УДК 517.98

©2005 р. В.В. Городецький[1], В.П. Ратушняк[2]

[1]Чернівецький національний університет ім. Ю.Федьковича, Чернівці
[2]Коломийський економіко-правовий коледж від Київського національного торговельно-економічного університету, Коломия

ПРО ОДИН КЛАС ПСЕВДОДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ ОПЕРАТОРІВ НЕСКІНЧЕННОГО ПОРЯДКУ

У просторі Φ, який є повним досконалим зліченно нормованим простором із топологією проективної границі банахових просторів, будуються псевдодиференціальні оператори нескінченного порядку (зокрема гіперсингулярні інтеграли нескінченного порядку) з негладкими в точці 0 символами. Досліджується топологічна структура простору Фур'є-образів $F[\Phi]$.

The pseudodifferential operators of infinite order (particularly, hypersingular integrals of infinite order) with non-smooth symbols in point 0 are constructed on the space Φ, which is a complete perfect finitely normalized space with topology of projective boundary of Banach space. The topological structure of Fourier images $F[\Phi]$ is investigated.

Вступ. Предметом багатьох досліджень є псевдодиференціальні оператори (ПДО) та псевдодиференціальні рівняння (ПДР), теорія яких у сучасній формі створена в середині шістдесятих років XX століття. Їх кількість значно збільшилась після того, як виявилось, що ПДО та ПДР тісно пов'язані з важливими задачами аналізу та сучасної математичної фізики. Серед нових розділів цієї теорії особливої уваги заслуговує теорія ПДР з ПДО, побудованими за негладкими однорідними символами. Випадок однорідних символів має важливі застосування в теорії випадкових процесів. Так, побудові розривних марковських процесів за твірними інтегродиференціальними операторами і, зокрема, ПДО присвячена значна література, в якій використовуються або стохастичні диференціальні рівняння, або теорія півгруп операторів.

Теорія ПДО з негладкими символами тісно пов'язана також із сучасною теорією фракталів, яка останнім часом бурхливо розвивається (див. [1—4]). У книзі [2] охоплені майже всі галузі фізики, де зустрічаються фрактальні структури — від квантової теорії поля та статистичної механіки до теорії турбулентності та хаосу в динамічних системах. Дослідження лінійних параболічних псевдодиференціальних рівнянь (ППДР) зі сталим негладким однорідним символом було розпочате С.Д. Ейдельманом та Я.М. Дрінем у [5]. Для рівняння з таким символом (незалежним від просторових координат і часової змінної) фундаментальний розв'язок задачі Коші знаходиться за допомогою перетворення Фур'є. Маючи зображення розв'язку задачі Коші у вигляді інтеграла Пуассона, в [5] на псевдодиференціальний випадок поширюється ряд теорем про стабілізацію розв'язків задачі Коші (зокрема, знайдено необхідні й достатні умови поточкової та рівномірної стабілізації). М.В. Федорюком [6] знайдена точна асимптотика фундаментального розв'язку при $|x| \to +\infty$, яка виявилась вже не експоненціальною, як у випадку диференціальних рівнянь, а степеневою. Для рівнянь більш загального вигляду Я.М. Дрінь [7] одержав шаудерові оцінки та дослідив коректність задачі Коші у класах гельдерових функцій. В.В. Городецьким та В.А. Літовченком [8,9] встановлено коректну розв'язність задачі Коші для ППДР, що є поліномами певних ПДО, побудованих за негладкими символами, з початковими умовами з просторів узагальнених функцій скінченного або нескінченного порядків, досліджено властивості локалізації та слабкої стабілізації розв'язків задачі Коші для вказаних рівнянь.

Отже, на теперішній час актуальними є: 1) питання про розширення класу ПДР з ПДО, побудованими за негладкими символами; зокрема, дослідження ПДР, які містять вказані псевдодиференціальні оператори *нескінченного порядку*; 2) розвинення теорії задачі Коші для таких рівнянь та теорії двоїстості (перетворення Фур'є). У цій роботі будується ПДО нескінченного порядку з негладким у точці 0 символом, який діє в просторі основних функцій Φ_γ [10]. Основним методом досліджень є метод перетворення Фур'є, тому попередньо вивчається простір Фур'є-образів $F[\Phi_\gamma]$ (топологічна структура $F[\Phi_\gamma]$, основні операції в цьому просторі).

1. Означення й топологічна структура простору Φ_γ. Нехай γ — фіксоване число з множини $(1,+\infty)\setminus\{2,3,4,...\}$, $\gamma_0 := 1+[\gamma]$, $M(x) := 1+|x|$, $x\in\mathbb{R}$. Елементами простору Φ_γ, за означенням, є нескінченно диференційовні на $\mathbb{R}$ функції φ, які задовольняють нерівності

$$|D_x^k\varphi(x)| \le \frac{c_k}{(1+|x|)^{\gamma_0+k}}, \quad x\in\mathbb{R}, \quad k\in\mathbb{Z}_+.$$

Надалі припускатимемо, що послідовність $\{c_k, k\in\mathbb{Z}_+\}$ задовольняє умову:

$$\exists\, c>0\ \exists\, A>0\ \forall\, k\in\mathbb{Z}_+ :\ |c_k| \le cA^k k^k.$$

У Φ_γ вводиться структура зліченно нормованого простору за допомогою норм

$$\|\varphi\|_p = \sup_{x\in\mathbb{R}}\left\{\sum_{k=0}^{p} M(x)^{\gamma_0+k}|D_x^k\varphi(x)|\right\},$$
$$\varphi\in\Phi_\gamma, \quad p\in\mathbb{Z}_+.$$

Очевидно, що

$$\|\varphi\|_0 \le \|\varphi\|_1 \le \|\varphi\|_2 \le ..., \quad \varphi\in\Phi_\gamma, \qquad (1)$$

тобто ці норми є попарно зрівнянними.

Збіжність у Φ_γ визначається так: послідовність функцій $\{\varphi_\nu, \nu\ge 1\}\subset\Phi_\gamma$ збігається в Φ_γ до функції $\varphi\in\Phi_\gamma$ при $\nu\to\infty$, якщо

$$\forall\, p\in\mathbb{Z}_+ :\ \|\varphi_\nu-\varphi\|_p \to 0, \quad \nu\to\infty.$$

Зрозуміло, що $D(\mathbb{R})\subset S(\mathbb{R})\subset\Phi_\gamma$, причому ці вкладення є неперервними та щільними. Позначимо через Φ_p поповнення Φ_γ за p-ою нормою. Φ_p — банахів простір, при цьому правильними є вкладення $\Phi_0\supset\Phi_1\supset ...\supset\Phi_p\supset ....$ Кожне вкладення $\Phi_{p+1}\subset\Phi_p$, $p\in\mathbb{Z}_+$, неперервне (внаслідок (1)) і щільне (бо щільними є вкладення $D(\mathbb{R})$ у кожний простір Φ_p, $p\in\mathbb{Z}_+$; символом $D(\mathbb{R})$ позначається простір усіх фінітних нескінченно диференційовних на $\mathbb{R}$ функцій). У [10] доведено, що Φ — повний досконалий зліченно нормований простір, причому вкладення $\Phi_{p+1}\subset\Phi_p$, $p\in\mathbb{Z}_+$, є компактними.

Зазначимо, що збіжність послідовності $\{\varphi_\nu, \nu\ge 1\}\subset\Phi_\gamma$ у просторі Φ_γ до функції $\varphi\in\Phi_\gamma$ можна охарактеризувати ще й так [10]: $\{\varphi_\nu, \nu\ge 1\}\subset\Phi_\gamma$ збігається за топологією простору Φ_γ до $\varphi\in\Phi_\gamma$ тоді й тільки тоді, коли вона:

1) обмежена в Φ_γ, тобто

$$\forall\, p\in\mathbb{Z}_+\ \exists\, c=c(p)>0\ \forall\,\nu\ge 1 :\ \|\varphi_\nu\|_p \le c;$$

2) правильно збігається в Φ_γ, а саме, для довільного $\alpha\in\mathbb{Z}_+$ послідовність $\{D_x^\alpha(\varphi_\nu-\varphi), \nu\ge 1\}$ збігається до нуля рівномірно на кожній обмеженій замкненій множині $\mathbb{K}\subset\mathbb{R}$.

