УДК 517.927

©2004 р. Б.А. Шувар, С.М. Ментинський

Національний університет "Львівська політехніка", м.Львів

АЛГОРИТМ ДЛЯ ДВОСТОРОННЬОЇ АПРОКСИМАЦІЇ РОЗВ'ЯЗКІВ ПЕРІОДИЧНОЇ ЗАДАЧІ КЕРУВАННЯ

Один двосторонній аналог чисельно-аналітичного методу послідовних наближень А.М.Самойленка застосований до апроксимації розв'язків періодичної задачі керування для звичайних диференціальних рівнянь з В-монотонною (за Ю.В.Покорним) правою частиною. Встановлені умови монотонності та рівномірної збіжності послідовних наближень до розв'язку задачі.

One two-sided analogue of a Samojlenko's numerical-analytical method consecutive approach is applied to approximation solution of a periodic problem of management for ordinary differential the equations with B-monotonous (for J.V.Pokorny) the right part. The conditions of monotony and uniform convergence consecutive approach to the decision of a problem where investigated.

Двосторонні ітераційні методи, теорія яких започаткована С.О.Чаплигіним, мають важливі переваги перед іншими ітераційними методами, оскільки наближення, отримані за їх допомогою, дозволяють охопити вилкою шуканий розв'язок зверху і знизу, і монотонно звужувати отриману вилку. Крім зручності апостеріорних оцінок, це дозволяє певною мірою охарактеризувати поведінку шуканого розв'язку. Практичне застосування двосторонніх методів часто обмежене через неопуклість та немонотонність відповідних операторів. В [1-3] запропоновані нові підходи до побудови двосторонніх методів для рівнянь з немонотонними та неопуклими правими частинами. При використанні цих методів для апроксимації розв'язків граничних задач слід враховувати їх специфіку, зумовлену потребою побудови операторів відповідної структури в лінеаризованих частинах алгоритмів, для чого зручно використовувати, зокрема, конструкції чисельно-аналітичного методу А.М.Самойленка [4].

Замітка присвячена побудові і дослідженню двостороннього аналогу чисельно аналітичного методу послідовних наближень А.М. Самойленка для задачі

$$x'(t) = f(t,\ x, \lambda)\,, \qquad (1)$$

$$x(0) = x(T) = x_0, \quad x_0 \in E^m,$$

де $x, f, \lambda \in E^m$, функція $f(t,\ x)$ – неперервна в області $(-\infty;\infty) \times I \times J$, $I = [a;b]$, $J = [c;d]$, періодична за t з періодом T. Використано методику дослідження двосторонніх методів із [1-3]. Структура пропонованого двостороннього алгоритму використовує поняття В-монотонності (в термінології Ю.В. Покорного [5]). Робота розширює можливості застосування двосторонніх методів до крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь. Результати роботи близькі до результатів дослідження із [6].

Записавши праву частину рівняння (1) у вигляді $f(t, x, \lambda) = h(t, x, x, \lambda, \lambda) - A\lambda$, припускаємо правдивість в області $D' = (-\infty;\infty) \times I \times I \times J \times J$, де $I = [a;b]$, $J = [c;d]$ наступних умов:

1) *функція $h(t, x, x, \lambda, \lambda)$ в області D' неперервна і періодична за t з періодом T, причому:*

$$\underline{h} \leqslant h(t, x, x, \lambda, \lambda) \leqslant \overline{h}, \qquad (3)$$

$\underline{h}, \overline{h} \in E^m$,

$$\begin{gathered} a + \tfrac{T}{4}\left(\underline{h} - \overline{h}\right) \leqslant x_0 \leqslant \\ \leqslant b - \tfrac{T}{4}\left(\underline{h} - \overline{h}\right) \\ c \leqslant A^{-1}\underline{h} \leqslant A^{-1}\overline{h} \leqslant d; \end{gathered} \qquad (4)$$

