УДК 517.95

©2005 р. Г.М. Барабаш [1], С.П. Лавренюк [1], Н.П. Процах [2]

[1] Львівський національний університет ім. Ів. Франка, Львів
[2] Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, Львів

ЗАДАЧА БЕЗ ПОЧАТКОВИХ УМОВ ДЛЯ НАПІВЛІНІЙНОГО УЛЬТРАПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ

У праці розглянуто задачу без початкових умов для напівлінійного ультрапараболічного рівняння

$$u_t - \lambda(x,\, y,\, t)\, u_y - \sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij}(x,y,t)\, u_{x_i})_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x,y,t)\, u_{x_i} + \\ + c(x,y,t)\, u + g(x,t,u) = f(x,y,t).$$

Отримані умови існування та єдиності узагальненого розв'язку задачі у класі функцій із експоненціальним зростанням при $t \to -\infty$.

The problem without inital conditions for semilinear ultraparabolic equation

$$u_t - \lambda(x,\, y,\, t)\, u_y - \sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij}(x,y,t)\, u_{x_i})_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x,y,t)\, u_{x_i} + \\ + c(x,y,t)\, u + g(x,t,u) = f(x,y,t)$$

is researched in this paper. Conditions of existence and of uniqueness of general solution of this problem are obtained in class of functions with exponential behaviour if $t \to -\infty$.

Ультрапараболічні рівняння виникають у теорії ймовірностей, при описанні випадкових рухів, дослідженні марківських дифузійних процесів, у фізиці та інших галузях науки [1, 2].

Дослідженню задачі Коші для ультрапараболічних рівнянь другого й вищих порядків присвячено праці [3 – 7]. У більшості з них для доведення розв'язності задачі Коші побудовано фундаментальні розв'язки та використано їх властивості.

У працях [8 – 11] вивчено розв'язність мішаних задач для лінійних, у [12] – для квазілінійних, а в [13, 14] – для нелінійних ультрапараболічних рівнянь в обмежених областях. У праці [15] досліджено мішану задачу для напівлінійного ультрапараболічного рівняння в необмеженій за просторовими змінними області. Задачу без початкових умов для лінійних ультрапараболічних рівнянь розглянуто в [16, 17], а для напівлінійного ультрапараболічного рівняння – [18]. Зазначимо, що у [18] досліджено випадок, коли клас коректності задачі не залежить від поведінки розв'язку при $t \to -\infty$.

На відміну від [18], у цій праці розглянуто напівлінійне ультрапараболічне рівняння, для якого клас коректності задачі без початкових умов визначено експоненціальним зростанням розв'язку при $t \to -\infty$.

Нехай D - обмежена область в $\mathbb{R}^n$, з межею $\partial D \in C^1$; $\Omega = D \times (0,\ y_0)$, де $y_0 > 0$; $Q_\tau = \Omega \times (-\infty, \tau)$; $Q_{t_1,t_2} = \Omega \times (t_1, t_2)$, $t_1 < t_2$; $\Omega_\tau = Q_T \cap \{t = \tau\}$; $S_\tau = \partial D \times (0,\ y_0) \times (-\infty, \tau)$; $S_{t_1,t_2} = \partial D \times (0,\ y_0) \times (t_1, t_2)$, $t_1 < t_2$.

Позначимо через $L^r_{\rm loc}(\overline{Q}_T)$ (відповідно $H^1_{\rm loc}(\overline{Q}_T)$) простір функцій, які належать до простору $L^r(Q_{t_1,T})$ ($H^1(Q_{t_1,T})$) для довільного $t_1 \in (-\infty, T]$, де $1 \leqslant r \leqslant +\infty$, $T < +\infty$.

Розглянемо в області Q_T, де $T < +\infty$, рівняння

$$u_t - \lambda(x,\, y,\, t)\, u_y - \\ -\sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij}(x,y,t)\, u_{x_i})_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x,y,t)\, u_{x_i} + \\ + c(x,y,t)\, u + g(x,t,u) = f(x,y,t) \qquad (1)$$

з крайовими умовами

$$u|_{S_T} = 0, \qquad u(x,\, y_0, t) = 0. \qquad (2)$$

Припустимо, що коефіцієнти рівняння (1) задовольняють відповідно умови (Λ), (A), (B), (C), (G), (P), якщо:

(Λ): $\lambda \in C(\overline{Q}_T),\ \lambda_y \in L^{\infty}_{\rm loc}(\overline{Q}_T)$; $\lambda(x,\, y,\, t) > 0$ для всіх $(x,\, y,\, t) \in D \times [0,\, y_0] \times (-\infty,\, T)$; $\lambda_y(x,\, y,\, t) \geqslant \lambda_1$ – const для майже всіх $(x,\, y,\, t) \in Q_T$;

(A): $a_{ij} = a_{ji} \in C(\overline{Q}_T),\ \{i,\, j\} \subset \{1,\, ...,\, n\}$;

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,y,t)\, \xi_i\, \xi_j \geqslant a_0 \sum_{i=1}^{n} \xi^2,$$

a_0 — const$>$0 для майже всіх $(x,\, y,\, t) \in Q_T$ і для всіх $\xi \in \mathbb{R}^n$;

(B): $\{b_i,\, b_{iy}\} \subset L^{\infty}(Q_T),\ i \in \{1,\, ...,\, n\}$;

(C): $\{c,\, c_y\} \subset L^{\infty}_{\rm loc}(\overline{Q}_T)$; $c(x,\, y,\, t) \geqslant c_0$ для майже всіх $(x,y,t) \in Q_T,\ c_0 -$ const;

