УДК 517.91/943

©2004 р. П.Ф. Самусенко

Національний педагогічний університет імені М.П. Драгоманова, м.Київ

АСИМПТОТИЧНЕ ІНТЕГРУВАННЯ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНИХ СЛАБО НЕЛІНІЙНИХ СИСТЕМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ВИРОДЖЕННЯМ

Використовуючи метод примежових функцій, у роботі побудовано розв'язок задачі Коші сингулярно збуреної системи диференціальних рівнянь з виродженням.

Using the method of boundary functions, the solution of the initial-value problem of the singularly pertubed systems of differential equations with degeneration is constructed.

Розглянемо початкову задачу

$$\varepsilon B(t)\frac{dx}{dt} = A(t,\varepsilon)\,x + \varepsilon f(x,t,\varepsilon), \qquad (1)$$

$$x(0,\varepsilon) = x_0, \qquad (2)$$

де $A(t,\varepsilon)$, $B(t)$ – квадратні матриці n-го порядку, причому

$$A(t,\varepsilon) = \sum_{s=0}^{\nu} \varepsilon^s A_s(t),\ \nu < \infty,$$

x, $f(x,t,\varepsilon)$ – n-вимірні вектор-функції, $\varepsilon \in (0;\varepsilon_0]$ – малий параметр, $t \in [0;T]$.

Якщо $\det B(t) \neq 0$, $t \in [0;T]$, то для побудови асимптотичного розв'язку задачі (1), (2) можна скористатись методом примежових функцій [1,2]. Сингулярно збурені слабо нелінійні системи з неособливою матрицею $B(t,\varepsilon)$ біля похідної досліджувались в роботі [3]. При цьому розглядався випадок, коли матриця $B_0(t)$ на відрізку $[0;T]$ тотожно вироджена і гранична в'язка матриць задовольняє умову "ранг-степінь".

У даній роботі побудовано асимптотичний розв'язок задачі (1), (2) у більш загальному випадку.

Отже, нехай виконуються такі умови:
1) елементи матриць $A_s(t)$, $s = \overline{0,\nu}$, та $B(t)$ нескінченно диференційовні на відрізку $[0;T]$;
2) вектор-функція $f(x,t,\varepsilon)$ нескінченно диференційовна за всіма змінними для всіх $||x|| \le a$, $t \in [0;T]$, $\varepsilon \in [0;\varepsilon_0]$;
3) $\det B(t) \equiv 0$, $t \in [0;T]$;
4) в'язка матриць $A_0(t) - \lambda B(t)$ на відрізку $[0;T]$ регулярна, має $n-1$ простих "скінченних" елементарних дільників і один "нескінченний" елементарний дільник;
5) $Re\,\lambda_i(t) < 0$, $i = \overline{1,n-1}$, $t \in [0;T]$, де $\lambda_i(t)$ – власні значення матриці $A_0(t)$ відносно $B(t)$.

Власні вектори матриці $A_0(t)$ відносно $B(t)$ позначимо через $\varphi_1(t), ..., \varphi_{n-1}(t)$, а власний вектор матриці $B(t)$, який відповідає її нульовому власному значенню – через $\widetilde{\varphi}(t)$.

Нехай вектор-функції $\psi_i(t)$, $i = \overline{1,n-1}$ – елементи нуль-простору матриць $(A_0(t) - \lambda_i(t)B(t))^*$, а $\widetilde{\psi}(t)$ – елемент нуль-простору матриці $B^*(t)$. При цьому вектори $\psi_i(t)$, $i = \overline{1,n-1}$ та $\widetilde{\psi}(t)$ можна визначити так, щоб виконувалися рівності

$$(B(t)\varphi_i(t), \psi_j(t)) = \delta_{ij},\ i,j = \overline{1,n-1},$$

$$(A_0(t)\widetilde{\varphi}(t), \widetilde{\psi}(t)) = 1,$$

де δ_{ij} – символ Кронекера.

