УДК 519.21

©2005 р. С.В. Антонюк, І.В. Юрченко

Чернівецький національний університет ім. Ю.Федьковича, Чернівці

ЕКСПОНЕНЦІАЛЬНА СТІЙКІСТЬ У СЕРЕДНЬОМУ КВАДРАТИЧНОМУ СТОХАСТИЧНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-ФУНКЦІОНАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ЗІ ВСІЄЮ ПЕРЕДІСТОРІЄЮ

Досліджена експоненціальна стійкість у середньому квадратичному розв'язків стохастичних диференціально-функціональних рівнянь з необмеженою післядією.

The exponential stability in the mean square is investigated for the solutions of stochastic functional differential equations with infinite delay.

Вступ. Питання стійкості в середньому квадратичному тривіального розв'язку систем стохастичних функціонально-диференціальних рівнянь з пуассонівськими збуреннями у випадку скінченної післядії розглядалися в працях [1—2]. Аналогічні дослідження для випадку нескінченної післядії були проведені в праці [3] для детермінованих функціонально-диференціальних систем. Деякі аспекти теорії стійкості стохастичних функціонально-диференціальних систем із нескінченною післядією розглядалися в [4—8]. Існування l-го моменту сильного розв'язку стохастичних інтегро-диференціальних рівнянь Іто-Вольтерра зі всією передісторією було доведено в праці [9].

У даній роботі розглядається питання експоненціальної стійкості в середньому квадратичному розв'язків стохастичних диференціально-функціональних рівнянь з необмеженою післядією.

1. Необхідна та достатня умови експоненціальної стійкості в середньому квадратичному. Нехай задано ймовірнісний простір $(\Omega, F, \mathbb{P})$ з потоком мінімальних σ-алгебр $\{F_t, t \geq 0\}$, $F_t \subset F$; $\mathbb{R}^n$ — дійсний n-вимірний евклідів простір; $\mathbb{D} \equiv \mathbb{D}((-\infty, 0], \mathbb{R}^n)$ — простір Скорохода функцій $\varphi(\theta) \subset \mathbb{R}^n$, які визначені на $(-\infty, 0]$, мають у кожній точці області визначення скінченну лівосторонню границю та неперервні справа, при цьому при $\theta \to -\infty$ також існує границя. Випадковий процес $\{x(t) \equiv x(t,\omega)\} \subset \mathbb{R}^n$ визначається для $t \geq 0$ за допомогою стохастичного диференціально-функціонального рівняння (СДФР) Іто-Скорохода

$$dx(t) = a(t, x^t)dt + b(t, x^t)dw(t) + \int_{\mathbb{U}} g(t, x^t, u)\tilde{\nu}(dt, du), \tag{1}$$

$$x(t) = \varphi(t), \quad \forall\, t \in (-\infty, 0], \tag{2}$$

де $\varphi \in \mathbb{D}$; $x^t \equiv \{x(t+\theta), -\infty < \theta \leq 0\}$; $\{w(t) \equiv w(t,\omega)\} \subset \mathbb{R}^1$ — одновимірний вінерів процес; $\tilde{\nu}(t, H) \equiv \nu(t, H) - t\Pi(H)$ — центрована пуассонова міра в $\mathbb{R}^1$ з параметром $t\Pi(H) \equiv M\{\nu(t, H)\}$, $H \subset \mathbb{R}^1$, при цьому $\{w(t)\}$ та $\{\tilde{\nu}(t, H)\}$ незалежні та F_t-вимірні при $t > 0$; $\mathbb{U} \subset \mathbb{R}^1$.

Нехай a, b та g — лінійні функціонали при кожному $t \geq 0$, які визначені відповідно на $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{D}$, $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{D}$ та $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{D} \times \mathbb{R}^1$. Простір $\mathbb{D}$ будемо вважати метричним з метрикою Скорохода функцій без розривів другого роду [1].

Для дослідження поведінки випадкових процесів $\{x(t)\} \subset \mathbb{R}^n$ без розривів другого роду розглядається метрика, яка породжена напівнормою

$$\|\varphi\|_0 \equiv \left\{ \int_{-\infty}^{0} |\varphi(\theta)|^2\, k(d\theta) \right\}^{1/2},$$

де $k(\bullet)$ — деяка скінченна міра, визначена на борельових множинах на півпрямій $(-\infty,0]$; $k(-\infty)=k_1<\infty$.