(G): функція $(x,\, t) \to g(x,\, t,\, \xi)$ є вимірною в $D \times (-\infty, T)$ для всіх $\xi \in \mathbb{R}$; функція $\xi \to g(x,\, t,\, \xi)$ є неперервно диференційовною для майже всіх $(x,\, t) \in D \times (-\infty,\, T)$; для майже всіх $(x,\, t) \in D \times (-\infty,\, T)$ і для всіх $\xi \in \mathbb{R}$ виконуються нерівності $|g(x,\, t,\, \xi)| \leqslant g_0 |\xi|^{p(x,t)-1}$, $|g_\xi(x,\, t,\, \xi)| \leqslant g_0 |\xi|^{p(x,t)-2},\ g_\xi(x,\, t,\, \xi) \geqslant 0$, де g_0 - додатна стала;

(P): $p \in L^{\infty}(D \times (-\infty, T))$; $1 < p_1 = \operatorname{ess\,inf} p(x,t) \leqslant \leqslant \operatorname{ess\,sup} p(x,t) = p_2 \leqslant 2$.

Позначимо

$$b_0 = \operatorname*{ess\,sup}_{Q_T} \sum_{i=1}^{n} b_i^2(x,y,t).$$

Нехай U, V, S і H – деякі гільбертові простори, причому $V \subset H$ щільно й неперервно. Розглянемо неперервну білінійну форму $a(u,v)$, визначену на $U \times V$. Нехай оператор $\gamma \in L(V,S)$ задовольняє умови:

γ відображає V на S;

ядро V_0 оператора γ є щільним у H.

Для довільного фіксованого $u \in U$ функціонал $v \to a(u,v)$ є неперервним на V_0. Цей лінійний функціонал над V_0 позначатимемо через $A\,u$:

$Au \in V_0'$ є функціоналом, який визначається співвідношенням $(Au, v) = a(u,v)$, коли $v \in V_0$.

Тоді оператор A, який кожному елементу $u \in U$ ставить у відповідність $Au \in V_0'$, є неперервним лінійним оператором з U у V_0', тобто $A \in L(U, V_0')$. Зазначимо, що очевидними є вкладення

$$V_0 \subset H = H' \subset V_0'.$$

Визначимо підпростір

$$U(A) = \{u:\ u \in U,\ Au \in H\}$$

з нормою

$$||u||_{U(A)} = (||u||^2_U + ||Au||^2_H)^{1/2}.$$

Для побудови класу коректності задачі (1), (2) доведемо таку допоміжну лему.

Лема 1. *Нехай U, V, H, S – гільбертові простори, $V \subset U \subset H$, причому $U \subset H$ щільно й неперервно, $V \subset H$ щільно й неперервно. Крім того, нехай $\gamma \in L(V,S)$, $\gamma(V) = S$, $V_0 \overset{def}{=} \ker\gamma \subset H$ щільно й неперервно, і білінійна форма $a(u,v)$ є неперервною на $U \times V$. Тоді існує єдиний оператор θ, який відображає $U(A)$ у S', такий, що є правильною формула Гріна*

$$a(u,v) = (Au, v) + \langle \theta u, \gamma v\rangle \ \forall u \in U(A), \forall v \in V,$$

де $(\cdot,\, \cdot)$ скалярний добуток, визначений на $H \times H$, а $\langle \cdot,\, \cdot\rangle$ – співвідношення двоїстості, визначене на $S' \times S$.

Доведення. Згідно з теоремою 1.8 ([19], с.66) простір $U(A)$ з нормою $||u||_{U(A)}$ є гільбертовим. Крім того,

$$A \in L(U, V_0') \cap L(U(A),\ H).$$

Нехай u пробігає простір $U(A)$. Оскільки $Au \in H$, то білінійна форма (Au, v) є неперервною на $U(A)\times H$. Тому ця форма є неперервною і на $U(A)\times V$. З іншого боку, форма $a(u,v)$ неперервна на $U(A)\times V \subset U\times V$. Отже, білінійна форма

$$(Bu,v) = a(u,v) - (Au,v)$$

є також неперервною на $U(A)\times V$. Тому вона визначає лінійний неперервний оператор $B: U(A)\to V'$. Оскільки $(Bu,v)=0\ \forall v\in V_0$ (за означенням оператора A), то B відображає $U(A)$ на

$$V_0^{\perp} = \{f\in V':\ (f,v)=0\ \forall v\in V_0\}.$$

Оскільки оператор γ відображає V на S, то спряжений оператор γ' є ізоморфізмом із S' на його замкнену область значень ([19], теорема 1.14, с.70). При цьому, оскільки V_0 — ядро оператора γ, то областю значень γ' буде $V_0^{\perp}$. Позначимо через μ відображення, обернене до γ', яке відображає $V_0^{\perp}$ на S', і вважатимемо, що $\theta=\mu B$. Тоді $\theta:\ U(A)\to S'$. Оскільки $Bu\in V_0^{\perp}$, то

$$Bu = \gamma'\mu\, Bu. \tag{3}$$

Звідси для довільного $v\in V$

$$a(u,v)-(Au,v)=(Bu,v)=\langle\gamma'\theta u,v\rangle=\langle\theta u,\gamma v\rangle.$$

Доведемо, що оператор θ визначено однозначно. Справді, якщо існує деякий оператор θ_1, для якого виконується (3), то елемент $Bu=\gamma'\theta_1 u$ повинен належати до $V_0^{\perp}$. Звідси

$$\theta u = \mu Bu = \mu\gamma'\theta_1 u = \theta_1 u \quad \forall u\in U(A).$$

Отже, $\theta=\theta_1$ і лему доведено.