2) *A - невироджена стала матриця, для*

якої $A^{-1} \geqslant \theta$ *;*

3) *функція* $F(t,y,z)$ *є B-монотонною за змінними y та z, тобто задані матриці* $A_1(t,y,z) = \left\{a_{i,j}^{(1)}(t,y,z)\right\}$, $B_2(t,y,z) = \left\{b_{i,j}^{(2)}(t,y,z)\right\}$, $K_1(t,\eta,\mu) = \left\{k_{i,j}^{(1)}(t,\eta,\mu)\right\}$, $N_2(t,\eta,\mu) = \left\{n_{i,j}^{(2)}(t,\eta,\mu)\right\}$ $(i,j=1,2,...,m)$ *неперервних за сукупністю аргументів незростаючих за* y,η *неспадних за* z, μ *додатних при* $t\in[0,T]$, $y,z\in[a,b]$, $\eta,\mu\in[c,d]$ *дійсних функцій, для яких як для лінійних неперервних додатних щодо* $w,\omega\in \mathrm{E}^m$ *операторів* $A_1(t,y,z)w$, $B_2(t,y,z)w$, $K_1(t,\eta,\mu)\omega$, $N_2(t,\eta,\mu)\omega$ *із співвідношень* $y(t)\leqslant z(t)$ $\quad \eta\leqslant\mu$ $(t\in[0,T]$, $x,y,z\in[a,b]$, $\lambda,\eta,\mu\in[a,b])$ *випливають нерівності*

$$\begin{array}{l} -A_1(t,y,z)(z-y)- \\ -K_1(t,\eta,\mu)(\mu-\eta)\leqslant \\ \leqslant h(t,z,x,\mu,\lambda)-h(t,y,x,\mu,\lambda), \\ h(t,x,z,\lambda,\mu)-h(t,x,y,\lambda,\mu)\leqslant \\ \leqslant B_2(t,y,z)(z-y)+ \\ +N_2(t,\eta,\mu)(\mu-\eta). \end{array} \tag{5}$$

Скориставшись операторами

$$L[\varphi(t,x);\psi(t,x)] = x_0 + \left(1-\tfrac{t-t_0}{T}\right)\times$$
$$\times\int\limits_{t_0}^{t}\varphi(s,x)ds - \tfrac{t-t_0}{T}\int\limits_{t}^{t_0+T}\psi(s,x)ds \tag{6}$$

$$S[\varphi(t,x)] = T^{-1}A^{-1}\int\limits_0^T\varphi(s,y)ds, \tag{7}$$

визначимо послідовні наближення до розв'язку задачі (1),(2) за формулами

$$\begin{array}{l} y_{n+1} = L[F_1(t,y_n,z_n,\eta_n,\mu_n); \\ F_2(t,y_n,z_n,\mu_n,\eta_n)] + x_0, \\ \\ z_{n+1} = L[F_1(t,y_n,z_n,\eta_n,\mu_n); \\ F_2(t,y_n,z_n,\mu_n,\eta_n)] + x_0, \end{array} \tag{8}$$

$$\begin{array}{l} \eta_{n+1} = S[F_1(t,y_n,z_n,\eta_n,\mu_n)], \\ \\ \mu_{n+1} = S[F_2(t,y_n,z_n,\eta_n,\mu_n)], \end{array} \tag{9}$$

де

$$\begin{array}{l} F_1(t,y,z,\eta,\mu) = h(t,y,z,\eta,\mu)+ \\ +(A_1(t,y,z)+B_2(t,y,z))(y-z) \\ +(K_1(t,\eta,\mu)+N_2(t,\eta,\mu))(\eta-\mu), \\ F_2(t,y,z,\eta,\mu) = h(t,z,y,\mu,\eta)+ \\ +(A_1(t,y,z)+B_2(t,y,z))(z-y) \\ +(K_1(t,\eta,\mu)+N_2(t,\eta,\mu))(\mu-\eta). \end{array}$$