У просторі Φ_γ визначені та неперервні операції зсуву аргументу та диференціювання. Оскільки Φ_γ — досконалий простір, то на підставі загальних результатів теорії досконалих просторів (див. [11]) твердимо, що операція зсуву аргументу в просторі Φ_γ не лише неперервна, але й нескінченно диференційовна, тобто граничні співвідношення вигляду

$$\frac{\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x)}{\Delta x} \underset{\Delta x\to 0}{\to} \varphi'(x)$$

виконуються в розумінні збіжності в просторі Φ_γ.

2. Перетворення Фур'є функцій із простору Φ_γ. Функції з простору Φ_γ абсолютно інтегровні на $\mathbb{R}$, тому на них визначена операція перетворення Фур'є F:

$$F[\varphi](\xi) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) e^{ix\xi} dx, \quad \varphi \in \Phi_\gamma.$$

Символом Ψ_γ позначатимемо Фур'є-образ простору Φ_γ: $\Psi_\gamma = F[\Phi_\gamma]$. Очевидно, що кожна функція $F[\varphi]$, $\varphi \in \Phi_\gamma$ обмежена й неперервна на $\mathbb{R}$. Розглянемо основні властивості перетворення Фур'є функцій із простору Φ_γ.

1. *Якщо* $\varphi \in \Phi_\gamma$, *то* $F[\varphi] \in L_1(\mathbb{R})$.

2. *Якщо* $\varphi \in \Phi_\gamma$, *то* $F[\varphi]$ *— нескінченно диференційовна на* $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ *функція.*

Доведення. Якщо $\xi \neq 0$, то, інтегруючи частинами m разів (m — довільно фіксоване натуральне число) одержимо, що

$$F[\varphi](\xi) = \frac{c}{\xi^m} \int_{\mathbb{R}} \varphi^{(m)}(x) e^{ix\xi} dx.$$

Із властивостей основної функції $\varphi \in \Phi_\gamma$ випливає, що за умови $m \geq s$ інтеграл $\int_{\mathbb{R}} (ix)^s \varphi^{(m)}(x) e^{ix\xi} dx$ є абсолютно збіжним і рівномірно збіжним за параметром ξ; внаслідок чого

$$D_\xi^s \left(\int_{\mathbb{R}} \varphi^{(m)}(x) e^{ix\xi} dx \right) =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} (ix)^s \varphi^{(m)}(x) e^{ix\xi} dx,$$

тобто

$$\forall\, s \in \mathbb{N}\ \exists\, D_\xi^s F[\varphi](\xi) =$$

$$= \left(\frac{c}{\xi^m} \int_{\mathbb{R}} \varphi^{(m)}(x) e^{ix\xi} dx \right)^{(s)} =$$

$$= c \Bigg[\xi^{-m} \int_{\mathbb{R}} (ix)^s \varphi^{(m)}(x) dx -$$

$$- ms\xi^{-(m+1)} \int_{\mathbb{R}} (ix)^{s-1} \varphi^{(m)}(x) e^{ix\xi} dx +$$

$$+ m(m+1) \frac{s(s-1)}{1 \cdot 2} \xi^{-(m+2)} \times$$

$$\times \int_{\mathbb{R}} (ix)^{s-2} \varphi^{(m)}(x) e^{ix\xi} dx + \cdots +$$

$$+ (-1)^s m(m+1) \cdots (m+s) \int_{\mathbb{R}} \varphi^{(m)}(x) e^{ix\xi} dx \Bigg],$$

$$\xi \neq 0, \quad m \geq s.$$

Отже, $F[\varphi] \in C^\infty(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \cap C(\mathbb{R})$.

Зауваження 1. *У точці* $\xi = 0$ *функція* $F[\varphi]$ *може бути недиференційовною. Якщо, наприклад,* $\gamma \in (1,2)$, *то* $[\gamma] = 1$, *тобто функція* $\varphi \in \Phi_\gamma$ *задовольняє умову:* $|\varphi(x)| \leq \dfrac{c}{(1+|x|)^2}$, $\forall x \in \mathbb{R}$. *Звідси випливає, що диференціювання інтеграла* $\int_{\mathbb{R}} \varphi(x) \exp\{ix\xi\} dx$ *за параметром* ξ *може привести до розбіжного інтеграла. Інтегрування ж частинами відразу вимагає виконання умови* $\xi \neq 0$. *Цей факт підтверджує такий приклад. Функція* $\varphi(x) = (1+x^2)^{-1}$, $x \in \mathbb{R}$, *є елементом простору* Φ_γ *з параметром* $\gamma \in (1,2)$. *Відомо, що* $F[\varphi](\xi) = \pi e^{-|\xi|}$, $\xi \in \mathbb{R}$. *Функція* $F[\varphi]$, *очевидно, не є диференційовною в точці* $\xi = 0$.

3. *У функції* $D_\xi^k F[\varphi](\xi)$, $\xi \neq 0$, $k \in \mathbb{Z}_+$ *існують скінченні односторонні границі* $\lim\limits_{\xi \to 0+0} D_\xi^k F[\varphi](\xi)$, $\lim\limits_{\xi \to 0-0} D_\xi^k F[\varphi](\xi)$, $\varphi \in \Phi_\gamma$.

Доведення. Доведення проведемо методом математичної індукції. Для $k = 0$ твердження є очевидним, оскільки $F[\varphi]$ неперервна на $\mathbb{R}$ функція. Припустимо, що твердження є правильним для функції $g(\xi) := D_\xi^k F[\varphi](\xi)$, тобто існує скінченна правостороння границя $\lim\limits_{\xi \to 0+0} g(\xi)$ (випадок скінченної лівосторонньої границі розглядається аналогічно). Доведемо, що функція $g'(\xi) = D_\xi^{k+1} F[\varphi](\xi)$ також має скінченну правосторонню границю в точці $\xi = 0$.

Припустимо, що це не так, тобто $\lim\limits_{\xi \to 0+0} g'(\xi) = +\infty$. Іншими словами,

$$\forall\, M > 1\ \exists\, \delta = \delta(M) > 0\ \forall\, \xi :$$

$$0 < \xi < \delta \Rightarrow g'(\xi) > M.$$

Із означення похідної функції в точці випливає, що

$$\forall\, \varepsilon_0 \in (0, M)\ \exists\, \delta_0 = \delta_0(\varepsilon):\ |\Delta\xi| < \delta_0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left| \frac{g(\xi + \Delta\xi) - g(\xi)}{\Delta\xi} - g'(\xi) \right| < \varepsilon_0, \quad \xi \neq 0.$$

Отже,

$$\frac{g(\xi + \Delta\xi) - g(\xi)}{\Delta\xi} > g'(\xi) - \varepsilon_0 > M - \varepsilon_0.$$

Для $\Delta\xi \in (0, \delta_0)$ правильною є нерівність:

$$g(\xi + \Delta\xi) > (M - \varepsilon_0)\Delta\xi + g(\xi).$$

За умовою $\lim\limits_{\xi \to 0+0} g(\xi) = c < \infty$, тобто

$$\forall\, \varepsilon_1 > 0\ \exists\, \delta_1 = \delta_1(\varepsilon) > 0\ \forall\, \xi:$$

$$0 < \xi < \delta_1 \Rightarrow |g(\xi) - c| < \varepsilon_1,$$

тобто $g(\xi) > c - \varepsilon_1$. Отже, для $\Delta\xi \in (0, \tilde{\delta})$, $\tilde{\delta} = \min\{\delta_1, \delta_0\}$ справджується нерівність

$$g(\xi + \Delta\xi) > (M - \varepsilon_0)\Delta\xi + c - \varepsilon_1. \qquad (2)$$

Оскільки функція g неперервна на $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, то $\lim\limits_{\xi \to 0+0} g(\xi + \Delta\xi) = g(\Delta\xi)$. Врахувавши це співвідношення, перейдемо до границі при $\xi \to 0+0$ в нерівності (2); в результаті одержимо, що

$$g(\Delta\xi) \geq (M - \varepsilon_0)\Delta\xi + c - \varepsilon_1,$$

де $M > 1$ — довільне число. Це число завжди можна підібрати так, що $g(\Delta\xi) > c + \varepsilon_1$, $\Delta\xi \in (0, \tilde{\delta})$, що суперечить припущенню $\lim\limits_{\xi \to 0+0} g(\xi) = c < \infty$ (бо тоді $g(\xi) < c + \varepsilon_1$, $\xi \in (0, \tilde{\delta})$).

