УДК 519.21; 621.314

©2005 р. І.В. Вернигора, Л.І. Ясинська, В.К. Ясинський

Чернівецький національний університет ім. Ю. Федьковича, Чернівці

ВЛАСТИВОСТІ РОЗВ'ЯЗКІВ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ ВИПАДКОВОЇ СТРУКТУРИ

У роботі досліджується питання існування марковської властивості оператору зсуву розв'язку диференціально-функціонального рівняння з марковськими параметрами (ДФР МП), які є розв'язком стохастичного диференціально-функціонального рівняння з пуассонівськими перемиканнями (СДФР ПП), так званих динамічних систем випадкової структури. Вивчається асимптотична стохастична стійкість розвязків лінійних ДФР МП, зв'язок цієї стійкості з експоненціальною p-стійкістю у лінійному стаціонарному випадку, необхідні та достатні умови експоненціональної p-стійкості таких рівнянь та питання стійкості для квазілінійних ДФР МП.

This paper aims to discuss the question of existence properties of Markov of the operator of shift of decisions of the differential-functional equation with Markov type parameters (DFE MP) which are the decision stochastic is investigated the differential-functional equation with Puasson switchings (SDFE PS), so-called dynamic systems casual structures. Stochastic stability of decisions is studied asymptotical linear DFE MP, communication of this stability with exponential p-stability in the linear stationary case, necessary and sufficient conditions exponential p-stability of such equations and a question of stability for quasilinear DFE MP.

Проблемам стійкості стохастичних динамічних систем, які описуються стохастичними диференціальними рівняннями (СДР), стохастичними диференціально-функціональними рівняннями (СДФР) та інтегро-функціональними рівняннями (СІФР), присвячена значна кількість фундаментальних монографій та праць, перелік яких можна знайти у книгах Й.І. Гіхмана, А.В. Скорохода [4], [5], І.Я. Каца[8], Є.Ф. Царкова [16], [17] та ін. Поведінка розв'язку у складних динамічних системах, що записується у вигляді диференціально-функціональних рівнянь із марковськими параметрами (ДФР МП) вивчена у монографіях [8], [11], а також у наведених там посиланнях.

1. Постановка задачі Нехай на ймовірнісному просторі $(\Omega, F, \underset{\sim}{P})$ з потоком σ-алгебр $\{F_t, t \geq 0\}$, $F_t \subset F$ стохастична динамічна система задана сукупністю ДФР

$$dx(t) = f(t, x_t, y_t)dt, \, \forall\, t \geq 0, \qquad (1)$$

за початковою умовою

$$x(t) = \psi(t, \omega), \, \forall\, t \in [-h, 0]; \qquad (2)$$

та СДФР ПП за А.В. Скороходом [4], [5], [15]

$$dy(t) = a(t, y_t)dt + b(t, y_t)dw(t) + \\ + \int\limits_{\underset{\sim}{Z}} c(t, y_t, z)\tilde{\nu}(dz, dt), \, \forall\, t \geq 0 \qquad (3)$$

за початковою умовою

$$y(t) = \varphi(t, \omega), \, \forall\, t \in [-h, 0]. \qquad (4)$$

Тут $\{x(t) \equiv x(t, \omega)\} \subset R^n$, $x_t \equiv \{x(t+\theta), -h \leq \theta \leq 0\} \in D_n \equiv D_n([-h, 0])$ — простору Скорохода [5] неперервних справа n-вимірних функцій $\psi(t) \in R^n$, що мають лівосторонні границі; $\{y(t) \equiv y(t, \omega)\} \subset R^m$, $y_t \equiv \{y(t+\theta), -h \leq \theta \leq 0\} \in D_m \equiv D_m([-h, 0])$ — простору Скорохода [5] неперервних справа m-вимірних функцій $\varphi(t) \in R^m$, що мають лівосторонні границі; $f : R_+ \times D_n \times D_m \to R^n$ — неперервний за сукупністю функціонал, який має неперервну рівномірно обмежену похідну Фреше [15]

$D_x f(t, x_t, \varphi)$ за другим аргументом для довільного $\varphi \in D_n$.