Означення. *Під розв'язком СДФР (1) з початковою умовою (2) будемо розуміти сепарабельний процес $\{x\left(t\right)\}\subset\mathbb{R}^n$, визначений при $t\in(-\infty,0]$ за допомогою співвідношення (2), вимірний відносно σ-алгебри $F_t\times L_t$ (L_t — σ-алгебра борелевих множин на $(-\infty,t]$) і такий, що при довільному $t\geq 0$ задовольняє стохастичне інтегральне рівняння*

$$x(t)=\varphi(0)+\int\limits_0^t a(s,x^s)ds+\int\limits_0^t b(s,x^s)dw(s)+$$

$$+\int\limits_0^t\int\limits_{\mathbb{U}} g(s,x^s,u)\tilde{\nu}(ds,du)$$

майже скрізь.

Будемо припускати, що $a,b:\mathbb{R}_+\times\mathbb{D}\to\mathbb{R}^n$, $g:\mathbb{R}_+\times\mathbb{D}\times\mathbb{R}^1\to\mathbb{R}^n$, вимірні за сукупністю змінних та задовольняють для довільного $t\geq 0$ умови

$$\left|a\left(t,\varphi\right)\right|^2+\left|b\left(t,\varphi\right)\right|^2+\int\limits_{\mathbb{U}}\left|g(t,\varphi,u)\right|^2\Pi\left(du\right)\leq$$

$$\leq L\int\limits_{-\infty}^0\left(1+\left|\varphi\left(\theta\right)\right|^2\right)dk\left(\theta\right);$$

$$\left|a\left(t\varphi\right)-a\left(t,\psi\right)\right|^2+\left|b\left(t,\varphi\right)-b\left(t,\psi\right)\right|^2+$$

$$+\int\limits_{\mathbb{U}}\left|g(t,\varphi,u)-g\left(t,\psi,u\right)\right|^2\Pi\left(du\right)\leq$$

$$\leq L\int\limits_{-\infty}^0\left(\left|\varphi\left(\theta\right)-\psi\left(\theta\right)\right|^2\right)dk\left(\theta\right),$$

де $L>0$ — стала, $\Pi(du)\equiv\dfrac{du}{|u|^2}$.

Тоді згідно з [8, Теорема 2.1, с.22; 9] існує єдиний розв'язок задачі (1), (2) з точністю до стохастичної еквівалентності, який задовольняє наступні нерівності:

$$M\left\{\sup_{0\leq s\leq T}\left|x(s)\right|^2/F_0\right\}\leq A\left(1+\|\varphi\|_0^2\right)$$

$$M\left\{\sup_{t\leq s\leq t+h}\left|x(s)-x(t)\right|^2/F_0\right\}\leq$$

$$\leq B\left(1+\|\varphi\|_0^2\right)h,$$

де $A>0$, $B>0$ — сталі, які залежать тільки від $T>0$, L і k_1.

Уведемо такі норми:

$$\|\varphi\|_{\mathbb{D}}^2\equiv(|\varphi(0)|^2+\|\varphi\|_0^2)^{1/2},$$

$$\|\varphi\|_1^2\equiv\sup_{-\infty\leq t\leq 0}M\{|\varphi(t)|^2\},$$

$$\|\varphi\|_2^2\equiv M\{\|\varphi\|_{\mathbb{D}}^2\}.$$

Лема 1. *Нехай $a(t,\varphi)$, $b(t,\varphi)$, $g(t,\varphi,u)$ неперервні за $t\geq 0$ при довільному $\varphi\in\mathcal{L}$ і задовольняють посилену умову Ліпшиця*

$$|a(t,\varphi)-a(t,\psi)|^2+|b(t,\varphi)-b(t,\psi)|^2+$$

$$+\int|g(t,\varphi,u)-g(t,\psi,u)|^2\Pi(du)\leq$$

$$\leq L\int\limits_{-\infty}^0|\varphi(s)-\psi(s)|^2\mu(ds),\qquad(3)$$

де μ — одинична додатна міра на $(-\infty,0]$; $\mathcal{L}$ — простір випадкових процесів, не залежних від $\mathcal{B}(w,[0,\infty))\times\mathcal{B}(\tilde{\nu},[0,\infty))$ і таких, що існує $M\{\|\varphi\|_{\mathbb{D}}^2\}$.