Зауважимо, що вектори $\varphi_1(t)$, ..., $\varphi_{n-1}(t)$, $\widetilde{\varphi}(t)$ та $\psi_1(t)$, ..., $\psi_{n-1}(t)$, $\widetilde{\psi}(t)$ – лінійно незалежні на відрізку $[0;T]$.

Як відомо [5], система

$$\varepsilon B(t)\frac{dy}{dt} = A(t,\varepsilon)\,y$$

має $n-1$ формальних лінійно незалежних

розв'язків вигляду

$$y_i(t,\varepsilon) = u_i(t,\varepsilon)\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^t \lambda_i(t,\varepsilon)dt\right) \qquad (3)$$

$i=\overline{1,n-1}$, де $u_i(t,\varepsilon)$ – n-вимірні вектори, а $\lambda_i(t,\varepsilon)$ – скалярні функції, причому

$$u_i(t,\varepsilon) = \varphi_i(t) + \sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^k u_k^{(i)}(t),$$
$$\lambda_i(t,\varepsilon) = \lambda_i(t) + \sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^k \lambda_k^{(i)}(t),\ i=\overline{1,n-1}. \qquad (4)$$

Розв'язок задачі (1), (2) шукатимемо у вигляді

$$x(t,\varepsilon) = \overline{x}(t,\varepsilon) + \Pi x(\tau,\varepsilon), \qquad (5)$$

де $\overline{x}(t,\varepsilon) = \sum\limits_{i=0}^{\infty}\varepsilon^i\overline{x}_i(t)$ – регулярний ряд, а $\Pi x(\tau,\varepsilon) = \sum\limits_{i=0}^{\infty}\varepsilon^i \Pi_i x(\tau)$ – примежовий ряд, в якому $\tau = \dfrac{t}{\varepsilon}$.

Вектор $f(x,t,\varepsilon)$ запишемо наступним чином:

$$f(x,t,\varepsilon) = \overline{f}(t,\varepsilon) + \Pi f(\tau,\varepsilon),$$

де

$$\overline{f}(t,\varepsilon) = f(\overline{x}(t,\varepsilon),t,\varepsilon),$$
$$\Pi f(\tau,\varepsilon) = f(\overline{x}(\varepsilon\tau,\varepsilon)+\Pi x(\tau,\varepsilon),\varepsilon\tau,\varepsilon)-$$
$$-f(\overline{x}(\varepsilon\tau,\varepsilon),\varepsilon\tau,\varepsilon)$$

і розкладемо вектор-функції $\overline{f}(t,\varepsilon)$ та $\Pi f(\tau,\varepsilon)$ в ряд Тейлора за степенями ε:

$$\overline{f}(t,\varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^i\overline{f}_i(t),\ \Pi f(\tau,\varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^i\Pi_i f(\tau).$$

Тут, зокрема,

$$\overline{f}_0(t) = f(\overline{x}_0(t),t,0),$$
$$\overline{f}_1(t) = ||f'_x(\overline{x}_0(t),t,0)||\overline{x}_1(t) + f'_\varepsilon(\overline{x}_0(t),t,0),$$
$$\Pi_0 f(\tau) = f(\overline{x}_0(0)+\Pi_0 x(\tau),0,0) - f(\overline{x}_0(0),0,0),$$
$$\Pi_1 f(\tau) = ||f'_x(\overline{x}_0(0)+\Pi_0x(\tau),0,0)||\left(\overline{x}_1(0)+\right.$$
$$\left.+\tau\frac{d\overline{x}_0(0)}{dt}+\Pi_1 x(\tau)\right)+\tau f'_t(\overline{x}_0(0)+\Pi_0x(\tau),0,0)+$$
$$+f'_\varepsilon(\overline{x}_0(0)+\Pi_0x(\tau),0,0)-$$
$$-||f'_x(\overline{x}_0(0),0,0)||\left(\overline{x}_1(0)+\tau\frac{d\overline{x}_0(0)}{dt}\right)-$$
$$-\tau f'_t(x_0(0),0,0) - f'_\varepsilon(\overline{x}_0(0),0,0),$$

де символом $||f'_x||$ позначена квадратна матриця n-го порядку, складена з вектор-стовпців $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$, $i=\overline{1,n}$.