Зауваження 1. Зазначимо, що лема 1 є незначною модифікацією теореми 2.1 [19, с.188].

Введемо такі позначення:

$$B_0(Q_{t_1,t_2}) = \{u(x,y,t):\ \{u, u_{x_i}\}\subset L^2(Q_{t_1,t_2}),\ i\subset\{1,\ldots,n\},\ u|_{S_{t_1,t_2}}=0\},$$

$$B_1(Q_{t_1,t_2}) = \{v(x,y,t):\ v\in H^1(Q_{t_1,t_2}),\ v|_{S_{t_1,t_2}}=0\},$$

$$B_2(Q_{t_1,t_2}) = \{w(x,y,t):\ \{w,\ w_y,\ w_{x_i}\}\subset L^2(Q_{t_1,t_2}),\ i\subset\{1,\ldots,n\},\ w|_{S_{t_1,t_2}}=0,\ w(x,y_0,t)=0\}.$$

Означення. *Функцію u назвемо узагальненим розв'язком задачі (1),(2), якщо вона задовольняє включення*

$$u\in C((-\infty,T];\ L^2(\Omega)),\ u\in B_0(Q_{t_1,T}),$$

$$u(\cdot,0,\cdot)\in L^2(D\times(t_1,T))$$

для довільного $t_1\in(-\infty,T)$ і рівність

$$\int\limits_{\Omega_t} u\,v|_{t=t_1}^{t=t_2}\,dx\,dy + \int\limits_{Q_{t_1,t_2}}[-u\,(v_t-\lambda\,v_y)+ +\lambda_y u\,v + \sum_{i,j=1}^n a_{ij}u_{x_i}v_{x_j} + \sum_{i=1}^n b_i u_{x_i}v+ +c\,u\,v + g(x,\,t,\,u)\,v]\,dx\,dy\,dt+ + \int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_D \lambda(x,0,t)u(x,0,t)v(x,0,t)\,dx\,dt = = \int\limits_{Q_{t_1,t_2}} f(x,\,y,\,t)\,v\,dx\,dy\,dt \tag{4}$$

для довільних $t_1<t_2$, $\{t_1,t_2\}\subset(-\infty,T]$ і будь-якої функції $v\in B_1(Q_{t_1,t_2})$.

Розглянемо рівняння (1) з крайовими умовами (2) і початковою умовою

$$u(x,y,t_0)=0 \tag{5}$$

в області $Q_{t_0,T}$, де $t_0\in(-\infty,\,T)$.

Доведено (див. працю [20]), що за умов (Λ), (A), (B), (C), (G), (P), а також умови

(F): $\{f,\ f_y\}\subset L^2_{\mathrm{loc}}(\overline{Q}_T)$

існує єдина функція $u^{(t_0)}(x,\,y,\,t)$, яка задовольняє включення

$$u^{(t_0)}\in B_2(Q_{t_0,T})\cap C([t_0,T];\ L^2(\Omega))$$

і рівність

$$\int\limits_{Q_{t_0,T}}\Big[-u^{(t_0)}\,v_t - \lambda\,u_y^{(t_0)}v + \sum_{i,j=1}^n a_{ij}\,u_{x_i}^{(t_0)}v_{x_j} + +\sum_{i=1}^n b_i u_{x_i}^{(t_0)}v + c\,u^{(t_0)}\,v + g(x,\,t,\,u^{(t_0)})\times$$

$$\times v\Big]\,dx\,dy\,dt = \int\limits_{Q_{t_0,T}} f\,v\,dx\,dy\,dt \qquad (6)$$

для довільної функції $v\in B_0(Q_{t_0,T})$ такої, що $v_t\in L^2(Q_{t_0,T})$ і $v(x,y,T)=0$. Нехай

$$f_{t_0}(x,\,y,\,t)=\begin{cases} f(x,\,y,\,t), & (x,\,y,\,t)\in Q_{t_0,T},\\ 0, & (x,\,y,\,t)\in Q_{-\infty,t_0}.\end{cases}$$

Продовжимо функцію $u^{(t_0)}$ нулем на область $Q_{-\infty,\,t_0}$ і збережемо за продовженою функцією те саме позначення. Тоді на підставі (6) одержимо, що $u^{(t_0)}$ задовольняє рівність

$$\int\limits_{Q_{t_1,T}}\Big[-u^{(t_0)}v_t-\lambda u^{(t_0)}_y v+\sum_{i,j=1}^n a_{ij}\,u^{(t_0)}_{x_i}v_{x_j}+ +\sum_{i=1}^n b_i u^{(t_0)}_{x_i}v+cu^{(t_0)}v+g(x,t,u^{(t_0)})\times \times v\Big]\,dx\,dy\,dt=\int\limits_{Q_{t_1,T}} f\,v\,dx\,dy\,dt \qquad (7)$$

для довільної функції $v\in B_0(Q_{t_1,T})$ такої, що $v_t\in L^2(Q_{t_1,T})$, $v(x,y,T)=0$ і для довільного $t_1\in(-\infty,\,t_0]$.

