}_r(t,u)=\inf_{u=u_0+u_1}\big(\|u_0\|_{\mathcal{E}^{\nu_0}_{q_0}(A,W^{2rm}_p)}+$$

$$t\,\|u_1\|_{\mathcal{E}^{\nu_1}_{q_1}(A,W^{2rm}_p)}\big),$$

$u_0\in\mathcal{E}^{\nu_0}_{q_0}(A,W^{2rm}_p)$, $u_1\in\mathcal{E}^{\nu_1}_{q_1}(A,W^{2rm}_p)$.

Лема 1. *Для* $1\le q,\,q_0,\,q_1\le\infty$, $\nu_0\ne\nu_1$ *справджується рівність*

$$\mathcal{E}^{\nu}_q(A,W^{2rm}_p)=$$

$$=\big(\mathcal{E}^{\nu_0}_{q_0}(A,W^{2rm}_p),\,\mathcal{E}^{\nu_1}_{q_1}(A,W^{2rm}_p)\big)_{\theta,q},$$

де $\nu=\nu_0^{1-\theta}\nu_1^{\theta}$.

Доведення. Простір $\mathcal{E}^{\nu}_q(A,W^{2rm}_p)$ ізометрично ізоморфний підпростору послідовностей у $L_p(\Omega)$ вигляду $l^{\sigma}_{q,rm}=\big\{(A^ku)_{k=0}^{\infty}:\|(A^ku)\|_{l^{\sigma}_{q,rm}}<\infty\big\}$, де $\sigma=\log_2\nu^{-1}$ і $\|(A^ku)\|_{l^{\sigma}_{q,rm}}=\|u\|_{\mathcal{E}^{\nu}_q(A,W^{2rm}_p)}$, $u\in\mathcal{E}^{\nu}_q(A,W^{2rm}_p)$. Згідно з теоремою 1.18.2 [8], для $\sigma_0\ne\sigma_1$ виконується рівність $\big(l^{\sigma_0}_{q_0,rm},\,l^{\sigma_1}_{q_1,rm}\big)_{\theta,q}=l^{\sigma}_{q,rm}$, де $\sigma=(1-\theta)\sigma_0+\theta\sigma_1$. Звідси отримуємо потрібну рівність.

Для $1\le q<\infty$, $0<\theta<1$ визначимо інтерполяційний простір $\big(W^{2rm}_p,\,W^{2hm}_p\big)_{\theta,q}$ з нормою

$$\|u\|_{\left(W^{2rm}_p,\,W^{2hm}_p\right)_{\theta,q}}=$$

$$=\Big(\int_0^\infty\big[t^{-\theta}\mathcal{K}_{r,h}(t,u)\big]^q\frac{dt}{t}\Big)^{1/q},$$

де

$$\mathcal{K}_{r,h}(t,u)=\inf_{u=u_0+u_1}\big(\|u_0\|_{W^{2rm}_p}+t\,\|u_1\|_{W^{2hm}_p}\big),$$

$u_0\in W^{2rm}_p$, $u_1\in W^{2hm}_p$.

Лема 2. *Нехай* $s\ge0$, $\nu>0$, $1\le q<\infty$, $\tau>\mu+sp$. *Тоді виконується рівність*

$$\mathcal{E}^{\nu}_q(A,B^s_{p,q}(\Omega\,;\,\rho^{\mu};\,\rho^{\tau}))= \qquad (2)$$
$$=\big(\mathcal{E}^{\nu}_{q_0}(A,W^{2rm}_p),\,\mathcal{E}^{\nu}_{q_1}(A,W^{2hm}_p)\big)_{\theta,q},$$

де $s=(1-\theta)2rm+\theta2hm$, $r\ne h$, $\tau=(1-\theta)p\,r\,\eta+\theta p\,h\,\zeta$, $\frac{\mu-\tau}{sp}=\frac{\zeta-\eta}{2m}$, $\frac{1}{q}=\frac{1-\theta}{q_0}+\frac{\theta}{q_1}$, $1\le q_0,q_1<\infty$.