Тоді існує така стала $K\equiv K(L)$, що при всіх $0\leq s\leq t$ справджується нерівність

$$\sup_{-\infty<s\leq 0}|x^t(s,\varphi)|^2\leq e^{K(t-s)}\sup_{-\infty<\theta<0}|\varphi(\theta)|^2.\qquad(4)$$

Доведення. Зробимо в рівнянні (1) заміну Іто. Будемо вважати, що $y(t)=|x(t)|^2$. Тоді одержимо, що

$$d|x(t)|^2=[(2x(t),a(t,x^t))+|b(t,x^t)|^2+$$

$$+\int\limits_{\mathbb{U}}|g(t,x^t,u)|^2\Pi(du)]dt+$$

$$+2(x(t),b(t,x^t))dw(t)+$$

$$+2\int\limits_{\mathbb{U}}(x(t),g(t,x^t,u))\tilde{\nu}(du,dt)+$$

$$+\int\limits_{\mathbb{U}}|g(t,x^t,u)|^2\tilde{\nu}(du,dt),$$

де $(x(t), y(t))$ — скалярний добуток.

Запишемо одержане співвідношення в інтегральній формі: $y(t+\theta) = |\varphi(\theta)|^2$ при $t+\theta \le s$, $-\infty \le \theta \le 0$,

$$y(t+\theta) = |x(s)|^2 + 2\int_s^{t+\theta} (x(\tau), a(\tau, x^\tau))d\tau +$$

$$+\int_s^{t+\theta} |b(\tau, x^\tau)|^2 d\tau + \int_s^{t+\theta}\int_{\mathbb{U}} |g(\tau, x^\tau, u)|^2 \Pi(du)d\tau +$$

$$+2\int_s^{t+\theta} (x(\tau), b(\tau, x^\tau))dw(\tau) +$$

$$+2\int_s^{t+\theta}\int_{\mathbb{U}} (x(\tau), g(\tau, x^\tau, u))\tilde{\nu}(du, d\tau) +$$

$$+\int_s^{t+\theta}\int_{\mathbb{U}} |g(\tau, x(\tau), u)|^2 \tilde{\nu}(du, d\tau), \quad t+\theta > s.$$

Застосовуючи до лівої та правої частин одержаної рівності операцію математичного сподівання та враховуючи властивості стохастичних інтегралів, маємо

$$\sup_{-\infty\le\theta\le 0} M\{|x(t+\theta, s, \varphi)|^2\} \le$$

$$\le \sup_{-\infty\le\theta\le 0} M\{|\varphi(s+\theta)|^2\} +$$

$$+2\int_s^t M\{(x(\tau), a(\tau, x^\tau))\}d\tau +$$

$$+\int_s^t M\{|b(\tau, x^\tau)|^2\}d\tau +$$

$$+\int_s^t\int_{\mathbb{U}} M\{|g(\tau, x^\tau, u)|^2\}\Pi(du)d\tau.$$

Використовуючи умову Ліпшиця (3), легко одержати оцінки

$$\int_s^t M\{|b(\tau, x^\tau)|^2\}d\tau \le L\int_s^t \|x(\tau+\theta, s, \varphi)\|_1^2 d\tau,$$

$$\int_s^t\int_{\mathbb{U}} M\{|g(\tau, x^\tau, u)|^2\}\Pi(du)d\tau \le$$

$$\le L\int_s^t \|x(\tau+\theta, s, \varphi)\|_1^2 d\tau,$$

$$\int_s^t M\{(x(\tau), a(\tau, x^\tau))\}d\tau \le$$

$$\le 2L^{1/2}\int_s^t \|x(\tau+\theta, s, \varphi)\|_1^2 d\tau.$$

Тоді

$$\|x^t(s, \varphi)\|_1^2 \le \|\varphi\|_1^2 + K\int_s^t \|x^\tau(s, \varphi)\|_1^2 d\tau.$$

Використовуючи нерівність Гронуолла-Беллмана, одержимо твердження леми 1.