Теорема 1. *Нехай справджуються умови 1)-3) і існує хоча б один розв'язок* $\{x^*,\lambda^*\}$, $x^*\in[a;b]$, $\lambda^*\in[c;d]$ *задачі* (1), (2). *Тоді для цього розв'язку та послідовних наближень* (8), (9) *при* $n=0,1,...t\in[0,T]$ *справджуються співвідношення*

$$y_n\leqslant y_{n+1}\leqslant x^*\leqslant z_{n+1}\leqslant z_n, \tag{10}$$

$$\eta_n\leqslant\eta_{n+1}\leqslant\lambda^*\leqslant\mu_{n+1}\leqslant\mu_n, \tag{11}$$

починаючи з

$$\begin{array}{l} y_0(t) = x_0 - t\left(1-\frac{t}{T}\right)\left(\overline{h}-\underline{h}\right), \\ z_0(t) = x_0 + t\left(1-\frac{t}{T}\right)\left(\overline{h}-\underline{h}\right), \\ \eta_0 = c, \quad \mu_0 = d. \end{array} \tag{12}$$

Доведення. Умови 1), 2) та конструкція початкових наближень (12) забезпечують нерівності (eq10), (11) при $n=0$. З припущення про правдивість нерівностей (10), (11) при $n=k-1$ отримаємо

$$\begin{array}{l} x*-y_{k+1} = L[h(t,x^*,x^*,\lambda^*,\lambda^*)- \\ -h(t,y_k,z_k,\eta_k,\mu_k);h(t,x^*,x^*,\lambda^*,\lambda^*)- \\ -h(t,z_k,y_k,\mu_k,\eta_k)] - L[(A_1(t,y_k,z_k)+ \\ +B_2(t,y_k,z_k))(y_k-z_k)+(K_1(t,\eta_k,\mu_k)+ \\ +N_2(t,\eta_k,\mu_k))(\eta_k-\mu_k);(A_1(t,y_k,z_k)+ \\ +B_2(t,y_k,z_k))(z_k-y_k)+(K_1(t,\eta_k,\mu_k)+ \\ +N_2(t,\eta_k,\mu_k))(\mu_k-\eta_k)]\geqslant \\ \geqslant L[-A_1(t,y_k,x^*)(x^*-y_k) \\ -K_1(t,\eta_k,\lambda^*)(\lambda^*-\eta_k)-B_2(t,x^*,z_k)\times \\ \times(z_k-x^*)-N_2(t,\lambda^*,\mu_k)(\mu_k-\lambda^*); \\ A_1(t,x^*,z_k)(z_k-x^*)+K_1(t,\lambda^*,\mu_k)\times \\ \times(\mu_k-\lambda^*)+B_2(t,y_k,x^*)(x^*-z_k)+ \\ +N_2(t,\eta_k,\lambda^*)(\lambda^*-\eta_k)]- \\ -L[(A_1(t,y_k,z_k)+B_2(t,y_k,z_k))\times \\ \times(y_k-z_k)+(K_1(t,\eta_k,\mu_k)+ \\ +N_2(t,\eta_k,\mu_k))(\eta_k-\mu_k); \\ A_1(t,y_k,z_k)+B_2(t,y_k,z_k)(z_k-y_k)+ \\ +(K_1(t,\eta_k,\mu_k)+N_2(t,\eta_k,\mu_k))\times \\ \times(\mu_k-\eta_k)]\geqslant L[A_1(t,y_k,z_k)(z_k-x^*)+ \end{array}$$

$$+B_2(t,y_k,z_k)(x^*-y_k)+K_1(t,\eta_k,\mu_k)\times$$
$$\times(\mu_k-\lambda^*)+N_2(t,\eta_k,\mu_k)(\lambda^*-\eta_k);$$
$$A_1(t,y_k,z_k)(y_k-x^*)+B_2(t,y_k,z_k)\times$$
$$\times(x^*-z_k)+K_1(t,\eta_k,\mu_k)(\eta_k-\lambda^*)$$
$$+N_2(t,\eta_k,\mu_k)(\lambda^*-\mu_k)]\geqslant\theta.$$