У такому ж вигляді запишемо матриці $A(t,\varepsilon)$ та $B(t)$:

$$\Pi A(\tau,\varepsilon) = A(\varepsilon\tau,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{k}\varepsilon^k\frac{1}{s!}\frac{d^sA_{k-s}(0)}{dt^s}\,\tau^s,$$

$$\Pi B(\tau,\varepsilon) = B(\varepsilon\tau) = \sum_{s=0}^{\infty}\varepsilon^s\frac{1}{s!}\frac{d^sB(0)}{dt^s}\,\tau^s.$$

Підставимо ряд (5) у систему (1) і запишемо окремо вирази, що залежать від t і τ:

$$\varepsilon B(t)\frac{d\overline{x}}{dt} = A(t,\varepsilon)\,\overline{x} + \varepsilon\overline{f}(t,\varepsilon), \qquad (6)$$

$$B(\varepsilon\tau)\frac{d\Pi x}{d\tau} = A(\varepsilon\tau,\varepsilon)\,\Pi x + \varepsilon\Pi f(\tau,\varepsilon). \qquad (7)$$

У співвідношеннях (6), (7) прирівняємо коефіцієнти біля однакових степенів ε. Зокрема, при ε^0 матимемо:

$$A_0(t)\,\overline{x}_0(t) = 0,$$
$$B(0)\frac{d\Pi_0x}{d\tau} = A_0(0)\,\Pi_0 x. \qquad (8)$$

З умови 5) випливає неособливість матриці $A_0(t)$, $t\in[0;T]$. Тому

$$\overline{x}_0(t)\equiv 0,\ t\in[0;T].$$

Розглянемо тепер систему (8). Оскільки в'язка $A_0(0)-\lambda B(0)$ регулярна, то існують неособливі матриці P та Q такі, що

$$PA(0)Q = \Omega,\ PB(0)Q = H,$$

де

$$\Omega = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & W\end{pmatrix},\ H = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & E_{n-1}\end{pmatrix},$$

E_{n-1} – одинична матриці $n-1$-го порядку, $W = diag\{\lambda_1(0), ..., \lambda_{n-1}(0)\}$.

Нехай $\Pi_0 x(\tau) = Q\,\Pi Q_0 x(\tau)$. Тоді система (8) набуде вигляду

$$H\frac{d\Pi Q_0 x}{d\tau} = \Omega\,\Pi Q_0 x \qquad (9)$$

або

$$0 = \Pi Q_{01} x,$$

$$\frac{d\Pi Q_{02} x}{d\tau} = W\,\Pi Q_{02} x,$$

де $\Pi Q_{01} x$ – перша компонента вектора $\Pi Q_0 x$, а $\Pi Q_{02} x$ – $n-1$-вимірний вектор, що містить решту компонент вектора $\Pi Q_0 x$.

Таким чином,

$$\Pi Q_{01} x(\tau) \equiv 0,\ \Pi Q_{02} x(\tau) = e^{W\tau} c_1,$$

c_1 – $n-1$-вимірний вектор довільних сталих.

З початкової умови (2) знаходимо

$$\overline{x}_0(0) + \Pi_0 x(0) = x_0,$$

тобто

$$Q\,\Pi Q_0 x(0) = x_0. \qquad (10^1)$$

Надалі припускатимемо існування вектора c_1, для якого виконується рівність (10^1).