Для $p = 0, 1, 2, ...$ визначимо функціонали від випадкових процесів φ, заданих на відрізках $J_{p,h} = [-(p+1)h, 0]$:

$$v_p(\varphi) \equiv \sup_{\theta\in J_{p,h}} M\{|\varphi(\theta)|^2\};$$

$$v_{p,A}(\varphi) \equiv \sup_{\theta\in J_{p,h}} M\{e^{2A\theta}|\varphi(\theta)|^2\}.$$

Рівняння (1) можна розв'язувати в просторі $\mathbb{D}([-(p+1)h, 0], \mathbb{R}^n)$, якщо вважати, що післядія дорівнює $(p+1)h$, $p = 0, 1, 2, ...$ Початкову задачу будемо розглядати в точці $s + ph$. Позначимо побудований таким чином розв'язок (1) $x^t_{(p+1)}$, тобто покладемо $x^t_{(p+1)}(s+ph, \varphi) \equiv \{x(t+\theta, s, \varphi), -(p+1)h \le \theta \le 0\}$.

Теорема 1. *Нехай коефіцієнти рівняння (1), (2) задовольняють умови існування та єдиності сильного розв'язку. Тоді необхідною та достатньою умовою експоненціальної стійкості в середньому квадратичному тривіального розв'язку (1), (2) є існування $A > 0$, цілого $p \ge 0$ та $\delta_0 > 0$ таких, що для всіх $s \ge 0$ та $\varphi \in V^{(1)}_{\delta_0}$ виконується нерівність*

$$\lim_{\tau\to 0}\sup_{\tau} \frac{1}{\tau}[v_{p,A}(x^{s+ph+\tau}_{(p+1)}(s, \varphi)) -$$

$$-v_{p,A}(x^{s+ph}_{(p+1)}(s,\varphi))] \le -2Av_{p,A}(x^{s+ph}_{(p+1)}(s,\varphi)). \tag{5}$$

Доведення. *Достатність.* Легко перевірити, що для $y(t)=e^{At}x(t)$ справджується рівність $e^{2At}v_{p,A}(x^t)=v_p(y^t)$. Якщо позначити через $v'_{p,A}(x^{s+ph}_{(p+1)}x(s,\varphi))$ ліву частину (5), то виконується нерівність

$$v'_p(y^{s+ph}_{(p+1)}(s,\varphi)) \le 0. \tag{6}$$

Через $\{y(t,s,\varphi)\}$ позначено розв'язок стохастичного рівняння, одержаного з (1), (2) заміною $y(t)=e^{At}x(t)$.

Нехай тепер існують константи A,p,δ_0, вказані в умові теореми, і виконується (5). Покажемо, що для довільного $s\ge 0$, $t_1\ge s+ph$ і $t\ge t_1$ виконується нерівність

$$M\{|x(t,t_1,x^{t_1}_{(p+1)}x(s,\varphi))|^2\} \le Ce^{-2A(t-t_1)}\|\varphi\|_1^2. \tag{7}$$

Позначимо $\psi=x^{t_1-ph}_{(p+1)}(s,\varphi)$, тоді з урахуванням незростання $v_p(y^t)$ одержимо

$$M\{|x(t,t_1-ph,\psi)|^2\} =$$
$$= e^{-2At}M\{|y(t,t_1-ph,\tilde\psi)|^2\} \le$$
$$\le e^{-2At}v_p(y^t(t_1-ph,\tilde\psi)) \le$$
$$\le e^{-2At}v_p(y^{t_1}_{(p+1)}(t_1-ph,\tilde\psi)),$$

де $\tilde\psi(\theta)=e^{2A(t_1-ph+\theta)}x(t_1-ph+\theta,s,\varphi)$.

Далі, використовуючи лему 1, запишемо

$$v_p(y^{t_1}_{(p+1)}(t_1-ph,\tilde\psi)) =$$
$$= e^{2A}\sup_{\theta\in J_{p,h}} M\{|x^{t_1}_{(p+1)}x(t_1-ph,\psi)|^2\} \le$$
$$\le e^{2At_1}e^{Kph}\|\psi\|_1^2.$$

Отже, внаслідок марковської властивості розширеного розв'язку для всіх $t\ge t_1$ маємо, що

$$M\{|x(t,t_1,x^{t_1}_{(p+1)}(s,\varphi))|^2\} \le$$
$$\le e^{-2A(t-t_1)}e^{Kph}\|x^{t_1-ph}_{(p+1)}(s,\varphi)\|_1^2. \tag{8}$$