Якщо припустити, що $\lim\limits_{\xi \to 0+0} g'(\xi) = -\infty$, то, міркуючи аналогічно, дійдемо до суперечності з припущенням про існування скінченної границі у функції $g(\xi)$ при $\xi \to 0+0$. Твердження доведено.

4. *Кожна функція $F[\varphi] \in \Psi_\gamma$, $\varphi \in \Phi_\gamma$, в точці 0 задовольняє умову Діні.*

Доведення. Умова Діні для інтегровної функції f у точці $\xi \in \mathbb{R}$ полягає в тому, що при деякому $\delta > 0$ збіжним є інтеграл

$$\int_{-\delta}^{\delta} \left| \frac{f(\xi + t) - f(\xi)}{t} \right| dt.$$

У даному випадку $\xi = 0$, $f = F[\varphi]$; потрібно довести, що при деякому $\delta > 0$ існує інтеграл

$$\int_{-\delta}^{\delta} \left| \frac{F[\varphi](t) - F[\varphi](0)}{t} \right| dt \equiv \int_{-\delta}^{\delta} |\psi(t)| dt. \qquad (3)$$

Інтеграл (3) розуміємо як невласний, тобто

$$\int_{-\delta}^{\delta} |\psi(t)| dt = \lim_{\varepsilon \to +0} \left(\int_{\varepsilon}^{\delta} |\psi(t)| dt + \int_{-\delta}^{-\varepsilon} |\psi(t)| dt \right).$$

До інтеграла $\int\limits_{\varepsilon}^{\delta} |\psi(t)| dt$ застосуємо теорему про середнє значення, врахувавши при цьому, що на проміжку $[\varepsilon, \delta]$ функція $|\psi|$ неперервна:

$$\int_{\varepsilon}^{\delta} |\psi(t)| dt = (\delta - \varepsilon)|\psi(\tilde{\delta})|, \quad \varepsilon < \tilde{\delta} < \delta.$$

Оскільки

$$\psi(\tilde{\delta}) = \frac{|F[\varphi](\tilde{\delta}) - F[\varphi](0)|}{\tilde{\delta}} = F'[\varphi](\tilde{\tilde{\delta}}),$$

$$\varepsilon < \tilde{\tilde{\delta}} < \delta,$$

то

$$\int_{0}^{\delta} |\psi(t)| dt = \lim (\delta - \varepsilon)|F'|[\varphi](\tilde{\tilde{\delta}})||.$$

На проміжку $[\varepsilon, \delta]$ функція $|F'[\varphi]|$ обмежена як неперервна; за рахунок умови $\lim\limits_{\xi \to +0} F'[\varphi](\xi) < \infty$ вона буде обмеженою й на проміжку $[0, \delta]$, тобто $\int\limits_0^\delta |\psi(t)|dt < \infty$. Аналогічно доводимо, що $\int\limits_{-\delta}^0 |\psi(t)|dt < \infty$. Отже, умова Діні в точці 0 для $F[\varphi]$ виконується.

Зауваження 2. *У всіх точках* $\xi \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *функція* $F[\varphi]$ *неперервно диференційовна (навіть нескінченно диференційовна), тому в таких точках умова Діні для* $F[\varphi]$ *також виконується. Отже, в кожній точці* $\xi \in \mathbb{R}$ *для функції* $F[\varphi]$, $\varphi \in \Phi_\gamma$, *умова Діні виконується. Крім того, перетворення Фур'є* $F[\varphi]$ *функції* $\varphi \in \Phi_\gamma$ *є інтегровною на* $\mathbb{R}$ *функцією. Із загальної теорії перетворення Фур'є випливає, що тоді функція* φ *зображається через її перетворення Фур'є* $F[\varphi]$ *за допомогою операції оберненого перетворення Фур'є* F^{-1}*:*

$$\varphi = F^{-1}[F[\varphi]] = F[F^{-1}[\varphi]], \tag{4}$$

де

$$F^{-1}[\psi](x) =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} \psi(\xi)e^{-ix\xi}d\xi = \frac{1}{2\pi}F[\psi](-x) =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} \psi(-\xi)e^{i\xi x}d\xi = \frac{1}{2\pi}F[\psi(-\xi)](x). \tag{5}$$

Із формул (4), (5) випливає, що кожна функція φ *з* Ψ_γ *є перетворенням Фур'є функції* $\psi = F^{-1}[\varphi]$ *з* Φ_γ, $\varphi = F[\psi]$. *Для перетворення Фур'є відома теорема єдиності: якщо* $\varphi \in L_1(\mathbb{R})$ *і* φ *кусково-неперервна на* $\mathbb{R}$ *функція, то з умови* $F[\varphi] = 0$ *випливає, що* $\varphi = 0$. *Це означає, що перетворення Фур'є* F *відображає* Φ_γ *на* Ψ_γ*, причому це відображення є взаємно однозначним.*

5. *Для функцій з простору* Ψ_γ *правильними є нерівності*

$$\forall \{k, m\} \subset \mathbb{Z}_+, k \geq m, \ \exists c_k > 0 \ \exists c_m > 0 :$$
$$\sup_{\xi \in \mathbb{R}\setminus\{0\}} |\xi^k F^{(m)}[\varphi](\xi)| \leq c_k c_m, \quad \varphi \in \Phi_\gamma,$$

причому $c_k \leq cA^k k^k$ $(c, A > 0$*; сталі* c, A *залежать лише від функції* $F[\varphi])$.

Справді, якщо $\xi \neq 0$, то скористаємось співвідношенням

$$\xi^k F^{(m)}[\varphi](\xi) = F[(x^m\varphi(x))^{(k)}](\xi) =$$
$$= \int\limits_{\mathbb{R}} (x^m\varphi(x))^{(k)} e^{ix\xi}dx.$$

Застосувавши формулу Лейбніца диференціювання добутку двох функцій, знайдемо, що оцінка виразу $|\xi^k F^{(m)}[\varphi](\xi)|$, $\xi \neq 0$ зводиться до оцінки скінченної суми інтегралів

$$\int\limits_{\mathbb{R}} |x^m\varphi^{(k)}(x)|dx + km\int\limits_{\mathbb{R}} |x^{m-1}\varphi^{(k-1)}(x)|dx +$$
$$+\frac{1}{2}m(m-1)k(k-1)\int\limits_{\mathbb{R}} |x^{m-2}\varphi^{(k-2)}(x)|dx +$$
$$+ ... + m!C_k^m \int\limits_{\mathbb{R}} |\varphi^{(k-m)}(x)|dx. \tag{6}$$

Розглянемо один із інтегралів у сумі (6):

$$\int\limits_{\mathbb{R}} |x^{m-i}\varphi^{(k-i)}(x)|dx, \quad 0 \leq i \leq m.$$