Як відомо [14], відображення f задовольняє рівномірну глобальну умову Ліпшиця для довільних $\psi_1, \psi_2 \in D_n$, $\forall t \geq 0$ та $\varphi \in D_m$

$$|f(t, \psi_1, \varphi) - f(t, \psi_2, \varphi), \leq K\|\psi_1 - \psi_2\|_0, \quad (5)$$

де

$$\|\psi\|_0 \equiv |\psi(0)|^2 + \int\limits_{-h}^{0} |\psi(\theta)|^2 d\theta, \ ([17]), \quad (6_1)$$

або

$$\|\psi\|_{D_n} \equiv \sup_{-h \leq \theta \leq 0} |\psi(\theta)|, \quad (6_2)$$

а також умову лінійності росту для $\forall t \geq 0$, $\psi \in D_n$, $\varphi \in D_m$ і деякому $K > 0$

$$|f(t, \psi, \varphi)| \leq K(1 + \|\psi\|). \quad (7)$$

Зауважимо, що $\|\cdot\|$ надалі позначатиме одну з норм (6_1) або (6_2).

Далі функціонали: $a : R_+ \times D_m \to R^m$; $b : R_+ \times D_m \to M_n(R^m)$ — матриця функціоналів розмірності $m \times m$; $c : R_+ \times D_m \times D_n \times \underset{\sim}{Z} \to R^m$; $w(t) \equiv w(t, \omega)$ — m-вимірний стандартний процес броунівського руху; $\tilde{\nu}(dz, dt) \equiv \nu(dz, dt) - \Pi(z)dt$ — центрована скалярна пуассонова міра [4], [5], причому $\tilde{\nu}$ не залежить від компонент $w(t)$, початкових випадкових процесів $\psi(t)$ і $\varphi(t)$ [5].

Припустимо, що функціонали a, b та c неперервні за сукупністю перших двох аргументів, причому функціонал c є вимірним за просторовою змінною z третього аргументу y і задовольняють умову Ліпшиця $\forall \varphi_1, \varphi_2 \in D_m$ та $t \geq 0$

$$|a(t, \varphi_1) - a(t, \varphi_2)|^2 + \|b(t, \varphi_1) - b(t, \varphi_2)\|^2 + $$
$$+ \int\limits_{\underset{\sim}{Z}} |c(t, \varphi_1, z) - c(t, \varphi_2), z|^2 \Pi(dz) \leq$$
$$\leq L\|\varphi_1 - \varphi_2\|_0, \quad (8)$$

де $\|b\|$ — норма функціоналу [15], а також умову рівномірної обмеженості за часом $t \geq 0$ для довільного $\varphi \in D_m$

$$|a(t, \varphi)|^2 + \|b(t, \varphi)\|^2 + \int\limits_{\underset{\sim}{Z}} |c(t, \varphi, z)|^2 \Pi(dz) \leq$$
$$\leq L\|\varphi\|_0. \quad (9)$$

Позначимо через $y(t, s, \varphi)$ — розв'язок задачі Коші (3), (4), який побудовано за початковою умовою φ в момент часу $s \geq 0$ $(t \geq s \geq 0)$.

Тоді сильний розв'язок $y(t, s, \varphi)\, \forall\, t \geq s \geq 0$ задачі Коші (3), (4) при виконанні вищесформульованих умов (8), (9) існує з точністю до стохастичної еквівалентності [4], [5], [13], [17].

Припущення. Накладемо умову на коефіцієнти рівнянь (1), (2); (3), (4):

$$a(t, 0) \equiv c(t, 0, z) \equiv 0_m, \ b(t, 0) \equiv 0_m \times m;$$
$$f(t, 0, 0) \equiv 0_n, \quad (10)$$

де $0_m, 0_n$ позначено відповідно m-вимірний та n-вимірний нульовий вектор; а $0_m \times m$ — нульову матрицю розмірності $m \times m$.

Умова (10) дає можливість вивчати стійкість тривіального розв'язку $x(t) \equiv 0_n$, $y(t) \equiv 0_m$ динамічної системи (1)-(4).