Доведення. Звуження оператора A^k на інтерполяційний простір $\big(W^{2rm}_p,\,W^{2hm}_p\big)_{\theta,q}$ є замкненим оператором із щільною областю визначення $\big(W^{2(r+k)m}_p,\,W^{2(h+k)m}_p\big)_{\theta,q}$. Тому визначений простір $\mathcal{E}^{\nu}_q\big(A,\big(W^{2rm}_p,\,W^{2hm}_p\big)_{\theta,q}\big)$, який ізометрично ізоморфний підпростору послідовностей в $L_p(\Omega)$ вигляду $l^{\sigma}_{q,rhm}=\big\{(A^ku)_{k=0}^{\infty}:\|(A^ku)\|_{l^{\sigma}_{q,rhm}}<\infty\big\}$, де $\sigma=\log_2\nu^{-1}$ і $\|(A^ku)\|_{l^{\sigma}_{q,rhm}}=\|u\|_{\mathcal{E}^{\nu}_q\left(A,\left(W^{2rm}_p,W^{2hm}_p\right)_{\theta,q}\right)}$, $u\in\mathcal{E}^{\nu}_q\big(A,\big(W^{2rm}_p,\,W^{2hm}_p\big)_{\theta,q}\big)$.

Згідно з теоремою 1.18.1 [8], маємо $l^{\sigma}_{q,rhm}=\big(l^{\sigma}_{q_0,rm},\,l^{\sigma}_{q_1,hm}\big)_{\theta,q}$, де $1/q=(1-\theta)/q_0+\theta/q_1$. Звідси та з теореми 3.4.2 [8] отримуємо (2).

Рівність (2) для $s\ge0$, $\nu>0$, $1\le q<\infty$, $\tau\ge\mu+sp$ визначає інтерполяційну шкалу просторів $\mathcal{E}^{\nu}_q(A,B^s_{p,q}(\Omega\,;\,\rho^{\mu};\,\rho^{\tau}))$. Норма простору $\mathcal{E}^{\nu}_q(A,B^s_{p,q}(\Omega\,;\,\rho^{\mu};\,\rho^{\tau}))$ визначається рівністю

$$\|u\|_{\mathcal{E}^{\nu}_q(A,B^s_{p,q}(\Omega\,;\,\rho^{\mu};\,\rho^{\tau}))}=$$

$$=\Big(\sum_{k=0}^{\infty}\nu^{-kq}\|A^ku\|^q_{B^s_{p,q}}\Big)^{1/q}$$

і еквівалентна нормі

$$\|u\|^*_{\mathcal{E}^{\nu}_q(A,B^s_{p,q}(\Omega\,;\,\rho^{\mu};\,\rho^{\tau}))}=$$

$$=\Big(\int_0^\infty\big[t^{-\theta}\mathcal{K}^{\nu}_{r,h}(t,u)\big]^q\frac{dt}{t}\Big)^{1/q},$$

$$\mathcal{K}^{\nu}_{r,h}(t,u)=\inf_{u=u_0+u_1}\Big(\|u_0\|_{\mathcal{E}^{\nu}_{q_0}(A,W^{2rm}_p)}+$$

$$+t\,\|u_1\|_{\mathcal{E}^{\nu}_{q_1}(A,W^{2hm}_p)}\Big),$$

$u_0\in\mathcal{E}^{\nu}_{q_0}(A,W^{2rm}_p)$, $u_1\in\mathcal{E}^{\nu}_{q_1}(A,W^{2hm}_p)$.

Для $0\le s_1<s_2$ і довільного $\varepsilon>0$ справджуються неперервні вкладення

$$\mathcal{E}^{\nu}_q(A,B^{s_2}_{p,q}(\Omega\,;\,\rho^{\mu};\,\rho^{\tau}))\subset$$
$$\subset\mathcal{E}^{\nu}_q(A,B^{s_1}_{p,q}(\Omega\,;\,\rho^{\mu};\,\rho^{\tau})),$$
$$\mathcal{E}^{\nu}_q(A,B^{s}_{p,q}(\Omega\,;\,\rho^{\mu};\,\rho^{\tau}))\subset$$
$$\subset\mathcal{E}^{\nu+\varepsilon}_q(A,B^{s}_{p,q}(\Omega\,;\,\rho^{\mu};\,\rho^{\tau})).$$