Скориставшись тими ж міркуваннями одержимо нерівності

$$\begin{gathered}z_{k+1}-x^*\geqslant L\left[A_1(t,y_k,z_k)(x^*-y_k)+\right.\\ +B_2(t,y_k,z_k)(z_k-x^*)+K_1(t,\eta_k,\mu_k)\times\\ \times(\lambda^*-\eta_k)+N_2(t,\eta_k,\mu_k)(\mu_k-\lambda^*);\\ A_1(t,y_k,z_k)(x^*-z_k)+B_2(t,y_k,z_k)\times\\ (y_k-x^*)+K_1(t,\eta_k,\mu_k)(\lambda^*-\mu_k)+\\ \left.+N_2(t,\eta_k,\mu_k)(\eta_k-\lambda^*)\right]\geqslant\theta,\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}\lambda^*-\eta_{k+1}\geqslant S\left[A_1(t,y_k,z_k)(z_k-x^*)+\right.\\ +B_2(t,y_k,z_k)(x^*-y_k)+K_1(t,\eta_k,\mu_k)\times\\ \left.\times(\mu_k-\lambda^*)+N_2(t,\eta_k,\mu_k)(\lambda^*-\eta_k)\right]\geqslant\theta,\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}\mu_{k+1}-x^*\geqslant S\left[A_1(t,y_k,z_k)(x^*-y_k)+\right.\\ +B_2(t,y_k,z_k)(z_k-x^*)+K_1(t,\eta_k,\mu_k)\times\\ \left.\times(\lambda^*-\eta_k)+N_2(t,\eta_k,\mu_k)(\mu_k-\lambda^*)\right]\geqslant\theta.\end{gathered}$$

Це на підставі принципу математичної індукції доводить теорему.

Нехай, крім того, справджується припущення:

4) *задані матриці* $A_2(t,y,z)=\left\{a_{i,j}^{(2)}(t,y,z)\right\}$, $B_1(t,y,z)=\left\{b_{i,j}^{(1)}(t,y,z)\right\}$, $K_2(t,\eta,\mu)=\left\{k_{i,j}^{(2)}(t,\eta,\mu)\right\}$, $N_1(t,\eta,\mu)=\left\{n_{i,j}^{(1)}(t,\eta,\mu)\right\}$ $(i,j=1,2,...,m)$, *елементами яких є неперервні за сукупністю аргументів додатні при* $t\in[0,T]$, $y,z\in[a,b]$, $\eta,\mu\in[c,d]$ *дійсні функції і для яких як для лінійних неперервних додатних щодо* $w,\omega\in\mathrm{E}^m$ *операторів* $A_2(t,y,z)w$, $B_1(t,y,z)w$, $K_2(t,\eta,\mu)\omega$, $N_1(t,\eta,\mu)\omega$ *із співвідношень* $y(t)\leqslant z(t)$ $\eta\leqslant\mu$ $(t\in[0,T],\ x,y,z\in[a,b],\ \lambda,\eta,\mu\in[a,b])$ *випливають нерівності*

$$\begin{gathered}h(t,z,x,\mu,\lambda)-h(t,y,x,\mu,\lambda)\leqslant\\ \leqslant B_1(t,y,z)(z-y)+\\ +N_1(t,\eta,\mu)(\mu-\eta),\\ -A_2(t,y,z)(z-y)-\\ -K_2(t,\eta,\mu)(\mu-\eta)\leqslant\\ \leqslant h(t,x,z,\lambda,\mu)-h(t,x,y,\lambda,\mu).\end{gathered}\tag{13}$$