2. Марковська властивість операторів зсуву розв'язків динамічних систем випадкової структури. Якщо виконуються умови (8), (9), то існує для кожного $s \geq 0$ та $\varphi \in D_m$ на $[s, \infty)$ єдиний із точністю до стохастичної еквівалентності розв'язок $y(t, s, \varphi)$ задачі Коші (3), (4) [6], [12], [13], [17].

Вивчимо властивості оператора зсуву [12]

$$Y_s^t \varphi \equiv y_t(s, \varphi). \quad (11)$$

Довільному $\varphi \in D_m$ для $t \geq s \geq 0$ оператор зсуву Y_s^t ставить у відповідність випадкову величину (ВВ) $y_t(s, \varphi) \equiv \{y(t + \theta, s, \varphi), \theta \in [-h, 0]\} \in D_m$, яка є вимірною відносно σ-алгебри $F_s^t(w) \bigvee F_s^t(\tilde{\nu}) \bigvee F_s^t(\varphi)$ (надалі це означає σ-алгебру, яка містить у собі σ-алгебри $F_s^t(w), F_s^t(\tilde{\nu}), F_s^t(\varphi)$).

Міра, що визначена цією ВВ $y_t(s, \varphi)$ на σ-алгебрі $\mathcal{L}(D_0)$ борелевих підмножин простору Скорохода D_m з нормою (6_1), являє собою зліченно адитивну функцію елементів $A \in \mathcal{L}(D_0)$

$$p(s, \varphi, t, A) \equiv P(Y_s^t \varphi \in A) \equiv P(y_t(s, \varphi) \in A), \quad (12)$$

яка залежить від $t \geq s \geq 0$ та $\varphi \in D_m$.

Сім'ю $p(s, \varphi, t, A)$ назвемо перехідною функцією для розв'язків задачі Коші (3), (4).

Лема 1. *Оператор зсуву $Y_s^t \varphi$ має еволюційну властивість*

$$Y_\tau^t Y_s^\tau \varphi = Y_s^t \varphi \tag{13}$$

для $\forall \varphi \in D_m$ *та довільних* $t \geq \tau \geq s \geq 0$.

Це випливає з факту існування розв'язку $y(t, s, \varphi) \in R^m$ задачі Коші (3), (4) з точністю до стохастичної еквівалентності [7], [17]. Дійсно, в силу єдиності сильного розв'язку рівність (3) є очевидним наслідком того, що для всіх $t \geq \tau \geq s \geq 0$ випадкові процеси $y(t, s, \varphi)$ і $y(t, \tau, y_\tau(s, \varphi))$ виступають розв'язками одного рівняння (3) та задовольняють для $t = \tau$ однакові початкові умови (4).

Має місце наступна властивість [12].

Лема 2. *Для обмеженого неперервного випадкового функціоналу за першим аргументом $v(\varphi, \omega) : D_m \times \Omega \to R_+$ зі скінченним математичним сподіванням $Ev(\varphi, \omega) < \infty$ та ВВ $\xi(\omega)$, яка є $\mathcal{L}$-вимірною ($\mathcal{L} \subset \mathcal{F}$), виконується рівність*

$$E\left\{v(\xi(\omega), \omega)/\mathcal{L}\right\} = E\left\{v(\varphi, \omega)/\mathcal{L}\right\}|_\varphi = \xi(\omega). \tag{14}$$

Доведення. 1) Спочатку доведемо лему 2 для рівномірно обмежених v. Нехай $\forall \varphi \in D_0$, $\omega \in \Omega$ з ймовірністю одиниця виконується нерівність

$$0 \leq v(\xi(\omega), \omega) \leq q,\ q \in N/\infty$$

.