Простір $\mathcal{E}^{\nu}_q(A,B^s_{p,q}(\Omega\,;\,\rho^{\mu};\,\rho^{\tau}))$ інваріантний відносно оператора A^k і виконується нерівність

$$\|A^ku\|_{\mathcal{E}^{\nu}_q(A,B^s_{p,q}(\Omega\,;\,\rho^{\mu};\,\rho^{\tau}))}\le$$

$$\le\nu^k\|u\|_{\mathcal{E}^{\nu}_q(A,B^s_{p,q}(\Omega\,;\,\rho^{\mu};\,\rho^{\tau}))},$$

для всіх $u \in \mathcal{E}_q^\nu(A, B^s_{p,q}(\Omega\,;\,\rho^\mu;\,\rho^\tau))$.

Визначений вище оператор A має точковий спектр $\sigma(A) = \{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ (теорема 6.6.2 [8]) і кореневі підпростори $\mathcal{R}_n$, що відповідають власним значенням $\lambda_n \in \mathbb{C}$, скінченновимірні.

Теорема 1. *Нехай оператор A, заданий рівністю (1), з областю визначення $W_p^{2m}(\Omega\,;\,\rho^{p\zeta};\,\rho^{p\eta})$ діє в просторі $L_p(\Omega)$, $1 < p < \infty$, причому $\eta > 0$ і $\rho^{-a}(t) \in L_1(\Omega)$ для деякого $a \geq 0$. Тоді для $s \geq 0$, $\nu > 0$, $1 \leq q < \infty$, $\tau > \mu + sp$ і $0 < \theta < 1$ виконуються рівності*

$$\mathcal{E}_q^\nu(A, B^s_{p,q}(\Omega\,;\,\rho^\mu;\,\rho^\tau)) = Lin\Big\{\mathcal{R}_n :$$

$$|\lambda_n| < \min\big(\nu,\, \nu^{(s/(2m\theta)+1)^{-1}}\big)\Big\}, \qquad (3)$$

$$\mathcal{E}_q^\nu(A, B^s_{p,q}(\Omega\,;\,\rho^\mu;\,\rho^\tau)) = \Big\{u \in C^\infty(\Omega) :$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \nu^{-k}\|A^k u\|_{B^s_{p,q}(\Omega\,;\,\rho^\mu;\,\rho^\tau)},$$

$$\sup_{t\in\Omega} \rho^l(t)\,|D^\alpha\, u(t)| < \infty\Big\}, \qquad (4)$$

для всіх α, $l = 0, 1, 2, \dots$ (Lin означає лінійну оболонку функцій).

Доведення. Згідно з теоремою 2.2 [4], виконується рівність

$$\mathcal{E}_1^\nu(A, W_p^{2rm}) =$$

$$= Lin\big\{\mathcal{R}_n : |\lambda_n|^{r+1} < \nu\big\}, \quad r \in \mathbb{Z}_+.$$

На підставі скінченновимірності кореневих підпросторів $\mathcal{R}_n$, простори $\mathcal{E}_1^\nu(A, W_p^{2rm})$ також скінченновимірні. З леми 1 для $1 \leq q \leq \infty$ і $\nu = \nu_0^{1-\theta}(\nu_0 + \varepsilon)^\theta$, $\varepsilon > 0$ маємо

$$\mathcal{E}_q^\nu(A, W_p^{2rm}) =$$

$$= \big(\mathcal{E}_1^{\nu_0}(A, W_p^{2rm}),\, \mathcal{E}_1^{\nu_0+\varepsilon}(A, W_p^{2rm})\big)_{\theta,q}.$$

Згідно з теоремою 1.6.2 [8], підпростір $\mathcal{E}_1^{\nu_0}(A, W_p^{2rm}) \bigcap \mathcal{E}_1^{\nu_0+\varepsilon}(A, W_p^{2rm})$ щільний у просторі $\big(\mathcal{E}_1^{\nu_0}(A, W_p^{2rm}),\, \mathcal{E}_1^{\nu_0+\varepsilon}(A, W_p^{2rm})\big)_{\theta,q}$. Тому отримуємо $\mathcal{E}_1^\nu(A, W_p^{2rm}) = \mathcal{E}_q^\nu(A, W_p^{2rm})$ для всіх $\nu > 0$, $1 \leq q < \infty$.