З умови 5) випливає, що

$$\Pi_0 x(\tau) \to 0,\ \tau \to \infty.$$

Прирівнявши в (6), (7) коефіцієнти біля ε^1, матимемо

$$A_0(t)\,\overline{x}_1(t) = -\overline{f}_0(t),$$

$$B(0)\frac{d\Pi_1 x}{d\tau} = A_0(0)\,\Pi_1 x + g_1(\tau), \qquad (11)$$

де

$$g_1(\tau) = \Pi_0 f(\tau) + A_1(0)\,\Pi_0 x(\tau) +$$

$$+\tau\frac{dA_0(0)}{dt}\,\Pi_0 x(\tau) - \tau\frac{dB(0)}{dt}\frac{d\Pi_0 x(\tau)}{d\tau}.$$

Звідси

$$\overline{x}_1(t) = -A_0^{-1}(t)\,\overline{f}_0(t).$$

Використовуючи заміну

$$\Pi_1 x(\tau) = Q\,\Pi Q_1 x(\tau),$$

розщепимо систему (11) на дві системи

$$0 = \Pi Q_{11} x + \overline{g}_{11}(\tau),$$

$$\frac{d\Pi Q_{12} x}{d\tau} = W\,\Pi Q_{12} x + \overline{g}_{12}(\tau),$$

де

$$\overline{g}_1(\tau) = P g_1(\tau),\ \overline{g}_1(\tau) = \begin{pmatrix}\overline{g}_{11}(\tau)\\ \overline{g}_{12}(\tau)\end{pmatrix},$$

$$\Pi Q_1 x = \begin{pmatrix}\Pi Q_{11} x\\ \Pi Q_{12} x\end{pmatrix}.$$

Тоді

$$\Pi Q_{11} x(\tau) = -\overline{g}_{11}(\tau)$$

$$\Pi Q_{12} x(\tau) = e^{W\tau} c_2 + \int\limits_0^\tau e^{W(\tau-s)}\overline{g}_{12}(s)ds,$$

c_2 – $n-1$-вимірний вектор довільних сталих.

Припустимо, що вектор c_2 можна підібрати так, щоб

$$\overline{x}_1(0) + \Pi_1 x(0) = 0,$$

тобто

$$Q\,\Pi Q_1 x(0) = A_0^{-1}(0)\,\overline{f}(0). \qquad (10^2)$$

Легко бачити [1], що

$$\Pi_1 x(\tau) \to 0,\ \tau \to \infty.$$

Отже, ми визначили $\overline{x}_0(t)$, $\overline{x}_1(t)$, $\Pi_0 x(\tau)$ та $\Pi_1 x(\tau)$. Таким чином, можна знайти і решту членів рядів $\overline{x}(t,\varepsilon)$ та $\Pi x(\tau,\varepsilon)$.

Умову аналогічну (10^2) на k-му кроці позначатимемо через (10^k).

Покажемо, що побудований формальний розв'язок є рівномірним асимптотичним розвиненням точного розв'язку задачі (1), (2) на відрізку $[0;T]$.

Для цього в системі (1) зробимо заміну

$$x(t,\varepsilon) = y(t,\varepsilon) + x_m(t,\varepsilon),$$

де

$$x_m(t,\varepsilon) = \sum_{i=0}^m \varepsilon^i(\overline{x}_i(t) + \Pi_i x(\tau)),$$

а $y(t,\varepsilon)$ – нова невідома вектор-функція. Матимемо

$$\varepsilon B(t)\frac{dy}{dt} = A(t,\varepsilon)\, y + g(y,t,\varepsilon), \qquad (12)$$

$g(y,t,\varepsilon) = A(t,\varepsilon)x_m + \varepsilon f(y + x_m, t, \varepsilon) - \varepsilon B(t)\dfrac{dx_m}{dt}$.