Лема 2. *Для функції $u^{(t_0)}$ є правильною рівність*

$$\int\limits_{\Omega_t} u^{(t_0)}v\Big|_{t=\tau_1}^{t=\tau_2}dx\,dy+\int\limits_{Q_{\tau_1,\tau_2}}\Big[-u^{(t_0)}v_t- -\lambda\,u^{(t_0)}_y v+\sum_{i,j=1}^n a_{ij}\,u^{(t_0)}_{x_i}v_{x_j}+\sum_{i=1}^n b_i u^{(t_0)}_{x_i}v+ +c\,u^{(t_0)}v+g(x,t,u^{(t_0)})\,v\Big]\;dx\,dy\,dt= =\int\limits_{Q_{\tau_1,\tau_2}} f_{t_0}v\,dx\,dy\,dt \qquad (8)$$

для довільної функції $v\in B_0(Q_{t_1,T})$ такої, що $v_t\in L^2(Q_{t_1,T})$ і для довільних $\{\tau_1,\tau_2\}\subset[t_1,T]$, $\tau_1<\tau_2$, де t_1 – довільне з проміжку $(-\infty,\,t_0]$.

Доведення. Вважатимемо в (7), що $v=(w\,\theta_m)*\rho_k*\rho_k$ для $k>2m$, де θ_m є кусково-лінійною неперервною функцією на проміжку $[t_1,\,T]$, причому $\theta_m(t)=1$ при $\tau_1+\frac{2}{m}<t<\tau_2-\frac{2}{m}$, $\theta_m(t)=0$ при $t<\tau_1+\frac{1}{m}$ $t>\tau_2-\frac{1}{m}$, ρ_k – регуляризуюча послідовність в $D(\mathbb{R})$, $\rho_k(t)=\rho_k(-t)$,

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\rho_k(t)\,dt=1,\quad \operatorname{supp}\rho_k\subset\left[-\frac{1}{k},\ \frac{1}{k}\right],$$

а w є функцією з простору $B_0(Q_{t_1,T})$ такою, що $w_t\in L^2(Q_{t_1,T})$.

Перейшовши в (7) до границі спочатку при $k\to\infty$, а потім при $m\to\infty$, одержимо рівність (8), що й треба було довести.

Зауваження 2. Аналогічно (8) можна довести рівність

$$\frac12\int\limits_{\Omega_t} e^{\mu t}\left[u^{(t_0)}\right]^2\Big|_{t=\tau_1}^{t=\tau_2}dx\,dy+\int\limits_{Q_{\tau_1,\tau_2}} e^{\mu t}[-\lambda u^{(t_0)}_y\times \times u^{(t_0)}+\sum_{i,j=1}^n a_{ij}u^{(t_0)}_{x_i}u^{(t_0)}_{x_j}+\sum_{i=1}^n b_i\,u^{(t_0)}_{x_i}u^{(t_0)}+ +c\,\left[u^{(t_0)}\right]^2-\frac{\mu}{2}\left[u^{(t_0)}\right]^2+g(x,t,u^{(t_0)})\times \times u^{(t_0)}]\,dx\,dy\,dt=\int\limits_{Q_{\tau_1,\tau_2}} e^{\mu t}f_{t_0}u^{(t_0)}dx\,dy\,dt \quad (9)$$

для довільних $\{\tau_1,\tau_2\}\subset(-\infty,T]$, $\tau_1<\tau_2$.

Теорема. *Нехай виконуються умови (Λ), (A), (B), (C), (G), (P) і, крім того,*

$$\int\limits_{Q_T} f^2(x,y,t)e^{\mu t}dx\,dy\,dt<\infty,$$

де μ задовольняє нерівність $2\,c_0+\lambda_1-b_0/(2a_0)-\mu>0$. Тоді існує узагальнений розв'язок задачі(1), (2) з класу функцій $B_{0,loc}(\overline{Q}_T)$ таких, що

$$\lim_{t\to-\infty}\int\limits_{\Omega_t} u^2(x,y,t)e^{\mu t}dx\,dy=0,$$

де $\mu=2\,c_0+\lambda_1-b_0/(2a_0)$, і він у цьому класі єдиний.

Доведення. Нехай t_0 набуває значення $T-1,T-2,T-k,\ \ldots$. Тоді матимемо послідовність функцій $\{u^{(k)}\}$, для кожної з яких виконуються рівності (8). Розглянемо рівності (8) для $u^{(k)}$ і $u^{(s)}$ та віднімемо від однієї іншу. Тоді матимемо рівність

$$\int\limits_{\Omega_t} u^{(k,s)}v\Big|_{t=\tau_1}^{t=\tau_2} dx\,dy + \int\limits_{Q_{\tau_1,\tau_2}} \Big[-u^{(k,s)}v_t - \\ -\lambda\, u_y^{(k,s)}v + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\, u_{x_i}^{(k,s)}v_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i\, u_{x_i}^{(k,s)}v + \\ + c\, u^{(k,s)}v + (g(x,t,u^{(k)}) - g(x,t,u^{(s)}))\times \\ \times v\Big]\, dx\,dy\,dt = \int\limits_{Q_{\tau_1,\tau_2}} (f_k - f_s)v\, dx\,dy\,dt, \quad (10)$$

правильну для довільної функції $v \in B_{0,\mathrm{loc}}(\overline{Q}_T)$ такої, що $v_t \in L^2_{\mathrm{loc}}(\overline{Q}_T)$ і будьяких $\{\tau_1, \tau_2\} \subset (-\infty, T]$, $\tau_1 < \tau_2$, де $u^{(k,s)} = u^{(k)} - u^{(s)}$, а через f_k позначимо функцію f_{T-k}. Як випливає із зауваження 2, рівність (10) буде правильною і для $v = u^{(k,s)}e^{\mu t}$, тобто аналогічно (9) одержимо