Застосовуючи до $M\{|x(t_1-ph+\theta,s,\varphi)|^2\}$ нерівність (4) при $t_1\ge s+ph$ ($t_1-ph\le s+ph$), одержимо, що

$$\|x^{t_1-ph}_{(p+1)}(s,\varphi)\|_1^2 \le e^{K(t_1-ph-s)}\|\varphi\|_1^2 \le e^{Kph}\|\varphi\|_1^2. \tag{9}$$

Тоді, підставляючи (9) у (8), легко записати нерівність при $t_1=s+ph$

$$M\{|x(t,t_1,x^{t_1}_{(p+1)}(s,\varphi))|^2\} \le$$
$$\le e^{-2A(t-t_1)}e^{2Kph}e^{2Aph}\|\varphi\|_1^2 \le Ce^{-2A(t-s)}\|\varphi\|_1^2,$$

де $C=e^{2Kph}$. З нерівності (4) випливає, що всі розв'язки, побудовані за $\varphi\in V^{(1)}_\delta$ при $\delta=\sqrt{\delta_0}e^{-\frac12}Kpr$, не вийдуть за межі області $V^{(1)}_{\delta_0}$ при довільному $t\in[s,s+ph]$. Дійсно,

$$\|x^t_{(p+1)}(s,\varphi)\|_1^2 \le e^{K(t-s)}\|\varphi\|_1^2 \le$$
$$\le e^{K(t-s)}\delta_0e^{-Kpr} \le \delta_0.$$

Це завершує доведення достатності.

Необхідність. Нехай тривіальний розв'язок (1) експоненціально стійкий в середньому квадратичному. За означенням стійкості існують такі $B>0$, $\lambda>0$ та $\delta>0$, що для всіх $\varphi\in V^{(1)}_\delta$ і $s\ge 0$ виконується нерівність

$$M\{|x(t,s,\varphi)|^2\} \le Be^{-2\lambda(t-s)}\|\varphi\|_1^2$$

при $t>s$. Виберемо $A\in(0,\lambda)$. Як і при доведенні достатності, разом із $x(t,s,\varphi)$ розглядаємо $y(t,s,\varphi)$ і, враховуючи, що $x^s(s,\varphi)=\varphi(\theta)$, для $M\{|y(t,s,y^s(s,\varphi))|^2\}$ отримуємо оцінку

$$M\{|y(t,s,y^s(s,\varphi))|^2\} = e^{2A}M\{|x(t,s,\varphi)|^2\} \le$$
$$\le e^{2At}Be^{-2\lambda(t-s)}\|x^s(s,\varphi)\|_1^2 \le$$
$$\le e^{2At}Be^{-2\lambda(t-s)}e^{-2As}e^{2Ah}\|y^s(s,\varphi)\|_1^2 \le$$
$$\le e^{-2\alpha(t-s)}Be^{2Ah}\|y^s(s,\varphi)\|_1^2.$$

Звідси випливає, що $v_p(y^{s+ph}(s,\varphi))$ не зростає, тобто $v'_p(y^{s+ph}(s,\varphi))<0$. При доведенні достатності була показана еквівалентність цієї нерівності до нерівності (5), що й доводить необхідність.

2. Експоненціальна стійкість СДФР при постійно діючих випадкових збуреннях. Розглянемо стохастичне диференціально-функціональне рівняння

$$dy(t) = [a(t,y^t)+a_1(t,y^t)]dt+$$
$$+[b(t,y^t)+b_1(t,y^t)]dw(t)+$$

$$+\int\limits_{\mathbb{U}}[g(t,y^t,u)+g_1(t,y^t,u)]\tilde{\nu}(du,dt), \quad (10)$$

$$y(t)=\varphi(t,\omega), \quad -\infty\le t\le 0, \quad (11)$$

де $\{y(t)\equiv y(t,\omega)\}\in\mathbb{R}^n$, a, a_1, b, b_1: $\mathbb{R}_+\times\mathbb{D}\to\mathbb{R}^n$; g, $g_1:\mathbb{R}_+\times\mathbb{D}\times\mathbb{U}\to\mathbb{R}^n$; $\{w(t)\}\subset\mathbb{R}^1$ — винерів процес; $\mathbb{U}\subset\mathbb{R}^1$; $\tilde{\nu}(t,H)=\nu(t,H)-\Pi(t,H)$, при цьому $\{w(t)\}$, $\{\tilde{\nu}(t,H)\}$ незалежні.