Доведемо існування розв'язку системи (12), що задовольняє початкову умову

$$y(0,\varepsilon) = 0. \qquad (13)$$

Для цього спочатку зазначимо, що [1]

$$||g(0,t,\varepsilon)|| = O(\varepsilon^{m+1}). \qquad (14)$$

Складемо $(n \times n)$-вимірні матриці

$$Q(t,\varepsilon) = [U_m(t,\varepsilon), \widetilde{\varphi}(t)],\ P(t) = [\Psi(t), \widetilde{\psi}(t)]^*,$$

де $U_m(t,\varepsilon)$ – прямокутна $n \times (n-1)$-матриця, складена з виразів (4), шляхом їх обривання на m-му члені:

$$U_m(t,\varepsilon) = [u_1^{(m)}(t,\varepsilon), ..., u_{n-1}^{(m)}(t,\varepsilon)],$$

$$\Psi(t) = [\psi_1(t), ..., \psi_{n-1}(t)].$$

Виконавши в системі (12) заміну

$$y(t,\varepsilon) = Q(t,\varepsilon)\, z(t,\varepsilon)$$

та помноживши обидві її частини зліва на $P(t)$, дістанемо

$$\varepsilon P(t)\, B(t)\, Q(t,\varepsilon)\frac{dz}{dt} = P(t)\, L(t,\varepsilon)\, Q(t,\varepsilon)\, z +$$

$$+ P(t)\, g(Q(t,\varepsilon)z, t, \varepsilon),$$

де

$$L(t,\varepsilon) = A(t,\varepsilon) - \varepsilon B(t)\frac{d}{dt}.$$

Звідси

$$\varepsilon \begin{pmatrix} \Psi^* B U_m & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{dz}{dt} = \begin{pmatrix} \Psi^* L U_m & \Psi^* L \widetilde{\varphi} \\ \widetilde{\psi}^* L U_m & (L\widetilde{\varphi}, \widetilde{\psi}) \end{pmatrix} z +$$

$$+ Pg(Qz, t, \varepsilon).$$

Оскільки

$$\Psi^*(t) B(t) U_m(t,0) =$$

$$= ||(B(t)\varphi_i(t), \psi_j(t))||_1^{n-1} = E_{n-1}$$

і

$$(L(t,0)\widetilde{\varphi}(t), \widetilde{\psi}(t)) =$$

$$= (A_0(t)\widetilde{\varphi}(t), \widetilde{\psi}(t)) = 1,\ t \in [0;T]$$

[5], то елементи матриці $(\Psi^*(t)B(t)U_m(t,\varepsilon))^{-1}$ та функція $(L(t,\varepsilon)\widetilde{\varphi}(t), \widetilde{\psi}(t))^{-1}$ рівномірно обмежені на відрізку $[0;T]$.

А тому остання система набуде вигляду

$$\varepsilon \begin{pmatrix} E_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{dz}{dt} =$$

$$= \begin{pmatrix} (\Psi^* B U_m)^{-1} \Psi^* L U_m & (\Psi^* B U_m)^{-1} \Psi^* L \widetilde{\varphi} \\ (L\widetilde{\varphi}, \widetilde{\psi})^{-1} \widetilde{\psi}^* L U_m & 1 \end{pmatrix} z +$$

$$+ \begin{pmatrix} (\Psi^* B U_m)^{-1} & 0 \\ 0 & (L\widetilde{\varphi}, \widetilde{\psi})^{-1} \end{pmatrix} Pg(Qz, t, \varepsilon). \qquad (15)$$

Нехай $z = colon(z_1, z_2)$, z_1 – $(n-1)$-вимірний вектор, координатами якого є перші $n-1$ координат вектора z; z_2 – n-та координата вектора z. Тоді систему (15) можна записати так:

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{dz_1}{dt} &= (\Psi^* B U_m)^{-1} \Psi^* L U_m z_1 + \\ &+ (\Psi^* B U_m)^{-1} \Psi^* L \widetilde{\varphi} z_2 + \\ &+ (\Psi^* B U_m)^{-1} q_1(z,t,\varepsilon), \\ 0 &= (L\widetilde{\varphi}, \widetilde{\psi})^{-1} \widetilde{\psi}^* L U_m z_1 + z_2 + \\ &+ (L\widetilde{\varphi}, \widetilde{\psi})^{-1} q_2(z,t,\varepsilon), \end{aligned} \qquad (16)$$