Позначимо $\tilde{Q}=\begin{pmatrix}TQ_x & TQ_\lambda\\ A^{-1}Q_x & A^{-1}Q_\lambda\end{pmatrix}$, де Q_x, Q_λ - сталі числові матриці з елементами

$$q_{ij}^{(x)}=\max_{\substack{t\in[0;T]\\ y,z\in[a;b]}}\left(2\left(a_{ij}^{(1)}(t,y,z)+\right.\right.\\ \left.+b_{ij}^{(2)}(t,y,z)\right)+a_{ij}^{(2)}(t,y,z)+\\ \left.+b_{ij}^{(1)}(t,y,z)\right),\tag{14}$$

$$q_{ij}^{(\lambda)}=\max_{\substack{t\in[0;T]\\ y,z\in[a;b]}}\left(2\left(k_{ij}^{(1)}(t,y,z)+\right.\right.\\ \left.+n_{ij}^{(2)}(t,y,z)\right)+k_{ij}^{(2)}(t,y,z)+\\ \left.+n_{ij}^{(1)}(t,y,z)\right).\tag{15}$$

Теорема 2. *Нехай справджуються умови 1)-4) і спектральний радіус* $\rho\left(\tilde{Q}\right)$ *матриці* $\tilde{Q}$ *менший за одиницю. Тоді в області* D' *задача* (1),(2) *має єдиний розв'язок* $(x^*(t),\lambda^*)$, *до якого рівномірно щодо* $t\in[0,T]$ *збігаються послідовності* $\{y_n(t),\eta_n\},\{z_n(t),\mu_n\}$, *визначені за формулами* (8), (9).

Доведення. За умовою 4) отримуємо співвідношення

$$z_{k+1}-y_{k+1}\leqslant L\left[(2(A_1(t,y_k,z_k)+\right.$$
$$+B_2(t,y_k,z_k))+A_2(t,y_k,z_k)+$$
$$B_1(t,y_k,z_k))(z_k-y_k)+$$
$$+(2(K_1(t,\eta_k,\mu_k)+N_2(t,\eta_k,\mu_k))+$$
$$+K_2(t,\eta_k,\mu_k)+N_1(t,\eta_k,\mu_k))(\mu_k-\eta_k);$$
$$(2(A_1(t,y_k,z_k)+B_2(t,y_k,z_k))+$$
$$+A_2(t,y_k,z_k)+B_1(t,y_k,z_k))(y_k-z_k)+$$
$$+(2(K_1(t,\eta_k,\mu_k)+N_2(t,\eta_k,\mu_k))$$
$$\left.+K_2(t,\eta_k,\mu_k)+N_1(t,\eta_k,\mu_k))(\eta_k-\mu_k)\right]$$
$$\mu_{k+1}-\eta_{k+1}\leqslant S\left[(2(A_1(t,y_k,z_k)+\right.$$
$$+B_2(t,y_k,z_k))+A_2(t,y_k,z_k)+$$
$$+B_1(t,y_k,z_k))(z_k-y_k)+$$
$$(2(K_1(t,\eta_k,\mu_k)+N_2(t,\eta_k,\mu_k))+$$
$$+K_2(t,\eta_k,\mu_k)+N_1(t,\eta_k,\mu_k))\times$$
$$\left.\times(\eta_k-\mu_k)\right],$$

з яких можна одержати (див. також [6]) оцінки

$$\begin{aligned}&\|z_{k+1}(t)-y_{k+1}(t)\|\leqslant TQ_x\times\\&\times\|z_k(t)-y_k(t)\|+TQ_\lambda\|\mu_k-\eta_k\|,\\&\|\mu_{k+1}-\eta_{k+1}\|\leqslant A^{-1}Q_x\times\\&\times\|z_k(t)-y_k(t)\|+A^{-1}Q_\lambda\|\mu_k-\eta_k\|\end{aligned}\tag{16}$$

тобто,

$$\begin{aligned}&\begin{pmatrix}\|z_{n+1}(t)-y_{n+1}(t)\|\\\|\mu_{n+1}-\eta_{n+1}\|\end{pmatrix}\leqslant\\&\leqslant\tilde{Q}\begin{pmatrix}\|z_n(t)-y_n(t)\|\\\|\mu_n-\eta_n\|\end{pmatrix}.\end{aligned}\tag{17}$$

Звідси при $\rho\left(\tilde{Q}\right)<1$ випливає збіжність ітерацій (8), (9) до розв'язку задачі (1), (2).