Але простір Скорохода D_0 має властивість сепарабельності [2]. Тоді існує зліченне покриття

$$\{S_{1/q}(y_k^{(q)})\},\ k \in N/\infty$$

цього простору D_0 кулями

$$S_{1/q}(y_k^{(q)}) \equiv \{\varphi \in D_0 \,|\, \|\varphi - y_k^{(q)}\|_{D0} < \frac{1}{q}\}. \tag{15}$$

Розглянемо наступні множини:

$$A_k^q \equiv \xi^{-1}(S_{1/q}(y_k^{(q)}));\ B_l^q \equiv A_l^q;$$

$$B_k^q \equiv A_k^q \,/\, \bigcup_{l=1}^{k-1} B_l^q;\ \forall k \geq 2. \tag{16}$$

Зауважимо, що $\forall q \in N/\infty$ справедлива рівність $\Omega = \bigcup_{k=1}^\infty B_k^q$, для $\forall k \neq l$ маємо $B_k^q \bigcap B_l^q = \emptyset$.

Визначимо ВВ $\xi_q(\omega) \equiv y_k^{(q)} \in D_0$ $\omega \in B_k^q, k \in N$.

Очевидно, що за побудовою

$$\|\xi_q(\omega) - \xi(\omega)\|_{D0} < \frac{1}{q}.$$

Нехай $A \in \mathcal{L} \subset \mathcal{F}$. Тоді для $B_k^q \in \mathcal{L} \subset \mathcal{F}$ та для довільного $k \in N$ легко одержати за означенням умовного математичного сподівання ланцюжок співвідношень

$$\int_A E\left\{v(\xi_q, \omega)/\mathcal{L}\right\} dP = \int_A v(\varphi_q, \omega) dP =$$

$$= \sum_{k=1}^\infty \int_{A \bigcap B_k^q} v(\xi_q, \omega) dP = \sum_{k=1}^\infty \int_{A \bigcap B_k^q} v(y_k^{(q)}, \omega) dP =$$

$$= \sum_{k=1}^\infty \int_{A \bigcap B_k^q} E\left\{v(y_k^{(q)}, \omega)/\mathcal{L}\right\} dP =$$

$$= \sum_{k=1}^\infty \int_{A \bigcap B_k^q} E\left\{v(\varphi, \omega)/\mathcal{L}\right\}|_{\varphi = \xi_q} dP =$$

$$\int_A E\left\{v(\varphi, \omega)/\mathcal{L}\right\}|_{\varphi = \xi_q} dP. \tag{17}$$

Одержана рівність (17) доводить (15) для неперервних рівномірно обмежених $v(\varphi, \omega)$, бо за теоремою Лебега маємо

$$\lim_{q \to \infty} \int_A |v(\xi_q(\omega), \omega) - v(\xi(\omega), \omega)| dP = 0.$$

2) Нехай $v(\varphi, \omega)$ нерівномірно обмежене відображення $v_n \equiv \frac{nv}{n+v}$, $\forall n \in N$, для якого $\lim_{n \to \infty} v_n(\varphi, \omega) = v(\varphi, \omega)$ для довільного $\varphi \in D_0$ з ймовірністю одиниця. Зауважимо, що $v_n(\varphi, \omega) \leq n$ та $v_n(\varphi, \omega) \leq v(\varphi, \omega) \, \forall \varphi \in D_0$, $\forall \omega \in \Omega$.

Але для $v_n(\varphi,\omega)$, $\forall\, n\in N$ за п.1 виконується (14).

Тоді за теоремою про монотонну збіжність [15] $\forall\, A\in\mathcal{L}$ та $\varphi\in D_0$ маємо

$$\int\limits_A v(\xi_q(\omega),\omega)dP=\lim_{n\to\infty}\int\limits_A v(\xi_n(\omega),\omega)dP=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\int\limits_A E\left\{v_n(\varphi,\omega)/\mathcal{L}\right\}|_{\varphi=\xi(\omega)}dP=$$

$$=\int\limits_A E\left\{v(\varphi,\omega)|_{\varphi=\xi(\omega)}\right\}dP$$

що й доводить лему 2. □

Позначимо через $\sigma(D_0)$ — σ-алгебру борелевих множин D_0; $C(D_0)$ — простір неперервних відображень D_0 в R^1; $G(D_0)$ — простір неперервних обмежених відображень D_0 в R^1; $C_a(\sigma(D_0))$ — простір зліченно-адитивних мір на $\sigma(D_0)$.