За умови $k \geq m$ вказаний інтеграл є збіжним, бо

$$|x^{m-i}\varphi^{(k-i)}(x)| \leq c_{k-i}\frac{|x|^{m-i}}{(1+|x|)^{k-i+1+[\gamma]}} \leq$$
$$\leq c_{k-i}\frac{1}{(1+|x|)^{1+[\gamma]}}, \quad \gamma > 1.$$

Звідси, з урахуванням оцінки

$$\sum_{j=0}^m C_k^j \leq \sum_{j=0}^k C_k^j = 2^k,$$

випливає нерівність

$$\xi \neq 0 : \quad |\xi^k F^{(m)}[\varphi](\xi)| \leq c_k c_m,$$

причому $c_k \leq cA^k k^k$. Оскільки, за доведеним раніше, у функції $F^{(m)}[\varphi]$ в точці $\xi = 0$ існують скінченні односторонні границі, то

$$\sup_{\xi \in \mathbb{R}\setminus\{0\}} |\xi^k F^{(m)}[\varphi](\xi)| \leq c_k c_m < \infty,$$

$$\forall\, \varphi \in \Phi_\gamma, \quad \{k,m\} \subset \mathbb{Z}_+, \quad k \geq m. \qquad (7)$$

6. *Для довільної функції* $\varphi \in \Phi_\gamma$ $\xi^k F^{(m)}[\varphi] \in L_1(\mathbb{R})$, $\{k,m\} \subset \mathbb{Z}_+$, $k \geq m$.

Урахувавши (7), введемо в просторі Ψ_γ структуру зліченно нормованого простору, поклавши

$$\|\varphi\|_p := \sup_{\xi \in \mathbb{R}\setminus\{0\}} \left\{ \sum_{k=0}^{p} |\xi|^k |D_\xi^k \varphi(\xi)| \right\},$$

$$\varphi \in \Psi_\gamma, \quad p \in \mathbb{Z}_+.$$

Очевидно, що $\|\varphi\|_0 \leq \|\varphi\|_1 \leq ... \leq \|\varphi\|_p \leq ....$ Через Ψ_p позначимо поповнення простору Ψ_γ за нормою $\|\cdot\|_p$. При цьому $\Psi_0 \supset \Psi_1 \supset ... \supset \Psi_p \supset ...$, вкладення $\Psi_{p+1} \subset \Psi_p$, $p \in \mathbb{Z}_+$, є неперервними, $\Psi_\gamma = \bigcap\limits_{p=0}^{\infty} \Psi_p$. Доведемо, що Ψ_γ — повний зліченно нормований простір. Оскільки $\Psi_\gamma = \bigcap\limits_{p=0}^{\infty} \Psi_p$, то досить встановити (див. [11]), що норми $\|\cdot\|_p$ та $\|\cdot\|_{p+1}$ узгоджені між собою. Врахувавши нерівність $\|\cdot\|_p \leq \|\cdot\|_{p+1}$, доведення властивості узгодженості цих норм зводиться до такого: нехай послідовність $\{\varphi_\nu, \nu \geq 1\} \subset \Psi_\gamma$ фундаментальна за нормою $\|\cdot\|_{p+1}$ і збігається до нуля за нормою $\|\cdot\|_p$, потрібно довести, що дана послідовність збігається до нуля і за нормою $\|\cdot\|_{p+1}$. Однак це твердження випливає з того, що Ψ_{p+1} — банахів простір.

Зауваження 3. *Збіжність послідовності* $\{\varphi_\nu, \nu \geq 1\} \subset \Psi_\gamma$ *у просторі* Ψ_γ *до функції* $\varphi \in \Psi_\gamma$ *можна охарактеризувати ще й так:* $\{\varphi_\nu, \nu \geq 1\} \subset \Psi_\gamma$ *збігається за топологією простору* Ψ_γ *до* $\varphi \in \Psi_\gamma$ *тоді й тільки тоді, коли вона:*

1) обмежена в Ψ_γ, *тобто*

$$\forall\, p \in \mathbb{Z}_+ \;\exists\, c = c_p > 0 \;\forall\, \nu \geq 1:$$

$$\|\varphi_\nu\|_p \leq c_p, \qquad (8)$$

2) для довільного $m \in \mathbb{Z}_+$ *послідовність* $\{D_\xi^m(\varphi_\nu - \varphi), \nu \geq 1\}$ *збігається до нуля рівномірно на кожному компакті* $\mathbb{K} \subset \mathbb{R}$, *який не містить точку 0.*

Справді, необхідність цього твердження очевидна. Доведемо його достатність, припустивши спочатку, що $\varphi = 0$. Зафіксуємо, $p \in \mathbb{Z}_+$ і довільне $\varepsilon > 0$. Врахувавши властивість 6) та умову (8), знайдемо $R = R(\varepsilon) > 0$ таке, що

$$\forall\, \nu \geq 1 \;\; \sum_{m=0}^{p} |\xi|^m |\varphi_\nu^{(m)}(\xi)| < \varepsilon, \quad |\xi| \geq R.$$

Оскільки у функції $D_\xi^m \varphi_\nu, \nu \geq 1$, в точці $\xi = 0$ існують скінченні односторонні границі, то звідси та з умови 2) випливає, що для заданого $\varepsilon > 0$ та m, $0 \leq m \leq p$,

$$\exists\, b_m > 0 \;\exists\, \nu_0 = \nu_0(\varepsilon) \;\forall\, \nu \geq \nu_0:$$

$$\sup_{\substack{\xi: |\xi| \leq R \\ \xi \neq 0}} |\varphi_\nu^{(m)}(\xi)| < \varepsilon b_m.$$

Тоді

$$\sup_{\xi \in \mathbb{R}\setminus\{0\}} \left\{ \sum_{m=0}^{p} |\xi|^m |\varphi_\nu^{(m)}(\xi)| \right\} <$$

$$< \varepsilon(1 + c_p), \quad \forall\, \nu \geq \nu_0,$$

де $c_p = \sum\limits_{m=0}^{p} b_m R^m$. Отже,

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\exists\, \nu \geq \nu_0: \|\varphi_\nu\|_p < \varepsilon(1 + c_p),$$

тобто $\varphi_\nu \to 0$ при $\nu \to \infty$ у просторі Ψ_γ.

Загальний випадок, очевидно, зводиться до попереднього, якщо ми доведемо, що $\|\varphi\|_p \leq c_p$, $p \in \mathbb{Z}_+$, де c_p — стала з нерівності (8). Нехай J — деяке зліченне покриття $\mathbb{R}$ обмеженими множинами, які можуть мати між собою непорожній перетин, $F \in J$, $\alpha = \sup\limits_{\xi \in F} |\xi|$. Внаслідок того, що існують скінченні односторонні границі $\lim\limits_{\xi \to \pm 0} (\varphi_\nu^{(m)}(\xi) - \varphi^{(m)}(\xi))$, $0 \leq m \leq p$,

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\forall\, m: 0 \leq m \leq p \;\exists\, d_m > 0 \;\exists\, \nu_0 = \nu_0(\varepsilon)$$

$$\forall \nu \geq \nu_0: \sup_{\xi \in F, \xi \neq 0} |\varphi_\nu^{(m)}(\xi) - \varphi^{(m)}(\xi)| < \varepsilon d_m.$$

Звідси вже дістаємо, що

$$\forall\, \nu \geq \nu_0: \sup_{\xi \in F, \xi \neq 0} \left\{ \sum_{m=0}^{p} |\xi|^m |\varphi^{(m)}(\xi)| \right\} \leq$$

$$\leq \sup_{\xi\in F,\xi\neq 0}\left\{\sum_{m=0}^{p}|\xi|^m|\varphi_\nu^{(m)}(\xi)-\varphi^{(m)}(\xi)|\right\}+$$

$$+\sup_{\xi\in F,\xi\neq 0}\left\{\sum_{m=0}^{p}|\xi|^m|\varphi_\nu^{(m)}(\xi)|\right\}<$$

$$<\varepsilon\sum_{m=0}^{p}\alpha^m d_m+\|\varphi_\nu\|_p<\tilde{c}_p\varepsilon+c_p.$$

Оскільки $\varepsilon>0$ довільне, то

$$\sup_{\xi\in F,\xi\neq 0}\left\{\sum_{m=0}^{p}|\xi|^m|\varphi_\nu^{(m)}(\xi)|\right\}\leq c_p,$$

де c_p не залежить від F. Далі скористаємось тим, що

$$\|\varphi\|_p=\sup_{\xi\in\mathbb{R}\setminus\{0\}}\left\{\sum_{m=0}^{p}|\xi|^m|\varphi^{(m)}(\xi)|\right\}\leq$$

$$\leq\sup_{\xi\in J,\xi\neq 0}\left\{\sum_{m=0}^{p}|\xi|^m|\varphi^{(m)}(\xi)|\right\}\leq c_p.$$

Отже, $\|\varphi\|_p\leq c_p$.