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_t} e^{\mu t}(u^{(k,s)})^2\Big|_{t=\tau_1}^{t=\tau_2} dx\,dy + \int\limits_{Q_{\tau_1,\tau_2}} e^{\mu t}\Big[-\lambda u_y^{(k,s)}\times \\ \times u^{(k,s)} + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\, u_{x_i}^{(k,s)}u_{x_j}^{(k,s)} + \sum_{i=1}^{n} b_i\, u_{x_i}^{(k,s)}u^{(k,s)} + \\ + c\,(u^{(k,s)})^2 - \frac{\mu}{2}(u^{(k,s)})^2 + (g(x,t,u^{(k)}) - \\ - g(x,t,u^{(s)}))\, u^{(k,s)}\Big]\, dx\,dy\,dt = \\ = \int\limits_{Q_{\tau_1,\tau_2}} (f_k - f_s)u^{(k,s)}e^{\mu t}dx\,dy\,dt. \qquad (11)$$

Використовуючи умови теореми, перетворимо й оцінимо кожний доданок рівності (11):

$$J_1 \equiv -\int\limits_{Q_{\tau_1,\tau_2}} \lambda\, u_y^{(k,s)}u^{(k,s)}e^{\mu t}dx\,dy\,dt = \frac{1}{2}\times \\ \times \int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}\int\limits_{D} e^{\mu t}\lambda(x,0,t)(u^{(k,s)}(x,0,t))^2 dx\,dt + \\ + \frac{1}{2}\int\limits_{Q_{\tau_1,\tau_2}} \lambda_y(u^{(k,s)})^2 e^{\mu t}dx\,dy\,dt;$$

$$J_2 \equiv \int\limits_{Q_{\tau_1,\tau_2}} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}u_{x_i}^{(k,s)}u_{x_j}^{(k,s)}e^{\mu\, t}dx\,dy\,dt \geqslant \\ \geqslant a_0 \int\limits_{Q_{\tau_1,\tau_2}} \sum_{i=1}^{n}(u_{x_i}^{(k,s)})^2 e^{\mu\, t}dx\,dy\,dt;$$

$$J_3 \equiv \int\limits_{Q_{\tau_1,\tau_2}} \sum_{i=1}^{n} b_i u_{x_i}^{(k,s)}u^{(k,s)}e^{\mu\, t}dx\,dy\,dt \leqslant \\ \leqslant \frac{\delta_1 b_0}{2}\int\limits_{Q_{\tau_1,\tau_2}} \sum_{i=1}^{n}(u_{x_i}^{(k,s)})^2 e^{\mu\, t}dx\,dy\,dt + \\ + \frac{1}{2\delta_1}\int\limits_{Q_{\tau_1,\tau_2}} \sum_{i=1}^{n}(u^{(k,s)})^2 e^{\mu\, t}dx\,dy\,dt,$$

де $\delta_1 > 0$;

$$J_4 \equiv \int\limits_{Q_{\tau_1,\tau_2}} c\,(u^{(k,s)})^2 e^{\mu\, t}dx\,dy\,dt \geqslant \\ \geqslant c_0 \int\limits_{Q_{\tau_1,\tau_2}} (u^{(k,s)})^2 e^{\mu\, t}dx\,dy\,dt;$$

$$J_5 \equiv \int\limits_{Q_{\tau_1,\tau_2}} (g(x,t,u^{(k)}) - g(x,t,u^{(s)}))\times \\ \times u^{(k,s)}e^{\mu\, t}dx\,dy\,dt \geqslant 0;$$

$$J_6 \equiv \int\limits_{Q_{\tau_1,\tau_2}} (f_k - f_s)^2 u^{(k,s)}e^{\mu\, t}dx\,dy\,dt \leqslant \\ \leqslant \frac{\delta_2}{2}\int\limits_{Q_{\tau_1,\tau_2}} (u^{(k,s)})^2 e^{\mu\, t}dx\,dy\,dt + \\ + \frac{1}{2\delta_2}\int\limits_{Q_{\tau_1,\tau_2}} (f_k - f_s)^2 e^{\mu\, t}dx\,dy\,dt,$$

де $\delta_2 > 0$. Крім того, $\lambda_y \geqslant \lambda_1$ майже всюди в Q_T. Тому на підставі оцінок інтегралів $J_1, ..., J_6$ з рівності (11) матимемо нерівність

$$\int\limits_{\Omega} (u^{(k,s)})^2 e^{\mu\, t}\Big|_{t=\tau_1}^{t=\tau_2} dx\,dy + \int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}\int\limits_{D} \lambda(x,\,0,\,t)\times$$

$$\times (u^{(k,s)}(x,\,0,\,t))^2 e^{\mu\, t} dx\, dt + \int\limits_{Q_{\tau_1,\tau_2}} \Big[\Big(\lambda_1 + 2c_0 - \mu - \delta_2 - \frac{1}{\delta_1}\Big) (u^{(k,s)})^2 + (2a_0 - \delta_1 b_0) \sum_{i=1}^{n} (u^{(k,s)}_{x_i})^2\Big]\, e^{\mu\, t} dx\, dy\, dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\delta_2} \int\limits_{Q_{\tau_1,\tau_2}} (f_k - f_s)^2\, e^{\mu\, t} dx\, dy\, dt. \qquad (12)$$