Теорема 1. *Якщо виконуються глобальна умова Ліпшиця (8) й умова рівномірної обмеженості за часом $t\geq 0$ для коефіцієнтів СДФР ПП (3) за початковою умовою (4), то перехідна ймовірність (12) має наступні властивості:*

i) $p(s,\varphi,t,A)$ є елементами $_a(\sigma(D_0))$ для $t\geq s\geq 0$, $\forall\varphi\in D_0$;

ii) $p(s,\varphi,t,A)$ має так звану феллерову властивість, а саме: якщо $t\geq s\geq 0$ та $\forall f\in C(D_0)$

$$Ef(Y_s^t\varphi)\equiv\int\limits_{D_0}p(s,\varphi,t,dy)f(y),\qquad(18)$$

то вона неперервна за φ, причому $Ef(Y_s^t\varphi)\geq 0$ для $f\geq 0$;

iii) $p(s,\varphi,t,A)$ вимірна за φ для довільних $t\geq s\geq 0$ та $A\in{}_a(\sigma(D_0))$;

IVi) $p(s,\varphi,t,A)$ задовольняє рівняння Чепмена-Колмогорова

$$p(s,\varphi,t,A)=\int\limits_{D_0}p(s,\varphi,t,dy)p(\tau,y,t,A)\quad(19)$$

для довільних $t\geq\tau\geq s\geq 0$, $\forall\,\varphi\in D_0$ та $\forall\, A\in{}_a(\sigma(D_0))$;

Vi) $p(s,\varphi,t,A)$ має властивість стохастичної неперервності

$$\lim_{t\to s}p(s,t,\varphi,S_\varepsilon(\varphi))=\begin{cases}1, & \text{для } \varphi\in S_\varepsilon(\varphi)\\ 0, & \text{для } \varphi\in S_\varepsilon(\varphi),\end{cases}\qquad(20)$$

де $S_\varepsilon(\varphi)\equiv\{\forall\,\varphi\in D_0\,|\,\|\varphi\|_n<\varepsilon\}$.

Доведення. i) Перша властивість є тривіальним наслідком визначення перехідної ймовірності (12) через ймовірність, яка має зліченно-адитивну властивість [10].

ii) Феллерова властивість $p(s,\varphi,t,A)$ випливає з основних нерівностей для розв'язків $y(t,s,\varphi)$ СДФР (3), (4) (леми 2.1-2.3, [12], С. 181-184). Дійсно, нехай $\lim\limits_{n\to\infty}\|\varphi_n-\varphi\|_0=0$. Тоді з наслідку 2.1 ([12], С.183) маємо

$$\lim_{n\to\infty}E\|Y_s^t\varphi_n-y_s^t\varphi\|_0=0,$$

а за теоремою Лебега випливає

$$\lim_{n\to\infty}Ef(y_s^t\varphi_n)=E\{p\lim_{n\to\infty}f(Y_s^t\varphi_n)\}=$$

$$=Ef(p\lim_{n\to\infty}Y_s^t\varphi_n)=Ef(Y_s^t\varphi).$$

iii) Вимірність за φ перехідної ймовірності $p(s,\varphi,t,A)$ для $\forall A\in\sigma(D_0)$ та $\forall t\geq s\geq 0$ випливає з (19) та можливості апроксимації ймовірносної міри $\forall A\in\sigma(D_0)$

$$E\chi_A(Y_s^t\varphi)=\int\limits_{D_0}p(s,\varphi,t,dy)\chi_A(y)\equiv$$

$$\equiv P\{Y_s^t\varphi\in A\}$$

послідовністю $Ef_n(Y_s^t\varphi)$, де $\{f_n,\,n\geq 1\}$ — монотонна послідовність, норми елементів яких обмежені одиницею ([12], С.198).