7. *Перетворення Фур'є неперервно відображає Φ_γ на простір Ψ_γ.*

3. **Псевдодиференціальні оператори нескінченного порядку в просторі Φ_γ, побудовані за негладкими символами.** Нехай $a:\mathbb{R}\to[0,+\infty)$ неперервна однорідна порядку $\gamma\in(1,+\infty)\setminus\{2,3,4,...\}$ функція, тобто $a(\lambda\xi)=\lambda^\gamma a(\xi)$, $\lambda>0$, яка:

1) нескінченно диференційовна при $\xi\neq 0$;

2) похідні функції a задовольняють нерівності

$$\forall\, k\in\mathbb{N}\ \exists\, c_k>0\ \forall\,\xi\in\mathbb{R}\setminus\{0\}:$$

$$|a^{(k)}(\xi)|\leq c_k|\xi|^{\gamma-k},$$

причому послідовність $\{c_k,k\geq 1\}$ задовольняє умову:

$$\exists\,\tilde{c}>0\ \exists\,\tilde{A}>0\ \forall\, k\in\mathbb{N}:\ c_k\leq\tilde{c}\tilde{A}^k k^k;$$

3) існують сталі $c_0,\tilde{c}_0>0,\delta\geq\gamma$ такі, що

$$c_0|\xi|^\gamma\leq a(\xi)\leq\tilde{c}_0(1+|\xi|^\delta),\quad \xi\in\mathbb{R}.$$

Метою цього пункту є побудова псевдодиференціального оператора нескінченного порядку вигляду $\sum\limits_{k=0}^{\infty}b_kA^k$, $b_k=\mathrm{const}$, $\forall\, k\in\mathbb{Z}_+$, $A\varphi=F^{-1}[aF[\varphi]]$, $\varphi\in\Phi_\gamma$, символом якого є негладка в точці 0 функція.

Зауваження 4. *Зазначимо, що якщо в умові 3) вважати $\delta=\gamma$, то, як випливає з результатів, наведених у [10], оператор A збігається з гіперсингулярним інтегралом порядку γ з певною характеристикою Ω, тобто*

$$(A\varphi)(x)=$$

$$=d^{-1}\int\limits_{\mathbb{R}}\Omega\left(\frac{h}{|h|}\right)(\Delta_h^l\varphi)(x)|h|^{-(1+\gamma)}dh,\varphi\in\Phi_\gamma,$$

де $x\in\mathbb{R}$, параметр $l>\gamma$, $l\in\mathbb{N}$, d — деяка стала, залежна від l,γ; $\Omega\in L_1((-1;1))$; величина

$$(\Delta_h^l\varphi)(x):=\sum_{k=0}^{l}(-1)^kC_l^k\varphi(x-kh)$$

називається скінченною нецентрованою різницею порядку l функції φ з кроком h і центром у точці x. Якщо $a(\xi)=|\xi|^\gamma$, то A трактується як оператор Лапласа степеня $\gamma/2$.

Нехай $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_nx^n$, $x\in\mathbb{R}$, — функція, яка допускає аналітичне продовження у всю комплексну площину й задовольняє умови:

А) $\exists\, d_0>0\ \forall\, x\in\mathbb{R}: f(x)\geq d_0|x|$;

Б) $\forall\,\alpha\in\mathbb{Z}_+\ \exists\, p_\alpha\in\mathbb{N}\ \exists\, b_\alpha>0\ \forall\,\xi\in\mathbb{R}:$ $|D_\xi^\alpha f(\xi)|\leq b_\alpha(1+|\xi|)^{p_\alpha}$;

В) $\forall\,\varepsilon>0\ \exists\, c_\varepsilon>0\ \forall\, z=\xi+iy\in\mathbb{C}:$ $|f(z)|\leq b_0c_\varepsilon(1+|\xi|)^{p_0}e^{\varepsilon|y|^{1/\delta}}$

(тут δ — стала з умови 3), p_0 — стала з умови Б)).

Зазначимо, що з умови Б) випливає той факт, що функція f є мультиплікатором у просторі Φ_γ.

Говоритимемо, що *в просторі Φ_γ задано псевдодиференціальний оператор нескінченного порядку $f(A):=\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_nA^n$, якщо для довільної основної функції $\varphi\in\Phi_\gamma$ ряд*

$$(f(A)\varphi)(x):=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(A^n\varphi)(x)$$

зображає деяку основну функцію з простору Φ_γ.

Теорема. *Якщо функція* f *задовольняє умови Б), В), то в просторі* Φ_γ *визначений і є неперервним псевдодиференціальний оператор нескінченного порядку* $f(A) \equiv A_f$.

Доведення. Нехай $\varphi \in \Phi_\gamma$,

$$\psi(x) := (f(A)\varphi)(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (A^n \varphi)(x) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} c_n (F^{-1}[a(\xi) F[\varphi](\xi)])^n (x) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} c_n F^{-1}[a^n(\xi) F[\varphi](\xi)](x).$$

Доведемо, що $\psi \in \Phi_\gamma$. Із властивостей перетворення Фур'є (прямого та оберненого) випливає, що для доведення твердження досить показати, що $F[\psi] \in \Psi_\gamma$. Запишемо (поки що формально) співвідношення

$$F[\psi](\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n a^n(\xi) F[\varphi](\xi) =$$

$$= f(a(\xi)) F[\varphi](\xi). \tag{9}$$

Передусім доведемо, що $f(a(\xi))$ — мультиплікатор у просторі Ψ_γ (звідси буде випливати також, що a^n є мультиплікатором у просторі Ψ_γ при кожному $n \in \mathbb{N}$). Для цього скористаємось формулою Фаа де Бруно диференціювання складеної функції:

$$\xi \neq 0: \quad \frac{d^s}{d\xi^s} f(a(\xi)) = \sum_{m=1}^{s} \frac{d^m}{da^m} f(a) \times$$

$$\times \sum_{m}^{s} \frac{s!}{m_1! \ldots m_l!} \left(\frac{1}{1!} \frac{d}{d\xi} a(\xi) \right)^{m_1} \ldots \left(\frac{1}{l!} \frac{d^l}{d\xi^l} a(\xi) \right)^{m_l}$$

(тут знак суми поширюється на всі розв'язки в цілих невід'ємних числах рівняння $s = m_1 + 2m_2 + \ldots + lm_l$, $m = m_1 + \ldots + m_n$). Урахувавши умови, які задовольняють функції f та a, знайдемо, що

$$\xi \neq 0: \quad \left| \frac{d^s}{d\xi^s} f(a(\xi)) \right| \leq \sum_{m=1}^{s} b_m (1 + |a(\xi)|)^{p_m} \times$$

$$\times \sum_{m}^{s} \frac{s!}{m_1! \ldots m_l!} c_1^{m_1} \left(\frac{c_2}{2!} \right)^{m_2} \ldots \left(\frac{c_l}{l!} \right)^{m_l} \times$$

$$\times (|\xi|^{\gamma-1})^{m_1} (|\xi|^{\gamma-2})^{m_2} \ldots (|\xi|^{\gamma-l})^{m_l}.$$