Нехай в (5) $A_1(t,y,z)\equiv\Theta$, $B_2(t,y,z)\equiv\Theta$, $K_1(t,\eta,\mu)\equiv\Theta$, $N_2(t,\eta,\mu)\equiv\Theta$, ($\Theta$ – нуль-матриця). Тоді з (8), (9) отримаємо двосторонній алгоритм

$$\begin{aligned}&y_{n+1}=L\left[h\left(t,y_n,z_n,\eta_n,\mu_n\right);\right.\\&\left.h\left(t,z_n,y_n,\mu_n,\eta_n\right)\right]+x_0,\\&z_{n+1}=L\left[h\left(t,z_n,y_n,\mu_n,\eta_n\right);\right.\\&\left.h\left(t,y_n,z_n,\eta_n,\mu_n\right)\right]+x_0,\end{aligned}\tag{18}$$

$$\begin{aligned}&\eta_{n+1}=S\left[h\left(t,y_n,z_n,\eta_n,\mu_n\right)\right],\\&\mu_{n+1}=S\left[h\left(t,z_n,y_n,\mu_n,\eta_n\right)\right],\end{aligned}\tag{19}$$

досліджений в [6]. Умови збіжності алгоритму (18), (19) отримані в [6] можна одержати прийнявши за оператори $A_2(t,y,z)$, $B_1(t,y,z)$, $K_2(t,\eta,\mu)$, $N_1(t,\eta,\mu)$ в (13) константи Ліпшиця функції $h(t,y,z,\eta,\mu)$ за змінними y, z, η, μ відповідно.

Отримані результати можна поширити на випадок, коли умова $A^{-1}\geqslant\theta$ не виконується, якщо для побудови ітераційного процесу скористатись оператором

$$\begin{aligned}&S^*\left[\varphi(t,x);\psi(t,x)\right]=\\&=T^{-1}\left(A_+^{-1}\int_0^T\varphi(s,x)\,ds-\right.\\&\left.-A_-^{-1}\int_0^T\psi(s,x)\,ds\right)\end{aligned}$$

де матриці A_+^{-1}, A_-^{-1} такі, що $A^{-1}=A_+^{-1}+A_-^{-1}$, $A_+^{-1}\geqslant\theta$, $A_-^{-1}\geqslant\theta$.

Досліджений двосторонній алгоритм придатний для реалізації за допомогою сучасних обчислювальних засобів. Його можна також адаптувати до двосторонньої апроксимації розв'язків інших крайових задач для диференціальних рівнянь з параметрами.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Курпель М.С.* Про деякі модифікації методу С.О. Чаплигіна наближеного інтегрування диференціальних рівнянь // Доп. АН УРСР. Сер. А. — 1969. — N4. — С.303—306.

2. *Курпель Н.С., Шувар Б.А.* Двусторонние операторные неравенства и их применения. — К.: Наук. думка, 1980. — 268 с.

3. *Шувар Б.А.* Двусторонние итерационные методы решения нелинейных уравнений в полуупорядоченных пространствах // Второй симпозиум по методам решения нелинейных уравнений и задач оптимизации, Т. 1, Талин: Ин-т кибернетики АН ЭССР. — 1981. — С.68—73.

4. *Самойленко А.М., Ронто Н.И.* Численно-аналитические методы в теории краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений. — К.: Наук. думка, 1992. — 277 с.

5. *Покорный Ю.В.* О B-положительных и B-монотонных операторах // Проблемы математического анализа сложных систем. Воронеж: Изд-во Воронеж. ун-та, 1967. — Вып 1. — С.58—63.

6. *Собкович Р. И.* Двусторонний метод исследования некоторых краевых задач с параметрами: Препринт 81.52 // К.: Ин-т математики АН УССР, 1981. — 36 с.

Надійшла до редколегії 12.03.2004