де

$$q(z,t,\varepsilon) = Pg(Qz,t,\varepsilon),$$

$$q(z,t,\varepsilon) = colon(q_1(z,t,\varepsilon), q_2(z,t,\varepsilon)),$$

$q_1(z,t,\varepsilon)$ – $(n-1)$-вимірний вектор, а $q_2(z,t,\varepsilon)$ – n-та координата вектора $q(z,t,\varepsilon)$.

Оскільки [5]

$$L(t,\varepsilon)\, U_m(t,\varepsilon) = B(t)\, U_m(t,\varepsilon)\, \Lambda_m(t,\varepsilon) +$$

$$+ \varepsilon^{m+1} C_1(t,\varepsilon),$$

де

$$\Lambda_m(t,\varepsilon) = diag\{\lambda_1^{(m)}(t,\varepsilon), ..., \lambda_{n-1}^{(m)}(t,\varepsilon)\},$$

а $C_1(t,\varepsilon)$ – $n\times(n-1)$-вимірна матриця, рівномірно обмежена на $[0;T]$, то

$$(\Psi^* BU_m)^{-1}\Psi^* LU_m=\Lambda_m(t,\varepsilon)+\varepsilon^{m+1}C_2(t,\varepsilon),$$

$$(L\widetilde{\varphi},\widetilde{\psi})^{-1}\widetilde{\psi}^* LU_m=-\varepsilon^{m+1}c(t,\varepsilon).$$

Тут $C_2(t,\varepsilon)$ – квадратна матриця $(n-1)$-го порядку, а $c(t,\varepsilon)$ – $(n-1)$-вимірний вектор-рядок.

Таким чином, система (16) набуде вигляду

$$\varepsilon\frac{dz_1}{dt}=(\Lambda_m+\varepsilon^{m+1}C_2)z_1+(\Psi^* BU_m)^{-1}\Psi^* L\widetilde{\varphi}z_2+$$

$$+(\Psi^* BU_m)^{-1}q_1(z,t,\varepsilon), \tag{17}$$

$$z_2=\varepsilon^{m+1}c(t,\varepsilon)z_1-(L\widetilde{\varphi},\widetilde{\psi})^{-1}q_2(z,t,\varepsilon). \tag{18}$$

З побудови функції $q(z,t,\varepsilon)$ випливає, що існує стала $K>0$ така, що

$$||q(\overline{z},t,\varepsilon)-q(\overline{\overline{z}},t,\varepsilon)||\le K\varepsilon\,||\overline{z}-\overline{\overline{z}}|| \tag{19}$$

для всіх $||\overline{z}||\le a$, $||\overline{\overline{z}}||\le a$, $0\le\varepsilon\le\varepsilon_0$, $t\in[0;T]$.

Запишемо систему (17), (18) наступним чином

$$z_1(t,\varepsilon)=\int\limits_0^t\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_\tau^t\Lambda_m(\sigma,\varepsilon)d\sigma\right)\Big(\varepsilon^m\Big(C_2+$$

$$+(\Psi^* BU_m)^{-1}\Psi^* L\widetilde{\varphi}c\Big)z_1+$$

$$+\frac{1}{\varepsilon}(\Psi^* BU_m)^{-1}q_1(z,\tau,\varepsilon)-$$

$$-\frac{1}{\varepsilon}(\Psi^* BU_m)^{-1}\Psi^* L\widetilde{\varphi}(L\widetilde{\varphi},\widetilde{\psi})^{-1}q_2(z,\tau,\varepsilon)\Big)d\tau\equiv$$