Зазначимо, що

$$\frac{c_j}{j!} \leq \frac{\tilde{c} \tilde{A}^j j^j}{j^j e^{-j} \sqrt{2\pi j}} \leq \tilde{c} (\tilde{A} e)^j, \quad 0 \leq j \leq l.$$

Тоді

$$c_1^{m_1} \left(\frac{c_2}{2!} \right)^{m_2} \ldots \left(\frac{c_l}{l!} \right)^{m_l} \leq$$

$$\leq e^{-m_1} \tilde{c}^{m_1 + \ldots + m_l} (\tilde{A} e)^{m_1 + \ldots + m_n} \leq (\tilde{c} \tilde{A} e)^m,$$

$$(|\xi|^{\gamma-1})^{m_1} \ldots (|\xi|^{\gamma-l})^{m_l} =$$

$$= |\xi|^{(m_1 + \ldots + m_n)\gamma - (m_1 + 2m_2 + \ldots + lm_l)} = |\xi|^{m\gamma - s}.$$

Отже,

$$\xi \neq 0: \quad \left| \frac{d^s}{d\xi^s} f(a(\xi)) \right| \leq$$

$$\leq s!(2e)^s \sum_{m=1}^{s} b_m (1 + \tilde{c}_0 + \tilde{c}_0 |\xi|^\delta)^{p_m} (\tilde{c} \tilde{A} e)^m |\xi|^{m\gamma - s}. \tag{10}$$

Якщо $|\xi| < 1$, $\xi \neq 0$, тоді

$$\left| \frac{d^s}{d\xi^s} f(a(\xi)) \right| \leq \alpha_s |\xi|^{-s}, \tag{11}$$

де

$$\alpha_s = s!(1 + 2\tilde{c}_0)^{\tilde{p}_s} (2e)^s \cdot \sum_{m=1}^{s} b_m (\tilde{c} \tilde{A} e)^m,$$

$$\tilde{p}_s = \max\{p_1, \ldots, p_s\}.$$

Якщо ж $|\xi| \geq 1$, то нерівності (10) набувають вигляду:

$$\left| \frac{d^s}{d\xi^s} f(a(\xi)) \right| \leq \alpha_s |\xi|^{\delta \tilde{p}_s + s\gamma - s} \leq$$

$$\leq \alpha_s |\xi|^{\delta \tilde{p}_s + s[\gamma]} = \alpha_s |\xi|^{\delta_s}, \tag{12}$$

де $\delta_s = \delta \tilde{p}_s + s[\gamma]$.

Далі розглянемо випадок, коли $|\xi| < 1$, $\xi \neq 0$, і оцінимо вираз

$$\xi \neq 0: \quad \sum_{k=0}^{p} |\xi|^k |D_\xi^k (f(a(\xi)) \tilde{\varphi}(\xi))|, \quad \forall \tilde{\varphi} \in \Psi_\gamma.$$

Урахувавши (11), знайдемо, що для $\xi \neq 0$, $|\xi| < 1$

$$\sum_{k=0}^{p} |\xi|^k |D_\xi^k (f(a(\xi))\tilde{\varphi}(\xi))| \leq$$

$$\leq \sum_{k=0}^{p} |\xi|^k \sum_{s=0}^{k} C_k^s |D_\xi^s f(a(\xi))| \cdot |D_\xi^{k-s} \tilde{\varphi}(\xi)| \leq$$

$$\leq \sum_{k=0}^{p} |\xi|^k \sum_{s=0}^{k} C_k^s \frac{\alpha_s}{|\xi|^s} \cdot \frac{c_{k-s}^2}{|\xi|^{k-s}} =$$

$$= \sum_{k=0}^{p} \sum_{s=0}^{k} C_k^s \alpha_s c_{k-s}^2 = c_p. \tag{13}$$

Тут ми скористались тим, що $\tilde{\varphi} \in \Psi_\gamma$, тобто для довільного $\omega \in \mathbb{Z}_+$ такого, що $\omega \geq k - s$, справджується нерівність

$$\xi \neq 0: \quad |D_\xi^{k-s} \tilde{\varphi}(\xi)| \leq \frac{c_\omega c_{k-s}}{|\xi|^\omega}. \tag{14}$$

Якщо покласти в (14) $\omega = k - s$, то прийдемо до нерівностей (13). Якщо ж $|\xi| \geq 1$, то з урахуванням (12) маємо, що

$$\sum_{k=0}^{p} |\xi|^k |D_\xi^k (f(a(\xi))\tilde{\varphi}(\xi))| \leq$$

$$\leq \sum_{k=0}^{p} |\xi|^k \sum_{s=0}^{k} C_k^s |\xi|^{\delta_s} |D_\xi^{k-s} \tilde{\varphi}(\xi)| \leq$$

$$\leq \sum_{k=0}^{p} \sum_{s=0}^{k} C_k^s \alpha_s |\xi|^{k+\delta_s} |D_\xi^{k-s} \tilde{\varphi}(\xi)|.$$

У нерівності (14) покладемо $\omega = k + \delta_s > k - s$. Тоді

$$|D_\xi^{k-s} \tilde{\varphi}(\xi)| \leq \frac{c_{k+\delta_s} c_{k-s}}{|\xi|^{k+\delta_s}}.$$

Врахувавши ці нерівності, знайдемо, що для $\xi : |\xi| \geq 1$ справджуються оцінки

$$\sum_{k=0}^{p} |\xi|^k |D_\xi^k (f(a(\xi))\tilde{\varphi}(\xi))| \leq$$

$$\leq \sum_{k=0}^{p} \sum_{s=0}^{k} C_k^s \alpha_s c_{k+\delta_s} c_{k-s} = c_p'. \tag{15}$$

Із обмежень на функції f, a та $\tilde{\varphi}$ $\left(\lim\limits_{\xi \to \pm 0} \tilde{\varphi}^{(k)}(\xi) < \infty, \ \forall k \in \mathbb{Z}_+ \right)$ випливає також, що $\lim\limits_{\xi \pm 0} \xi^k D_\xi^k (f(a(\xi))\tilde{\varphi}(\xi)) < \infty$. Звідси та з оцінок (13), (15) дістаємо, що

$$\forall p \in \mathbb{Z}_+ \ \exists L_p > 0 : \ \|f(a)\tilde{\varphi}\|_p \leq L_p < \infty.$$

Це означає, що $f(a)\tilde{\varphi} \in \Psi_\gamma$, якщо $\tilde{\varphi} \in \Psi_\gamma$, тобто операція $\tilde{\varphi} \to f(a)\tilde{\varphi}$ визначена в просторі Ψ_γ. Вона є також неперервною в цьому просторі. Справді, нехай послідовність $\{\tilde{\varphi}_n, n \geq 1\} \subset \Psi_\gamma$ збігається до нуля в просторі Ψ_γ, тобто

$$\forall p \in \mathbb{Z}_+ \ \exists c_p > 0 \ \forall n \geq 1 : \ \|\tilde{\varphi}_n\|_p \leq c_p,$$

і для кожного $\nu \in \mathbb{Z}_+$ послідовність $\{D_\xi^\nu \tilde{\varphi}_n, n \geq 1\}$ збігається до нуля рівномірно на кожному компакті $\mathbb{K} \subset \mathbb{R}$, який не містить точку 0, тобто

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \ \forall n \geq n_0 :$$

$$|D_\xi^\nu \tilde{\varphi}_n(\xi)| < \varepsilon, \quad \forall \xi \in \mathbb{K} \subset \mathbb{R}. \tag{16}$$

Аналогічно тому, як це було зроблено при доведенні твердження $f(a)\tilde{\varphi} \in \Psi_\gamma$, якщо $\tilde{\varphi} \in \Psi_\gamma$, переконуємося в тому, що

$$\forall p \in \mathbb{Z}_+ \ \exists \tilde{c}_p > 0 \ \forall n \geq 1 : \ \|f(a)\tilde{\varphi}_n\|_p \leq \tilde{c}_p. \tag{17}$$

За допомогою нерівностей (11), (12), (16) та з урахуванням того, що для $\xi \in \mathbb{K}$ (точка $0 \notin \mathbb{K}$) знайдуться сталі $d_1, d_2 > 0$ такі, що $d_1 \leq |\xi| \leq d_2$, встановлюємо нерівність

$$|D_\xi^\nu (f(a(\xi))\tilde{\varphi}_n(\xi))| \leq c_\nu \varepsilon, \quad \forall n \geq n_0.$$

Звідси та з (17) випливає відповідне твердження, тобто операція $\tilde{\varphi} \to f(a)\tilde{\varphi}$, $\forall \tilde{\varphi} \in \Psi_\gamma$ є неперервною в Ψ_γ, а $f(a)$ — мультиплікатор у цьому просторі. Урахувавши цей факт, з (9) дістаємо, що $F[\psi] \in \Psi_\gamma$.