Нехай $k < s$. На підставі умов теореми можемо вибрати числа $\delta_1,\ \delta_2,\ \nu_0 > 0$ так, що виконуватимуться рівності
$\lambda_1 + 2c_0 - \mu - \delta_2 - 1/\delta_1 = \nu_0, \quad 2a_0 - \delta_1 b_0 = \nu_0.$

Спрямувавши в нерівності (12) τ_1 до $-\infty$, одержимо

$$\int\limits_{Q_{\tau_2}} (f_k - f_s)^2\, e^{\mu\, t} dx\, dy\, dt \leqslant \int\limits_{Q_{T-k}} f^2\, e^{\mu\, t} dx\, dy\, dt,$$

$$\int\limits_{\Omega_{\tau_2}} (u^{(k,s)})^2 e^{\mu\,\tau_2} dx dy + \int\limits_{-\infty}^{\tau_2} \int\limits_{D} \lambda(x,\,0,\,t) \times (u^{(k,s)}(x,\,0,\,t))^2 e^{\mu\, t} dx\, dt + \int\limits_{Q_{\tau_2}} \Big[\sum_{i=1}^{n} (u^{(k,s)}_{x_i})^2 + (u^{(k,s)})^2\Big]\, e^{\mu\, t} dx\, dy\, dt \leqslant M_1 \int\limits_{Q_{T-k}} f^2 e^{\mu\, t} dx\, dy\, dt,$$

де стала M_1 не залежить від k і s. Оскільки

$$\int\limits_{Q_T} f^2\, e^{\mu\, t} dx\, dy\, dt < \infty,$$

то для довільного фіксованого $\varepsilon > 0$ існує таке число $k_0 \in \mathbb{N}$, що для всіх $k > k_0$

$$\int\limits_{\Omega_{\tau}} (u^{(k,s)})^2 e^{\mu\,\tau} dx dy + \int\limits_{-\infty}^{T} \int\limits_{D} \lambda(x,\,0,\,t) \times (u^{(k,s)}(x,\,0,\,t))^2 e^{\mu\, t} dx\, dt + \int\limits_{Q_T} \Big[\sum_{i=1}^{n} (u^{(k,s)}_{x_i})^2 + (u^{(k,s)})^2\Big]\, e^{\mu\, t} dx\, dy\, dt < \varepsilon,$$

$\tau \in (-\infty,\ T]$. Отже, існують такі функції u, z , що

$$u^{(k)} \to u \ \text{ в } \ C((-\infty, T]; L^2(\Omega)),$$
$$u^{(k)} \to u \ \text{ в } \ B_{0,\mathrm{loc}}(\overline{Q}_T),$$
$$u^{(k)}(\cdot,\ 0,\ \cdot) \to z \ \text{ в } \ L^2_{\mathrm{loc}}((-\infty, T]; D) \qquad (13)$$

при $k \to \infty$. Звідси на підставі умови (G) матимемо, що $g(x, t, u^{(k)}) \to g(x, t, u)$ майже для всіх $(x, t) \in D \times (-\infty, T]$. Крім того,

$$\int\limits_{\Omega_\tau} u^2 e^{\mu\tau} dx dy + \int\limits_{Q_T} \Big[\sum_{i=1}^{n} u^2_{x_i} + u^2\Big]\, e^{\mu\, t} dx\, dy\, dt \leqslant \leqslant M_2 < \infty$$

для $\tau \in (-\infty, T]$. Тоді, записавши (8) для $u^{(k)}$ і перейшовши до границі при $k \to \infty$, одержимо рівність

$$\int\limits_{\Omega_t} u\, v|_{t=\tau_1}^{t=\tau_2}\, dx\, dy + \int\limits_{\tau_1}^{\tau_2} \int\limits_{D} \lambda(x, 0, t)\, z(x, t) \times v(x, 0, t)\, dx\, dt + \int\limits_{Q_{\tau_1,\tau_2}} \Big[-u v_t + \lambda u v_y + \lambda_y u v + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} u_{x_i} v_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i u_{x_i} v + c\, u\, v + g(x, t, u)\, v\Big]\, dx\, dy\, dt = \int\limits_{Q_{\tau_1,\tau_2}} f\, v\, dx\, dy\, dt, \qquad (14)$$

правильну для довільної функції $v \in B_{1,\mathrm{loc}}(\overline{Q}_T)$ і будь-яких $\{\tau_1, \tau_2\} \subset (-\infty, T]$, $\tau_1 < \tau_2$.

Нехай $\tau_1,\ \tau_2$ – фіксовані, $U = B_0(Q_{\tau_1,\tau_2})$, $V = B_1(Q_{\tau_1,\tau_2})$. Розглянемо на $U \times V$ білінійну форму

$$a(u,\, v) = \int\limits_{Q_{\tau_1,\tau_2}} \Big[-u\, v_t + \lambda\, u\, v_y + \lambda_y u\, v + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} u_{x_i} v_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i u_{x_i} v + c\, u\, v\Big]\, dx\, dy\, dt.$$

Легко перевірити, що форма $a(u,\, v)$ є неперервною на $U \times V$. Нехай лінійний диференціальний оператор A визначено формулою

$$Au \equiv u_t - \lambda\, u_y - \sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij} u_{x_i})_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i u_{x_i} + cu.$$

Очевидно, $A : U \to V^*$. Оскільки для довільного $v \in C_0^\infty(Q_{\tau_1,\tau_2})$, рівність (13) можемо записати у вигляді

$$\int\limits_{Q_{\tau_1,\tau_2}} Au \cdot v\, dx\, dy\, dt = \int\limits_{Q_{\tau_1,\tau_2}} Fv\, dx\, dy\, dt,$$