Теорема 2. *Нехай:*

1) оператори a,a_1,b,b_1,g,g_1 задовольняють умови існування та єдиності сильного розв'язку (10), (11);

2) виконується нерівність

$$|a_1(t,\varphi)|^2+|b_1(t,\varphi)|^2+\int\limits_{\mathbb{U}}|g_1(t,\varphi,u)|^2\Pi(du)\le$$

$$\le L_1\int\limits_{-\infty}^{0}|\varphi(\theta)|^2\mu_1(d\theta), \quad (12)$$

де стала L_1 досить мала;

3) тривіальний розв'язок (1), (2) експоненціально стійкий у середньому квадратичному.

Тоді тривіальний розв'язок (10), (11) експоненціально стійкий у середньому квадратичному.

Доведення. Представимо розв'язок (10), (11) у такому вигляді:

$$y(t,s,\varphi)=x(t,s,\varphi)+[y(t,s,\varphi)-x(t,s,\varphi)]. \quad (13)$$

Очевидно, що різниця $y(t+\theta,s,\varphi)-x(t+\theta,s,\varphi)$ задовольняє таке рівняння:

$$y^t(s,\varphi)-x^t(s,\varphi)=$$

$$=\int\limits_s^{t+\theta}[a(\tau,y^\tau)+a_1(\tau,y^\tau)-a(\tau,x^\tau)-a_1(\tau,x^\tau)]d\tau+$$

$$+\int\limits_s^{t+\theta}[b(\tau,y^\tau)+b_1(\tau,y^\tau)-$$

$$-b(\tau,x^\tau)-b_1(\tau,x^\tau)]dw(\tau)+$$

$$+\int\limits_s^{t+\theta}\int\limits_{\mathbb{U}}[g(\tau,y^\tau,u)+g_1(\tau,y^\tau,u)-$$

$$-g(\tau,x^\tau,u)-g_1(\tau,x^\tau,u)]\tilde{\nu}(du,d\tau)+$$

$$+\int\limits_s^{t+\theta}a_1(\tau,x^\tau)d\tau+\int\limits_s^{t+\theta}b_1(\tau,x^\tau)dw(\tau)+$$

$$+\int\limits_s^{t+\theta}\int\limits_{\mathbb{U}}g_1(\tau,x^\tau,u)\tilde{\nu}(du,d\tau)$$

при $\theta\in(-\infty,0]$, $t+\theta>s$. Якщо $t+\theta\le s$, тоді $y^t(s,\varphi)-x^t(s,\varphi)=0$.

Підносячи обидві частини одержаної рівності до квадрату, застосовуючи операцію математичного сподівання та враховуючи властивості стохастичних інтегралів, умову Ліпшиця та нерівність (12), при $t+\theta=s+T$ $(T>0)$ одержимо

$$M\{|y^{s+T}(s,\varphi)-x^{s+T}(s,\varphi)|^2\}\le$$

$$\le C_1\int\limits_s^{s+T}\int\limits_{-\infty}^{0}M\{|y^\tau(s,\varphi)-x^\tau(s,\varphi)|^2\}\mu(d\theta)d\tau+$$

$$+L_1C_2\int\limits_s^{s+T}\int\limits_{-\infty}^{0}M\{|x^\tau(s,\varphi)|^2\}\mu_1(d\theta)d\tau,$$

де $C_1=9(T+1)L$, $C_2=9(T+1)$.

Одержану нерівність запишемо в термінах норми $\|\cdot\|_1$:

$$\|y^{s+T}(s,\varphi)-x^{s+T}(s,\varphi)\|_1^2\le$$

$$\le C_1\int\limits_s^{s+T}\|y^\tau(s,\varphi)-x^\tau(s,\varphi)\|_1^2d\tau+$$

$$+L_1C_2\int\limits_s^{s+T}\|x^\tau(s,\varphi)\|_1^2d\tau.$$

З умови 3) теореми 2

$$M\{|x(s+t,s,\varphi)|^2\}\le Be^{-\lambda t}\|\varphi\|_1^2$$

при всіх $s \geq 0$ и $\varphi \in V_\delta^{(1)}$. Тоді, використовуючи нерівність Гронуолла-Беллмана, отримуємо

$$\|y^{s+T}(s,\varphi) - x^{s+T}(s,\varphi)\|_1^2 \leq C_3 L_1 BT\delta +$$

$$+C_1 \int\limits_s^{s+T} \|y^\tau(s,\varphi) - x^\tau(s,\varphi)\|_1^2 d\tau \leq$$

$$\leq C_3 L_1 TB\delta e^{TC_1},$$

де $C_3 = C_2 e^{\lambda h}$.