Таким чином, залишається обгрунтувати коректність проведених у співвідношенні (9) перетворень. Для цього досить довести, що

$$r_{n,\varphi}(\xi) := \sum_{k=n+1}^{\infty} c_k a^k(\xi) F[\varphi](\xi) \to 0, \quad n \to \infty,$$

у просторі Ψ_γ, тобто

$$\forall\, p \in \mathbb{Z}_+ : \ \|r_{n,\varphi}\|_p \to 0, \quad n \to \infty.$$

За означенням $\|\cdot\|_p$ маємо, що

$$\|r_{n,\varphi}\|_p = \sup_{\xi\in\mathbb{R}\setminus\{0\}} \left\{ \sum_{m=0}^{p} |\xi|^m |D_\xi^m r_{n,\varphi}(\xi)| \right\}.$$

Запишемо (поки що формально) співвідношення:

$$L_{m,n}(\xi) := |\xi|^m |D_\xi^m r_{n,\varphi}(\xi)| =$$

$$= |\xi|^m \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} c_k D_\xi^m (a^k(\xi) F[\varphi](\xi)) \right| \le$$

$$\le |\xi|^m \sum_{k=n+1}^{\infty} c_k \sum_{l=0}^{m} C_m^l |D_\xi^l a^k(\xi)| \cdot |D_\xi^{m-l} F[\varphi](\xi)|,$$

$$\xi \neq 0.$$

Оцінимо вираз $|D_\xi^l a^k(\xi)|$ при $\xi \neq 0$ за допомогою формули Фаа де Бруно диференціювання складеної функції. Міркуючи аналогічно тому, як це було зроблено при оцінці похідної $D_\xi^s f(a(\xi))$, $\xi \neq 0$, знаходимо, що

$$|D_\xi^l a^k(\xi)| \le \sum_{i=1}^{l} |D_a^i a^k(\xi)| \times$$

$$\times \sum_{\substack{i_1+\ldots+i_\alpha=1 \\ i_1+2i_2+\ldots+\alpha i_\alpha=l}} \frac{l!}{i_1!\ldots i_\alpha!} \left| \left(\frac{1}{1!} D_\xi^1 a(\xi) \right)^{i_1} \times \right.$$

$$\left. \times \ldots \times \left(\frac{1}{i_\alpha!} D_\xi^\alpha a(\xi) \right)^{i_\alpha} \right| \le$$

$$\le l!(2e)^l \sum_{i=1}^{l} \frac{k!}{(k-i)!} a^{k-i}(\xi) (\tilde{c}\tilde{A}e)^i |\xi|^{i\gamma - l} \le$$

$$\le \tilde{c}_0^k l!(2e)^l \sum_{i=1}^{l} \frac{k!}{(k-i)!} \tilde{c}_0^{-i} (\tilde{c}\tilde{A}e)^i |\xi|^{\delta(k-i)+i\gamma-l}.$$

Далі вважаємо, що $|\xi| \ge 1$. Тоді

$$|D_\xi^l a^k(\xi)| \le \tilde{\tilde{c}}_0^{\,k} d_l |\xi|^{\delta_k + l_\gamma}, \quad \tilde{\tilde{c}}_0 = 2\tilde{c}_0,$$

$$d_l = l!(2e)^l \sum_{i=1}^{l} i! \tilde{c}_0^{-i} (\tilde{c}\tilde{A}e)^i \tag{18}$$

(тут враховано, що $\dfrac{k!}{(k-i)!} = \dfrac{k!i!}{(k-i)!i!} \le 2^k i!$).

Нехай

$$|D_\xi^{l_0} F[\varphi](\xi)| =$$

$$= \max\{|F[\varphi](\xi)|, |D_\xi^1 F[\varphi](\xi)|, \ldots, |D_\xi^m F[\varphi](\xi)|\},$$

$$0 \le l_0 \le m, \quad \xi \neq 0.$$

Тоді

$$L_{m,n}(\xi) \le |\xi|^m \cdot \sum_{k=n+1}^{\infty} c_k \cdot \tilde{\tilde{c}}_0^{\,k} |\xi|^{\delta k} \cdot$$

$$\cdot \sum_{l=0}^{m} C_m^l d_l |\xi|^{l\delta} \cdot |D_\xi^{l_0} F[\varphi](\xi)| \le$$

$$\le \omega_m \cdot \sum_{k=n+1}^{\infty} c_k \tilde{\tilde{c}}_0^{\,k} |\xi|^{m+\delta k + m[\gamma+1]} \cdot |D_\xi^l F[\varphi](\xi)|,$$

де $\omega_m = \sum_{l=0}^{m} C_m^l d_l$. Оскільки $F[\varphi] \in \Psi_\gamma$, то

$$\xi \neq 0 : \quad |D_\xi^{l_0} F[\varphi](\xi)| \le \frac{c_\nu c_{l_0}}{|\xi|^\nu},$$

$$\forall \nu : \quad \nu \ge l_0, \quad c_\nu \le c_0 B^\nu \nu^\nu. \tag{19}$$

Порівняємо числа $\Delta(k) := m + \delta + m(1 + [\gamma]) = \delta k + m(2 + [\gamma])$ та m. Якщо $n = 0$, то k набуває значень, починаючи від 1. Отже, $\Delta(1) = m + \delta + m(1 + [\gamma]) > m$. Звідси випливає, що $\Delta(k) > m$ для всіх $k \ge n+1$, $n \in \mathbb{Z}_+$, тобто $\Delta(k) > m \ge l_0$. У зв'язку з цим покладемо в (19) $\nu = \delta k + m(2 + [\gamma])$. Таким чином, маємо нерівність

$$L_{m,n}(\xi) \le \omega_m c_{l_0} \sum_{k=n+1}^{\infty} c_k \tilde{\tilde{c}}_0^{\,k} c_{\delta k + m(2+[\gamma])},$$

$$|\xi| \ge 1.$$

Покладемо $\alpha = m(2 + [\gamma])$. Тоді $c_{\delta k+\alpha}$ оцінюється наступним чином:

$$c_{\delta k+\alpha} \le c_0' \tilde{B}^k k^{k\delta},$$

$$c_0' = c_0 B^\alpha (\delta + \alpha)^\alpha, \quad \tilde{B} = B^\delta (\delta + \alpha)^\delta e^\alpha.$$

Врахувавши останні нерівності, знайдемо, що

$$L_{m,n}(\xi) \le \omega_m c_0' c_{l_0} \sum_{k=n+1}^{\infty} c_k B_1^k k^{k\delta},$$

$$B_1 = \approx{c}_0\, B, \quad |\xi| \geq 1.$$

Коефіцієнти Тейлора c_k, $k \in \mathbb{Z}_+$, функції f обчислюються за формулою Коші

$$c_k = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_R} \frac{f(z)}{z^{k+1}} dz, \quad z = \xi + iy,$$