де $F(x,y,t) = f(x,y,t) - g(x,t,u(x,y,t))$, то $Au = F$. Але $F \in L^2(Q_{\tau_1,\tau_2})$. Тому $Au \in L^2(Q_{\tau_1,\tau_2})$. Розглянемо оператор θ, визначений на функціях із простору $C^1(\overline{Q}_{\tau_1,\tau_2})$ так:

$$\theta u = \begin{cases} \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}(\cdot,\cdot,\cdot) u_{x_i} \cos(\nu, x_j) \ \text{ на } \ S_{\tau_1,\tau_2}, \\ -\lambda(\cdot, 0, \cdot)\, u \ \text{ на } \ D \times \{0\} \times (\tau_1, \tau_2), \\ \lambda(\cdot, y_0, \cdot)\, u \ \text{ на } \ D \times \{y_0\} \times (\tau_1, \tau_2), \\ -u(\cdot,\cdot,\tau_1) \ \text{ на } \ \Omega_{\tau_1}, \\ u(\cdot,\cdot,\tau_2) \ \text{ на } \ \Omega_{\tau_2}, \end{cases}$$

де ν – зовнішня нормаль до S_T.

Розглянувши оператор θ на функції з U, згідно з лемою 1 матимемо рівність

$$a(u, v) = (Au, v) + \langle \theta u, \gamma v \rangle \qquad (15)$$

для довільної $v \in B_1(Q_{\tau_1,\tau_2})$.

Нехай

$\widehat{u} = u|_{t=\tau_1}$, $\widehat{u} = u|_{t=\tau_2}$, при $(x, y) \in \Omega$;

$\widehat{u} = 0$ при $(x, t) \in D \times (\tau_1, \tau_2)$, $y = y_0$;

$\widehat{u} = \lambda(\cdot, 0, \cdot)\, z$ при $(x,t) \in D \times (\tau_1, \tau_2)$, $y = 0$.

Тоді рівність (14) можемо записати у вигляді

$$a(u, v) + \langle \widehat{u}, \gamma\, v \rangle = (F, v). \qquad (16)$$

Віднімаючи від рівності (15) рівність (16), одержимо, що $\langle \theta u - \widehat{u}, v \rangle = 0$. Отже, з рівності (14) випливає, що u є узагальненим розв'язком задачі (1), (2).

Розглянемо білінійну форму $a(u, v)$ для функції v з простору $B_0(Q_{\tau_1,\tau_2})$, які належать до $C^2(\overline{Q}_{\tau_1,\tau_2})$. Тоді

$$a(u, v) = \int\limits_{Q_{\tau_1,\tau_2}} \Big[-u\, Av + \lambda_y u\, v + 2 \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \times \\ \times u_{x_i} v_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i u_{x_i} v + \sum_{i=1}^{n} b_i v_{x_i} u + \\ + 2c\, u\, v \Big]\, dx\, dy\, dt.$$

Оскільки $Au \in L^2(Q_{\tau_1,\tau_2})$, то ця формула має зміст і для функції $v = u\, e^{\mu t}$. Оператор γ можна однозначно продовжити на функції з $U(A)$. Крім того, враховуючи значення оператора θ на узагальненому розв'язку задачі (1), (2), матимемо, що

$$\langle \theta u, \gamma u \rangle = - \int\limits_{\Omega_t} u^2 e^{\mu t}\Big|_{t=\tau_1}^{t=\tau_2} dx\, dy - \\ - \int\limits_{\tau_1}^{\tau_2} \int\limits_{D} \lambda(x, 0, t) u^2(x, 0, t) e^{\mu t} dx\, dt.$$

Отже, з формули Гріна (15) випливатиме рівність

$$\int\limits_{\Omega_t} u^2 e^{\mu t}\Big|_{t=\tau_1}^{t=\tau_2} dx\, dy + \int\limits_{\tau_1}^{\tau_2} \int\limits_{D} \lambda(x, 0, t) u^2(x, 0, t) \times \\ \times e^{\mu t} dx\, dt + \int\limits_{Q_{\tau_1,\tau_2}} \big[(\lambda_y - \mu + 2c)\, u^2 + \\ + 2 \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\, u_{x_i} u_{x_j} + 2 \sum_{i=1}^{n} b_i u_{x_i} u + \\ + 2g(x,t,u)u - 2f\, u \big]\, e^{\mu t} dx\, dy\, dt = 0 \qquad (17)$$

для довільних $\{\tau_1, \tau_2, \mu\} \subset \mathbb{R}$, $\tau_1 < \tau_2 \le T$.

Доведемо тепер єдиність узагальненого розв'язку задачі (1), (2). Нехай маємо два узагальнені розв'язки u_1, u_2 цієї задачі та $u = u_1 - u_2$. Тоді аналогічно (16) одержимо рівність

$$\int\limits_{\Omega_t} u^2 e^{\mu t}\Big|_{t=\tau_1}^{t=\tau_2} dx\, dy + \int\limits_{\tau_1}^{\tau_2} \int\limits_{D} \lambda(x, 0, t) u^2(x, 0, t) \times$$

$$\times e^{\mu t} dx\, dt + \int\limits_{Q_{\tau_1,\tau_2}} \Big[(\lambda_y - \mu + 2c)\, u^2 + 2 \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \times$$

$$\times\ u_{x_i} u_{x_j} + 2 \sum_{i=1}^{n} b_i u_{x_i} u + 2(g(x,t,u_1) -$$

$$-g(x,t,u_2))u\Big]\ e^{\mu t} dx\, dy\, dt = 0 \qquad (18)$$

правильну для довільних $\{\tau_1, \tau_2, \mu\} \subset \mathbb{R}$, $\tau_1 < \tau_2 \leq T$.