IVi) Для доведення (19) слід скористатися лемами 1 та 2. Нехай $v(\varphi,\omega)\equiv f(Y_s^t\varphi)$, де $f\in C(D_0)$. Тоді маємо

$$Ef(Y_s^t\varphi)=Ef(Y_\tau^tY_s^\tau\varphi)=Ev(Y_s^\tau\varphi,\omega)=$$

$$=E\{E\{v(Y_s^\tau\varphi,\omega)\,|\,\mathcal{F}_s^\tau(dw)\bigvee\mathcal{F}_s^\tau(\tilde{\nu})\}\}=$$

$$=E\{Ev(z,\omega)\,|_{z=Y_s^\tau\varphi\}}=$$

$$=E\{Ef(Y_\tau^tz)\,|_{z=Y_s^\tau\varphi\}}=$$

$$= E\{\int\limits_{D_0} p(\tau, Y_s^\tau \varphi, t, dy) f(y)\} =$$

$$= \int\limits_{D_0} f(y) \int\limits_{D_0} p(s, \varphi, t, dz) p(\tau, z, t, dy).$$

Знову треба побудувати послідовність невід'ємних монотонних функцій $\{f_n, n \geq 1\} \subset C(D_0)$, як це зроблено в п. iii).

Vi) Доведення стохастичної неперервності випливає зі співвідношення ([16], С.78-79)

$$\lim_{t \to s} P\{\|y_t(s, \varphi) - \varphi\|_0 \geq \varepsilon\} = 0. \square$$

Теорема 2. *Нехай виконано умови (8), (9) для рівняння (3) за початковими умовами (4). Тоді для довільних* $t \geq t_1 \geq s \geq 0$, $A \in \sigma(D_0)$ *та* $\varphi \in D_0$ *оператор зсуву на розв'язках* $Y_s^t \varphi \equiv y_t(s, \varphi)$, $\forall\, t \geq s$ *має марківську властивість*

$$P\{y_t(s, \varphi) \in A \,|\, \mathcal{F}_s^{t_1}(d\omega) \bigvee \mathcal{F}_s^{t_1}(\tilde{\nu})\} =$$

$$= p(t_1, y_{t_1}(s, \varphi), t, A) \equiv$$

$$\equiv P\{y_t(t_1, y_{t_1}(s, \varphi)) \in A\}, \qquad (21)$$

де $p(s, \varphi, t, A)$ *— перехідна функція, що визначена (12).*

Це означає, що оператор зсуву $Y_s^t \varphi \equiv y_t(s, \varphi)$ *має властивість, що "майбутнє в момент часу* t_1 *залежить тільки від теперешнього моменту часу* $t_1 < t$, *а не залежить від минулого в моменти часу* $0 \leq s \leq t_1 \leq t$*".*

Доведення. Враховуючи рівність

$$P\{y_t(s, \varphi) \in A \,|\, \mathcal{F}_s^{t_1}\} = E\{\chi_A(y_t(s, \varphi)) \,|\, \mathcal{F}_s^{t_1}\},$$

достатньо довести для $\forall f \in C(D_0)$

$$E\{f(y_t(s, \varphi)) \,|\, \mathcal{F}_s^{t_1}\} =$$

$$= \int\limits_{D_0} p(t_1, y_{t_1}(s, \varphi), t, dy) f(y). \qquad (22)$$

За лемою 1 та 2 можна записати

$$E\{f(y_t(s, \varphi)) \,|\, \mathcal{F}_s^{t_1}\} = E\{f(Y_{t_1}^t Y_s^{t_1} \varphi) \,|\, \mathcal{F}_s^{t_1}\} =$$

$$= E\{f(Y_{t_1}^t \psi)\} \,|_{\psi = y_{t_1}(s, \varphi)}.$$

Далі слід застосувати формулу (18), що й доведе твердження (21). $\square$

Теорема 3. *Нехай випадковий процес* $\psi(t, \omega)$, $t \in [-h, 0]$, *як початкова умова (2) для ДФР (1), не залежить від оператора зсуву* $Y_s^t \varphi \equiv y_t(s, \varphi)$, $0 \leq s \leq t$ *як розв'язку СДФР (3) за початковою умовою (4).*

Тоді випадковий процес $\{X_s^t \psi, Y_s^t \varphi\}$, $\forall t \geq 0$ *є марковським процесом.*

Доведення. Якщо $0 \leq s < t$, то випадкові величини $X_s^t \varphi \equiv x_t(s, \varphi)$ однозначно визначаються значеннями $x(s)$ та $y(t_1)$ для фіксованих s, t_1, t так, що $0 \leq s \leq t_1 \leq t$. Але $Y_s^t \varphi$ є марковським процесом ([17], С.136–139), тоді $Y_s^{t_1} \varphi$, $0 \leq s \leq t_1$ не залежить від $Y_s^{t_2} \varphi$, $0 < t_2 < s$ для фіксованого $y(s)$.