$$\equiv\varphi_1(z,t,\varepsilon), \tag{20}$$

$$z_2(t,\varepsilon)=\varepsilon^{m+1}c(t,\varepsilon)z_1-(L\widetilde{\varphi},\widetilde{\psi})^{-1}q_2(z,t,\varepsilon)\equiv$$

$$\equiv\varphi_2(z,t,\varepsilon). \tag{21}$$

Розв'яжемо систему (20), (21) методом послідовних наближень. Для цього покладемо

$$z^{(0)}(t,\varepsilon)=0,$$

$$z_1^{(k)}(t,\varepsilon)=\varphi_1(z^{(k-1)}(t,\varepsilon),t,\varepsilon),$$

$$z_2^{(k)}(t,\varepsilon)=\varphi_2(z^{(k-1)}(t,\varepsilon),t,\varepsilon),\ k=1,2,...$$

Зазначимо, що з умови 5) випливає існування сталої $R<0$ для якої правильні нерівності

$$Re\,\lambda_i(t)\le R,\ i=\overline{1,n-1}.$$

А тому

$$z^{(1)}(t,\varepsilon)=O\left(\varepsilon^{m+1}\right).$$

Використовуючи нерівність (19) із системи (20), (21) дістаємо

$$||z_1^{(k+1)}(t,\varepsilon)-z_1^{(k)}(t,\varepsilon)||\le$$

$$\le M_1\int\limits_0^t e^{\frac{1}{\varepsilon}R(t-\tau)}\Big(\varepsilon^m\Big(||z_1^{(k)}(\tau,\varepsilon)-z_1^{(k-1)}(\tau,\varepsilon)||+$$

$$+||z_1^{(k)}(\tau,\varepsilon)-z_1^{(k-1)}(\tau,\varepsilon)||+$$

$$+||z_2^{(k)}(\tau,\varepsilon)-z_2^{(k-1)}(\tau,\varepsilon)||\Big)\Big)d\tau.$$

А тому

$$||z_i^{(k+1)}(t,\varepsilon)-z_i^{(k)}(t,\varepsilon)||\le$$

$$\le M\varepsilon\max_{t\in[0;T]}((\varepsilon^m+1)||z_1^{(k)}(t,\varepsilon)-z_1^{(k-1)}(t,\varepsilon)||+$$

$$+||z_2^{(k)}(t,\varepsilon)-z_2^{(k-1)}(t,\varepsilon)||),\ i=1,2,$$

якщо

$$||z^{(k)}(t,\varepsilon)||\le a,\ ||z^{(k-1)}(t,\varepsilon)||\le a. \tag{22}$$

Позначимо через

$$D_{k+1}=\max_{t\in[0;T]}((1+\varepsilon^m)||z_1^{(k+1)}(t,\varepsilon)-z_1^{(k)}(t,\varepsilon)||+$$

$$+||z_2^{(k+1)}(t,\varepsilon)-z_2^{(k)}(t,\varepsilon)||)$$

[1].

Легко бачити, що

$$D_{k+1}\le M\varepsilon(2+\varepsilon^m)D_k.$$

Тоді для малих ε_0

$$M\varepsilon(2+\varepsilon^m)\le\frac{1}{2}.$$

Отже,

$$D_{k+1}\le\frac{1}{2}D_k. \tag{23}$$

Покажемо, що нерівності (22), а тому і (23) виконуються для всіх натуральних k. Справді, число ε_0 можна взяти таким, щоб

$$||z^{(1)}(t,\varepsilon)|| \leq a$$

і

$$D_1 = \max_{t\in[0;T]}((1+\varepsilon^m)||z_1^{(1)}(t,\varepsilon)||+$$
$$+||z_2^{(1)}(t,\varepsilon)||) \leq \frac{a}{2}.$$

Тоді нерівність (23) буде правильною для $k=1$. Припустимо, що (23) виконується для $k=1,2,...,n-1$. Отже,

$$D_n \leq \frac{1}{2}D_{n-1} \leq \frac{1}{4}D_{n-2} \leq ... \leq \frac{1}{2^{n-1}}D_1.$$