Виберемо μ з умови: $\lambda_1 + 2c_0 - \frac{b_0}{2a_0} = \mu$.

Тоді, враховуючи умови (Λ), (A), (B), (C), (G) й оцінюючи доданки (18), аналогічно як і інтеграли $J_1, ..., J_5$, одержимо

$$\int\limits_{\Omega_t} u^2 e^{\mu t}\Big|_{t=\tau_1}^{t=\tau_2} dx\, dy \leqslant 0. \qquad (19)$$

Оскільки $\lim\limits_{t\to-\infty} \int\limits_{\Omega_t} u^2\, e^{\mu\, t} dx\, dy = 0$, то з (19) одержимо, що $u_1 = u_2$ майже всюди в Q_T, що й завершує доведення теореми.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Гихман И.И., Скороход А.В.* Введение в теорию случайных процессов. — М., 1977. — 568 с.

2. *Флеминг У., Ришел Р.* Оптимальное управление детерминированными и стохастическими системами. — М., 1978. — 316 с.

3. *Дронь В.С., Івасишен С.Д.* Властивості фундаментальних розв'язків і теореми єдиності розв'язків задачі Коші для одного класу ультрапараболічних рівнянь // Укр. мат. журн. — 1998. — **50**, N 11. — С. 1482—1496.

4. *Івасишен С.Д., Тичинська Л.М., Ейдельман С.Д.* Фундаментальні розв'язки задачі Коші для одного класу ультрапараболічних рівнянь другого порядку // Доп. АН УРСР. Сер. А. Фіз.-мат. та техн. науки.— 1990.— N 5.— С. 6-8.

5. *Эйдельман С.Д., Малицкая А.П.* О фундаментальных решениях и стабилизации решения задачи Коши для одного класса вырождающихся параболических уравнений // Дифференц. уравн.— 1975.— **11**, N 7.—С. 1316—1331.

6. *Возняк О.Г., Івасишен С.Д.* Фундаментальні розв'язки задачі Коші для одного класу вироджених параболічних рівнянь та їх застосування // Доп. НАН України. — 1996.— N 10.— С. 11—16.

7. *Городецкий В.В., Житарюк И.В.* Стабилизация решений задачи Коши для одного класса вырождающихся параболических уравнений в пространствах обобщенных функций// Нелинейн. граничн. задачи. — 1993.— N 5.— С. 31—36.

8. *Орлова С.А.* О первой краевой задаче для прямо и обратно ультрапараболического уравнения // Сиб. мат. журн.— 1990.— **31**, N 9. — С. 211—215.

9. *Паскалев Г.П.* Об исследовании одной краевой задачи для ультрапараболического уравнения с постоянными коэффициентами вариационным методом // Дифференц. уравн.— 1992.— **28**, N 9.— С.1640—1642.

10. *Пятков С.Г.* Разрешимость краевых задач для одного ультрапараболического уравнения // Неклаcические уравнения и уравнения смешаного типа.- Новосиб.— 1990.— С. 182—197.

11. *Терсенов С.А.* О краевых задачах для одного класса ультрапараболических уравнений и их приложения // Мат. сб.— 1987.— **133(175)**– С. 539 - 555.

12. *Lascialfari F., Morbidelli D.* A boundary value problem for a class of quasilinear ultraparabolic equations // Commun. Part. Diff. Equat.— 1998.— **23**, N 5,6. — P. 847—868.

13. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач.— М., 1972.— 588 с.

14. *Процах Н.П.* Мішана задача для нелінійного ультрапараболічного рівняння // Наук. вісник. Чернів. ун-ту: Зб. наук. пр. Математика.—2002. — Вип.134. — С.97—103.

15. *Лавренюк С.П., Процах Н.П.* Мішана задача для ультрапараболічного рівняння в необмеженій області // Укр. мат. журн.— 2002.— **54**, N 8.— С. 1053—1066.

16. *Балабушенко Т.М., Івасишен С.Д.* Крайові задачі Фур'є для рівняння Колмогорова дифузійного процесу Уленбека-Орнштейна з виродженням// Наук. вісник Чернівецького ун-ту: Зб. наук. пр. Математика. — 1999. — Вип. 46. — С. 5—12.

17. *Балабушенко Т.М., Івасишен С.Д.* Крайова задача Діріхле без початкової умови для рівняння Колмогорова дифузійного процесу Уленбека-Орнштейна з виродженням // Дослідження математичних моделей: Зб. наук. пр. – К.; Ін-т математики НАН України. — 1997. — С. 21—29.

18. *Лавренюк С.П., Процах Н.П.* Задача Фур'є для ультрапараболічного рівняння // Нелин. граничн. задачи.—2002.— N 12.— С. 128—139.

19. *Обэн Ж.-П.* Приближенное решение эллиптических краевых задач.—М., —1977. — 384 с.

20. *Барабаш Г.М., Лавренюк С.П., Процах Н.П.* Мішана задача для напівлінійного ультрапараболічного рівняння// Мат. методи і фіз.-мех. поля. — 2002. — **45**, N 4. — С. 27—34.

Надійшла до редколегії 28.12.2004