Таким чином, для фіксованої пари $\{X_0^s \psi, Y_0^s \varphi\}$, $\forall t \geq 0$ випадкова величина $\{X_s^t \psi, Y_s^t \varphi\}$ не залежить від $\{X_s^{t_2} \psi, Y_s^{t_2} \varphi\}$, $t_2 \leq s$. А це означає, що пара операторів зсуву $\{X_{t-h}^t \psi, Y_{t-h}^t \varphi\}$ є за означенням марковським процесом.

Одержані властивості дають можливість обгрунтувати другий метод Ляпунова для більш узагальнених динамічних систем випадкової структури.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Артемьев В.М.* Теория динамических систем со случайными изменениями структуры.— Минск: Вышейшая школа, 1979.— 246 с.

2. *Биллингсли.* Сходимость вероятностных мер.— М.: Наука, 1977.— 352 с.

3. *Вернигора І.В., Ясинська Л.І., Ясинський В.К.* Дослідження стійкості диференціально-функціональних рівнянь з марковськими перемиканнями методом функціоналів Ляпунова-Красовського // Вісник Київського університету. Вип.4. Фізико-математичні науки.— Київ, 2002.— С.139—155

4. *Гихман И.И., Скороход А.В.* Стохастические дифференциальные уравнения.— Киев: Наук. думка, 1968.— 354 с.

5. *Гихман И.И., Скороход А.В.* Стохастические дифференциальные уравнения и их применения.— Киев: Наук. думка, 1982.— 612 с.

6. *Дынкин Е.Б.* Марковские процессы.— М.: Физматгиз, 1969.— 859 с.

7. *Казаков И.Е., Артемьев В.М.* Оптимизация динамических систем случайной структуры.— М.: Наука, 1980.— 382 с.

8. *Кац И.Я.* Метод функций Ляпунова в задачах устойчивости и стабилизации систем случайной структуры.— Екатеринбург: Изд-во Уральской государственной академии путей сообщения, 1998.— 228 с.

9. *Королюк В.С.* Устойчивость автономной динамической системы с быстрыми марковскими переключениями // Укр. мат. журн.— 1991.—**42**, №9.— С.1176—1181.

10. *Королюк В.С., Ясинський В.К.* Курс теорії ймовірностей, випадкових процесів та математичної статистики.— Київ: ТВіМС, 2005.—526 с.

11. *Свердан М.Л., Царьков Е.Ф.* Устойчивость стохастических импульсных систем.— Рига: РТУ, 1994.— 300 с.

12. *Свердан М.Л., Царков Є.Ф., Ясинський В.К.* Стохастичні динамічні системи зі скінченною післядією.— Чернівці: Зелена Буковина, 2000.— 560 с.

13. *Скороход А.В.* Асимптотические методы теории стохастических дифференциальных уравнений.— К.: Наук, думка, 1987.— 328 с.

14. *Хейл Дж.* Теория функционально-дифференциальных уравнений.— М.: Наука, 1986.— 486 с.

15. *Хилле Э., Филлипс Р.* Функциональный анализ и полугруппы.— М.:ИЛ, 1962.— 829 с.

16. *Царьков Е.Ф.* Случайные возмущения функционально-дифференциальных уравнений.— Рига: Зинатне, 1982.— 421 с.

17. *Царьков Е.Ф., Ясинский В.К.* Квазилинейные стохастические дифференциальные уравнения.— Рига: Ориентир, 1992.— 328 с.

Стаття надійшла до редколегії 1.02.2005