Звідси випливає, що

$$||z^{(n)}|| \leq ||z^{(n)}-z^{(n-1)}||+||z^{(n-1)}-z^{(n-2)}||+...+$$
$$+||z^{(2)}-z^{(1)}||+||z^{(1)}|| \leq$$
$$\leq D_n + D_{n-1} + ... + D_1 \leq$$
$$\leq \left(\frac{1}{2^{n-1}}+\frac{1}{2^{n-2}}+...+1\right) D_1 \leq 2D_1 \leq a$$

для всіх $t\in[0;T]$, $\varepsilon\in(0;\varepsilon_0]$.

Тому, згідно з принципом математичної індукції нерівність (22) правильна для всіх натуральних k.

З нерівності (23) випливає, що послідовні наближення $z^{(k)}(t,\varepsilon)$ на відрізку $[0;T]$ збігаються рівномірно коли $k\to\infty$, тобто

$$\lim_{k\to\infty} z^{(k)}(t,\varepsilon) = z(t,\varepsilon).$$

Нехай для деякого $m\geq\nu$ правильна рівність

$$\sum_{s=m}^{\infty}\varepsilon^{s-m}\frac{\partial^s f(x_0,0,0)}{\partial\varepsilon^s} - B(0)\frac{d\overline{x}_m(0)}{dt} = 0. \tag{24}$$

Тоді послідовні наближення $z^{(k)}(t,\varepsilon)$ задовольняють умову

$$z^{(k)}(0,\varepsilon)=0.$$

Справді, у цьому випадку, використовуючи умови

$$\Pi_0 x(0) = x_0$$

та

$$\overline{x}_i(0)+\Pi_i x(0) = 0,\ i=\overline{1,m}$$

можна показати, що

$$q(0,0,\varepsilon)=0.$$

Єдиність розв'язку системи (15) такого, що

$$z(0,\varepsilon)=0$$

можна довести, використовуючи доведення єдиності теореми Коші для скалярного диференціального рівняння першого порядку.

Таким чином, ми довели існування та єдиність розв'язку $y(t,\varepsilon)$ задачі (12), (13).

Теорема. *Нехай виконуються умови 1) – 5), (10^k), $k=1,2,...,m$, (24). Тоді для $m\geq\nu$ існують сталі $\varepsilon_0>0$ і $c>0$ такі, що для всіх $0<\varepsilon\leq\varepsilon_0$ на відрізку $[0;T]$ існує єдиний розв'язок $x(t,\varepsilon)$ задачі (1), (2), причому*

$$||x(t,\varepsilon)-x_m(t,\varepsilon)|| \leq c\varepsilon^{m+1}.$$

Аналогічно можна побудувати розв'язок задачі Коші і для нелінійних систем диференціальних рівнянь вигляду

$$\varepsilon B(t)\frac{dx}{dt} = A(t,\varepsilon)\,x + f(x,t,\varepsilon).$$

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.* Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. — М.: Наука, 1973. — 272 с.

2. *Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.* Сингулярно возмущенные уравнения в критических случаях. — М.: Изд-во Моск. унив., 1978. — 107 с.

3. *Яковець В.П.* Асимптотичне інтегрування сингулярно збурених систем диференціальних рівнянь з виродженням: Автореф. дис. ... док. фіз.-мат. наук. — К., 1992. — 32 с.

4. *Самойленко А.М., Шкіль М.І., Яковець В.П.* Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженнями. — К.: Вища шк., 2000. — 294 с.

5. *Яковець В.П., Акименко А.М.* Про періодичні розв'язки вироджених сингулярно збурених лінійних систем диференціальних рівнянь// Наук. зап. НДПУ імені М.В.Гоголя. Природ. та фіз.-мат. науки. — 1998. — С. 154 – 169.

Надійшла до редколегії 30.08.2004