Оцінимо $y(t,s,\varphi)$ з урахуванням представлення (13)

$$\|y^{s+T}(s,\varphi)\|_1^2 \leq 2\|x^{s+T}x(s,\varphi)\|_1^2 +$$

$$+2\|y^{s+T}(s,\varphi) - x^{s+T}(s,\varphi)\|_1^2 \leq$$

$$\leq 2(Be^{-\lambda T}\delta + L_1 C_3 TB\delta e^{TC_1}).$$

Виберемо T настільки великим, що $Be^{-\lambda T} < \frac{1}{12}$ і $L_1 \leq (12 C_3 TBe^{TC_1})^{-1}$. Тоді $\|y^{s+T}(x,\varphi)\|_1^2 \leq \delta/3$. Використовуючи марковську властивість розв'язку (10), одержимо

$$\|y^{s+2T}(s+T, y^{s+T}(s,\varphi))\|_1^2 < \frac{\delta}{3^2}.$$

Далі за індукцією

$$\|y^{s+mT}(s+(m-1)T, y^{s+(m-1)T}(s,\varphi))\|_1^2 < \frac{\delta}{3^m}$$

при довільному $m \geq 1$.

За лемою 1 можна записати

$$\sup_{-\infty \leq t \leq T} M\{|y(s+t,s,\varphi)|^2\} \leq e^{KT}\|\varphi\|_1^2.$$

Тому

$$\sup_{0 \leq t \leq T} M\{|y(s+mT+t, s+mT, y^{s+mT}(s,\varphi)|^2\} \leq$$

$$\leq e^{KT}\|y^{s+mT}(s,\varphi)\|_1^2 \leq e^{KT}\frac{\delta}{3^m} < e^{KT-m}\delta.$$

Ця нерівність дозволяє одержати експоненціальну стійкість у середньому квадратичному тривіального розв'язку (10), (11).

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Гихман И.И., Скороход А.В.* Стохастические дифференциальные уравнения и их применение.— К.: Наук. думка, 1982.— 567 с.

2. *Свердан М.Л., Царков Є.Ф., Ясинський В.К.* Стійкість у стохастичному моделюванні складних динамічних систем.— Снятин: Над Прутом, 1996.— 448 с.

3. *Азбелев Н.В., Рахматулина Л.Ф.* Функционально-дифференциальные уравнения // Дифференц. уравнения.— 1978.— **24**, N 5.— С.771—797.

4. *Ясинский И.В., Ясинский В.К.* Лекции по теории стохастического моделирования. Ч.4. Стохастические динамические системы с бесконечным последействием.— Черновцы: Зеленая Буковина, 2000.— 160 с.

5. *Ясинський В.К., Антонюк С.В.* Поведінка другого моменту розв'язків стохастичних диференціально-функціональних рівнянь з пуассонівськими збуреннями // Науковий вісник Чернівецького університету. Вип. 160. Математика.— Чернівці: Рута, 2003.— С.111—117.

6. *Ясинский В.К., Антонюк С.В.* Устойчивость в среднем квадратическом решений стохастических дифференциально-функциональных уравнений со всей предисторией // 2nd International Conference "Aplimat" (Bratislava, February 5—7, 2003).— Bratislava, 2003.— С.725—732.

7. *Антонюк С.В., Юрченко І.В., Ясинський В.К.* Поведінка другого моменту розв'язків стохастичних функціонально-диференціальних динамічних систем з розривними траєкторіями в критичному випадку // Науковий вісник Чернівецького університету. Вип. 191—192. Математика.— Чернівці: Рута, 2004.— С.5—9.

8. *Ясинский В.К.* Стохастические дифференциально-функциональные системы со всей предысторией.— К.: ТВіМС, 2003.— 254 с.

9. *Юрченко І.В., Ясинський В.К.* Про існування l-го моменту сильного розв'язку стохастичних інтегро-диференціальних рівнянь Іто-Вольтерра // Доповіді НАН України.— 2004.— № 7.— С.33—39.

Стаття надійшла до редколегії 1.02.2005