де Γ_R — коло радіуса R з центром у точці $z_0 = 0$. Звідси та з умов Б), В), які задовольняє функція f, дістаємо нерівності

$$|c_k| \leq \frac{1}{2\pi} \max_{z\in\Gamma_R} \frac{|f(z)|}{|z|^{k+1}} \oint\limits_{\Gamma_R} ds \leq$$

$$\leq b_\varepsilon \inf_R (R^{-k}(1+R)^{p_0} e^{\varepsilon R^{1/\delta}}), \quad b_\varepsilon = b_0 c_\varepsilon.$$

За допомогою методів диференціального числення безпосередньо знаходимо, що

$$\inf_R (R^{-k}(1+R)^{p_0} e^{\varepsilon R^{1/\delta}}) =$$

$$= \sum_{l=0}^{p_0} \frac{\varepsilon^{k-l} e^{\delta(k-l)}}{[\delta(k-l)]^{\delta(k-l)}}, \quad k > p_0.$$

Звідси вже дістаємо, що

$$|c_k| \leq D_0 F^k \varepsilon^k \frac{1}{k^{k\delta}},$$

$$D_0 = b_\varepsilon \delta^{\delta p_0} \sum_{l=0}^{p_0} (\varepsilon e)^{-l}, \quad F = \delta^{-\delta} e^{\delta(2+p_0)}.$$

Отже, якщо $|\xi| \geq 1$, то для функції $L_{m,n}(\xi)$ справджується оцінка

$$L_{m,n}(\xi) \leq L_1 \sum_{k=n+1}^{\infty} B_2^k \varepsilon^k, \tag{20}$$

де $L_1 = \omega_m c_0' c_{l_0} D_0$, $B_2 = B_1 F$. Покладемо в (20) $\varepsilon = (2B_2)^{-1}$. Тоді

$$L_{m,n}(\xi) \leq \frac{L_1}{2^n} < +\infty, \quad \forall\, \xi : |\xi| \geq 1.$$

Якщо $|\xi| < 1$, $\xi \neq 0$, то в цьому випадку

$$|D_\xi^l a^k(\xi)| \leq$$

$$\leq \approx{c}_0^{\,k} d_l \frac{|\xi|^{k-i+i\gamma}}{|\xi|^l} \leq \frac{\approx{c}_0^{\,k} d_l}{|\xi|^l}$$

(d_l, $\approx{c}_0$ — сталі з нерівності (18)). Отже,

$$L_{m,n}(\xi) \leq$$

$$\leq |\xi|^m \sum_{k=n+1}^{\infty} c_k \approx{c}_0^{\,k} \sum_{l=0}^{m} C_m^l d_l \frac{1}{|\xi|^l} |D_\xi^{m-l} F[\varphi](\xi)|,$$

$$\xi \neq 0.$$

Далі скористаємось тим, що

$$\xi \neq 0: \quad |D_\xi^{m-l} F[\varphi](\xi)| \leq \frac{c_{m-l}}{|\xi|^{m-l}},$$

$$\lim_{\xi\to\pm 0} D_\xi^{m-l} F[\varphi](\xi) < \infty.$$

Таким чином,

$$\xi \neq 0: \quad L_{m,n}(\xi) \leq \omega_m \sum_{k=n+1}^{\infty} c_k \approx{c}_0^{\,k},$$

$$\omega_m = \sum_{l=0}^{m} C_m^l d_l c_{m-l}.$$

Залишається ще один раз скористатись оцінками коефіцієнтів Тейлора c_k функції f; в результаті одержимо, що для $\xi \neq 0$, $|\xi| < 1$

$$L_{m,n}(\xi) \leq L_2 \sum_{k=n+1}^{\infty} B_3^k \varepsilon^k, \tag{21}$$

де $L_2 = \omega_m D_0$, $B_3 = F \approx{c}_0$. Поклавши в (21) $\varepsilon = (2B_3)^{-1}$, прийдемо до нерівності

$$\sup_{\substack{\xi:|\xi|<1\\ \xi\neq 0}} L_{m,n}(\xi) \leq \frac{\tilde{L}_2}{2^n} < \infty.$$

Отже,

$$\sup_{\xi\in\mathbb{R}\setminus\{0\}} L_{m,n}(\xi) \leq \frac{L}{2^n},$$

$$\forall\, n \geq 1, \quad L = L(m) > 0.$$

Звідси вже випливає, що

$$\|r_{n,\varphi}\|_p = \sup_{\xi\in\mathbb{R}\setminus\{0\}} \sum_{m=0}^{p} L_{m,n}(\xi) \leq$$

$$\leq \sum_{m=0}^{p} \frac{L(m)}{2^n} = \frac{L_p}{2^n} < \infty, \quad \forall\, n \geq 1.$$

Таким чином, $r_{n,\varphi} \in \Psi_\gamma$ для кожного n і $r_{n,\varphi} \to 0$ при $n \to \infty$ у просторі Ψ_γ. Цим доведено, що в просторі Φ_γ оператор A_f визначений. Він є також неперервним у просторі Φ_γ.

Справді, нехай $\{\varphi_n, n \geq 1\} \subset \Phi_\gamma$, $\varphi_n \to 0$ при $n \to \infty$ у просторі Φ_γ. Тоді із співвідношення (9) випливає, що

$$F[A_f \varphi_n] = f(a) F[\varphi_n] \to 0, \quad n \to \infty,$$

у просторі Φ_γ. Теорема доведена.

Зауваження 5. *Із (9) випливає, що*

$$A_f \varphi = F^{-1}[f(a) F[\varphi]], \quad \forall\, \varphi \in \Phi_\gamma,$$

тобто A_f — псевдодиференціальний оператор, побудований за символом $f(a)$.

Зазначимо ще, що наведені вище результати є правильними й у випадку n незалежних змінних.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Кочубей А.Н.* Задача Коши для эволюционных уравнений дробного порядка // Дифференц. уравнения.— 1989.— Т.25, N 8.— С.1359—1368.

2. Фракталы в физике: Труды VI Международного симпозиума по фракталам в физике (МЦТФ, Триест, Италия, 9—12 июля 1985 г.).— М.: Мир, 1988.— 672 с.

3. *Федер Е.* Фракталы.— М.: Мир, 1991.— 254 с.

4. *Турбин А.Ф., Працевитый Н.В.* Фрактальные множества, функции, распределения.— К.: Наук. думка, 1992.— 205 с.

5. *Эйдельман С.Д., Дринь Я.М.* Необходимые и достаточные условия стабилизации решений задачи Коши для параболических псевдодифференциальных уравнений // Приближенные методы математического анализа.— К., 1974.— С.60—69.

6. *Федорюк М.В.* Асимптотика функции Грина псевдодифференциального параболического уравнения // Дифференц. уравнения.— 1978.— Т.14, N 7.— С.1296—1301.

7. *Дрінь Я.М.* Вивчення одного класу параболічних псевдодиференціальних операторів у просторах гельдерових функцій // Доповіді АН УРСР. Сер.А.— 1974.— N 1.— С.19—21.

8. *Городецький В.В., Літовченко В.А.* Задача Коші для параболічних псевдодиференціальних рівнянь у просторах узагальнених функцій типу S' // Доповіді АН України.— 1992.— N 10.— С.6—9.

9. *Городецький В.В., Літовченко В.А.* Про слабку стабілізацію розв'язків задачі Коші для параболічних псевдодиференціальних рівнянь // Інтегральні перетворення та їх застосування до крайових задач: Зб. наук. праць.— К.: Ін-т математики НАН України, 1995.— Вип.8.— С.191—195.

10. *Городецький В.В.* Граничні властивості гладких у шарі розв'язків рівнянь параболічного типу.— Чернівці: Рута, 1998.— 225 с.

11. *Гельфанд И.М., Шилов Г.Е.* Пространства основных и обобщенных функций.— М.: Физматгиз, 1958.— 307 с.

Надійшла до редколегії 10.01.2005