Із рівності (2) при $r = 0$ маємо

$$\mathcal{E}_q^\nu(A, B^s_{p,q}(\Omega\,;\,\rho^\mu;\,\rho^\tau)) =$$

$$= \big(\mathcal{E}_{q_0}^\nu(A, L_p(\Omega)),\, \mathcal{E}_{q_1}^\nu(A, W_p^{2hm}(\Omega\,;\,\rho^{p\,h\,\zeta};$$

$$\rho^{p\,h\,\eta}))\big)_{\theta,q},$$

де $s = \theta 2hm$, $\tau = \theta p\,h\,\zeta$, $\frac{\mu-\tau}{sp} = \frac{\zeta-\eta}{2m}$. Звідси отримуємо

$$\mathcal{E}_q^\nu(A, B^s_{p,q}(\Omega\,;\,\rho^\mu;\,\rho^\tau)) =$$

$$= \mathcal{E}_{q_0}^\nu(A, L_p(\Omega)) \bigcap \mathcal{E}_{q_1}^\nu(A, W_p^{2hm}) =$$

$$= Lin\big\{\mathcal{R}_n : |\lambda_n| < \nu\big\} \bigcap Lin\big\{\mathcal{R}_n :$$

$$|\lambda_n|^{h+1} < \nu\big\} = Lin\big\{\mathcal{R}_n :$$

$$|\lambda_n| < \min\big(\nu,\, \nu^{\frac{1}{h+1}}\big)\big\},$$

що й доводить рівність (3).

Нехай $u \in C^\infty(\Omega)$, $\sup\limits_{t\in\Omega} \rho^l(t)\,|D^\alpha\, u(t)| < \infty$ для всіх мультиіндексів α, $l \in \mathbb{Z}_+$. Тоді $\|u\|_{W_p^{2rm}} \leq c\int\limits_\Omega \rho^{-a}(t)\,dt < \infty$, оскільки, за умовою, $\rho^{-a}(t) \in L_1(\Omega)$ для деякого $a \geq 0$. Звідси і з теореми 6.5.2/1 [8] маємо $u \in \mathcal{D}(A^r) = W_p^{2rm}(\Omega;\,\rho^{p\,r\,\zeta};\,\rho^{p\,r\,\eta})$.

Нехай тепер $u \in \mathcal{C}(A^\infty)$. Тоді $\rho^l\, D^\alpha u \in L_p(\Omega)$ для всіх α, $l \in \mathbb{Z}_+$. Звідси і з теореми вкладення Соболєва отримуємо

$$\sup_{t\in\Omega}\, \rho^l(t)\,|D^\alpha u(t)| \leq$$

$$\leq c\Big(\int\limits_\Omega \Big(\sum_{|\beta|=n} |D^\beta\,(\,\rho^l\, D^\alpha u(t)\,)\,|^p\Big)\,dt\Big)^{1/p} \leq$$

$$\leq c_{l,\,|\alpha|}.$$

Таким чином, маємо

$$\mathcal{C}(A^\infty) =$$

$$= \Big\{u \in C^\infty(\Omega) : \sup_{t\in\Omega} \rho^l(t)\,|D^\alpha\, u(t)| < \infty,\ \Big\}.$$

для всіх α, $l = 0, 1, 2, \dots$. Звідси, враховуючи означення простору $\mathcal{E}_q^\nu(A, B^s_{p,q}(\Omega\,;\,\rho^\mu;\,\rho^\tau))$, отримуємо рівність (4).

Узагальнений спектральний розклад. Нехай $\big\{\mathcal{E}_q^{\nu(n)}(A, B^s_{p,q}(\Omega\,;\,\rho^\mu;\,\rho^\tau))\big\}$ —

послідовність просторів, що відповідає послідовності додатних чисел $\{\nu(n)\}_{n=1}^{\infty}$ такій, що $\lim\limits_{n\to\infty} \nu(n) = \infty$. Для фіксованого числа $1 \le \beta < \infty$ визначимо простір

$$\ell_\beta = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} x_n = x \in B^s_{p,q}(\Omega\,;\, \rho^\mu;\, \rho^\tau) : \right.$$
$$\left. x_n \in \mathcal{E}_q^{\nu(n)}(A, B^s_{p,q}(\Omega\,;\, \rho^\mu;\, \rho^\tau)) \right\}$$

з нормою

$$\|x\|_{\ell_\beta} =$$
$$= \inf_{x=\sum x_n} \left(\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n(\beta-1)} \|x_n\|^\beta_{\mathcal{E}_q^{\nu(n)}(A, B^s_{p,q})} \right)^{1/\beta},$$

де inf береться за всіма представленнями елемента x у вигляді ряду $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$.

Позначимо

$$\mathcal{E}(A, B^s_{p,q}(\Omega\,;\, \rho^\mu;\, \rho^\tau)) :=$$
$$\bigcup_{\nu(n)>0} \mathcal{E}_q^{\nu(n)}(A, B^s_{p,q}(\Omega\,;\, \rho^\mu;\, \rho^\tau))$$

для всіх $1 \le q < \infty$, $s \ge 0$.

Теорема 2. *Нехай $s \ge 0$, $1 < p < \infty$ і $0 < \theta < 1$. Справедлива така рівність*

$$L_p(\Omega) = \left\{ x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n : x_n \in Lin \left\{ \mathcal{R}_k : \right.\right.$$
$$\left.\left. |\lambda_k| < \min\left(\nu(n),\, \nu(n)^{(s/(2m\theta)+1)^{-1}}\right) \right\} \right\}, \quad (5)$$

де $\mathcal{R}_k$ — кореневий підпростір оператора A, що відповідає власному значенню $\lambda_k \in \mathbb{C}$.

Доведення. Покажемо, що виконується рівність

$$\ell_\beta = \overline{\mathcal{E}(A, B^s_{p,q}(\Omega\,;\, \rho^\mu;\, \rho^\tau))}, \quad (6)$$

де замикання в нормі простору $B^s_{p,q}(\Omega\,;\, \rho^\mu;\, \rho^\tau)$.

Для $x \in \mathcal{E}_q^{\nu(n)}(A, B^s_{p,q}(\Omega\,;\, \rho^\mu;\, \rho^\tau))$ маємо

$$\|x\|_{\ell_\beta} \le 2^{\beta-1} \lim_{n\to\infty} \|x\|_{\mathcal{E}_q^{\nu(n)}(A, B^s_{p,q}(\Omega\,;\, \rho^\mu;\, \rho^\tau))} =$$
$$2^{\beta-1} \|x\|_{B^s_{p,q}(\Omega\,;\, \rho^\mu;\, \rho^\tau)}.$$

На підставі нерівності Гельдера

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|_{\ell_\beta} \le$$
$$\le 2^{\beta-1} \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|_{\mathcal{E}_q^{\nu(n)}(A, B^s_{p,q}(\Omega\,;\, \rho^\mu;\, \rho^\tau))} \le$$
$$\le 2^{\beta-1} \left(\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n(\beta-1)} \|x_n\|^\beta_{\mathcal{E}_q^{\nu(n)}(A, B^s_{p,q}(\Omega\,;\, \rho^\mu;\, \rho^\tau))} \right)^{1/\beta}$$

ряди $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \in B^s_{p,q}(\Omega\,;\, \rho^\mu;\, \rho^\tau)$ абсолютно збіжні в просторі ℓ_β. Покажемо, що ці ряди збіжні до x в ℓ_β. Справді, оскільки

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|_{B^s_{p,q}(\Omega\,;\, \rho^\mu;\, \rho^\tau)} \le$$
$$\le \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|_{\mathcal{E}_q^{\nu(n)}(A, B^s_{p,q}(\Omega\,;\, \rho^\mu;\, \rho^\tau))} \le$$
$$\le \left(\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n(\beta-1)} \|x_n\|^\beta_{\mathcal{E}_q^{\nu(n)}(A, B^s_{p,q}(\Omega\,;\, \rho^\mu;\, \rho^\tau))} \right)^{1/\beta},$$

то ряди $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ є абсолютно збіжними в $B^s_{p,q}(\Omega\,;\, \rho^\mu;\, \rho^\tau)$. Отже, для $\varepsilon > 0$ існує таке N, що

$$\left\| x - \sum_{n=1}^{N} x_n \right\|_{\ell_\beta} =$$
$$= \left\| \sum_{n>N} x_n \right\|_{\ell_\beta} \le \sum_{n>N} \|x_n\|_{\ell_\beta} \le$$
$$\le 2^{\beta-1} \sum_{n>N} \|x_n\|_{B^s_{p,q}(\Omega\,;\, \rho^\mu;\, \rho^\tau)} < \varepsilon.$$

Враховуючи нерівності

$$\|x\|_{B^s_{p,q}(\Omega\,;\, \rho^\mu;\, \rho^\tau)} \le$$
$$\le \inf_{x=\sum x_n} \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|_{B^s_{p,q}(\Omega\,;\, \rho^\mu;\, \rho^\tau)} \le$$
$$\le \inf_{x=\sum x_n} \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|_{\mathcal{E}_q^{\nu(n)}(A, B^s_{p,q}(\Omega\,;\, \rho^\mu;\, \rho^\tau))} \le \|x\|_{\ell_\beta},$$

маємо

$$\|x\|_{B^s_{p,q}(\Omega\,;\, \rho^\mu;\, \rho^\tau)} \le \|x\|_{\ell_\beta} \le 2^{\beta-1} \|x\|_{B^s_{p,q}(\Omega\,;\, \rho^\mu;\, \rho^\tau)}$$

для всіх $x \in \mathcal{E}_q^{\nu(n)}(A, B^s_{p,q}(\Omega\,;\,\rho^\mu;\,\rho^\tau))$. Оскільки

$$\mathcal{E}(A, B^s_{p,q}(\Omega\,;\,\rho^\mu;\,\rho^\tau)) =$$
$$= \bigcup_{\nu(n)>0} \mathcal{E}_q^{\nu(n)}(A, B^s_{p,q}(\Omega\,;\,\rho^\mu;\,\rho^\tau))$$

при $1 \le q < \infty$, то

$$\|x\|_{B^s_{p,q}(\Omega\,;\,\rho^\mu;\,\rho^\tau)} \le \|x\|_{\ell_\beta} \le 2^{\beta-1}\|x\|_{B^s_{p,q}(\Omega\,;\,\rho^\mu;\,\rho^\tau)}$$

для всіх $x \in \mathcal{E}(A, B^s_{p,q}(\Omega\,;\,\rho^\mu;\,\rho^\tau))$. Таким чином, рівність (6) встановлено.

Згідно з теоремою 6.6.2 [8], лінійна оболонка $Lin\left\{\mathcal{R}_n : \quad n \in \mathbb{N}\right\}$ кореневих векторів оператора A щільна в просторі $L_p(\Omega)$.

Тому, в силу рівності (3), виконується умова щільності

$$\overline{\mathcal{E}(A, B^s_{p,q}(\Omega\,;\,\rho^\mu;\,\rho^\tau))} = L_p(\Omega).$$

Рівність (5) тепер випливає із рівності (6).

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Радыно Я.В.* Пространство векторов экспоненциального типа // Докл. АН БССР.— 1983.— **27**, № 9.— С.791—793.

2. *Lopushansky O.V., Dmytryshyn M.I.* Vectors of exponential type of operators with discrete spectrum // Математичні студії.— 1998.— **9**, № 1.— С.70—77.

3. *Лопушанський О.В.* Операторне числення на ультрагладких векторах // Укр. мат. журн.— 1992.— **44**, № 4.— С.502—513.

4. *Lopushansky O., Dmytryshyn M.* Operator calculus on the exponential type vectors of the operator with point spectrum // Chapter 12 in book "General Topology in Banach Spaces".— Nova Sci. Publ., Huntington, New York, 2001.— P.137—145.

5. *Дмитришин М.І.* Інтерполяція просторів ультрагладких векторів замкнених операторів // Матем. методи та фіз.-мех. поля.— 1999.— **42**, № 4.— С.31—34.

6. *Lopushansky O., Dmytryshyn M.* Interpolation of spectral subspaces of the unbounded operators in Banach spaces // Demonstratio Mathematica.— 2004.— **37**, № 1.

7. *Triebel H.* L_p theory for a class of singular elliptic differential operators // Czechoslovak Math. J.— 1973.— **28**.— P.525—541.

8. *Трибель Х.* Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные уравнения.— М.: Мир, 1980.

Стаття надійшла до редколегії 25.06.2004