УДК 517.982

©2004р. М.М. Попов

Чернівецький національний університет ім.Ю.Федьковича, Чернівці

ЗНАКО-ВКЛАДЕННЯ ПРОСТОРІВ L_p ПРИ $0 < p < 1$

Основний результат замітки стверджує, що при $0 < p < 1$ кожний ненульовий лінійний неперервний оператор з L_p в довільний F-простір є знако-вкладення на деякому підпросторі $L_p(A)$, де A - вимірна підмножина $[0,1]$ додатної міри.

The main result of our note asserts that if $0 < p < 1$ then each non-zero linear continuous operator from L_p to an arbitrary F-space is a sign-embedding when restricting to a suitable $L_p(A)$-subspace with $A \subseteq [0,1]$, $\lambda(A) > 0$.

1. Вступ. Ми використовуємо загально прийняті поняття та позначення з [5]. F-простором називається повний метричний лінійний простір з метрикою, інваріантною відносно зсуву. Як і у випадку нормованого простору, через $\|x\|$ позначається відстань від елементу x до нуля. Через L_p $(0 < p < 1)$ ми позначаємо F-простір всіх класів еквівалентних вимірних функцій $x : [0,1] \to \mathbb{K}$, де $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ з $\|x\| = \int |x|^p d\lambda < \infty$ (через λ ми позначатимемо міру Лебега на $[0,1]$ та опускатимемо межі інтегрування для випадку інтегралу по цілому відрізку $[0,1]$). Домовимось також через Σ позначати борелівські підмножини $[0,1]$, через Σ^+ - борелівські підмножини $[0,1]$ додатної міри та через $\chi(A)$ - характеристичну функцію множини $A \in \Sigma$.

Нехай $< \Omega, \mathcal{F}, \mu >$ - простір із скінченною додатною зліченно-адитивною безатомною мірою. Елемент $x \in L_p(\mu)$ ми називаємо *знаком на множині* $A \in \mathcal{F}$, якщо $x^2 = \chi(A)$, і називаємо просто *знаком*, якщо він є знаком на деякій множині $A \in \mathcal{F}$. Якщо знак (на множині A) x має нульове середнє (тобто $\int x d\mu = 0$), то ми його називаємо *правильним знаком* (на множині A).

Згідно з [6,7], ін'єктивний оператор $T : L_1 \to X$ називається знако-вкладенням, якщо

$$\|Tx\| \geq \delta \|x\| \qquad (*)$$

для деякого $\delta > 0$ та всіх знаків $x \in L_1$. Ін'єктивність в цьому означенні істотна [2]. На знако-вкладення були перенесені деякі властивості ізоморфних вкладень. Так, теорема Пелчиньського про неможливість ізоморфного вкладення L_1 в банахів простір з безумовним базисом була розширена в [1] на знако-вкладення (хоча цей результат був відомий ще Розенталю в 1982 р.). З [8] випливає, що існують банахів простір Z та знако-вкладення з L_1 в Z, але Z не містить підпросторів, ізоморфних Z.

Без будь-яких змін ми розширюємо це поняття на випадок операторів з L_p, $0 < p < 1$ в довільний F-простір X: ін'єктивний оператор $T \in \mathcal{L}(L_p(\mu), X)$ називатимемо *знако-вкладенням*, якщо $(*)$ виконується для деякого $\delta > 0$ та всіх знаків $x \in L_p(\mu)$.

Згідно з [3,4], оператор $T \in \mathcal{L}(L_p(\mu), X)$ називається *вузьким*, якщо для будь-яких $A \in \mathcal{F}$ та $\varepsilon > 0$ існує правильний знак $x \in L_p(\mu)$ такий, що $\|Tx\| < \varepsilon$.

При $1 \leq p < \infty$ поняття вузького оператору виявилось цікавим і корисним при розв'язанні різних задач, але для нашого випадку $0 < p < 1$ це поняття тривіальне: єдиний вузький оператор з $L_p(\mu)$ в довільний F-простір - це нульовий оператор [4].

2. Основний результат.

Для $A \in \Sigma^+$ покладемо $\Sigma|_A = \{B \in \Sigma : B \subseteq A\}$ та через $L_p(A)$ позначимо підпростір $L_p(A) = \{x \in L_p : \ \mathrm{supp} x \subseteq A\}$. Крім того, $L_p(A)$ ми ототожнюємо з простором $L_p(\mu)$, де в ролі простору з мірою виступає $< A, \Sigma|_A, \lambda|_A >$ (через $\lambda|_A$ ми позначаємо звуження міри λ на $\Sigma|_A$).

Теорема 1. *Нехай* $0 < p < 1$ *та* X *- довільний* F*-простір. Якщо* $T : L_p \to X$ *- ненульовий лінійний неперервний оператор, то існує множина* $A \in \Sigma^+$ *така, що звуження* $T|_{L_p(A)}$ *є знако-вкладенням простору* $L_p(A)$ *в* X.

Доведення. Нехай оператор $T : L_p \to X$ такий, що, для довільної множини $A \in \Sigma^+$ звуження $T|_{L_p(A)}$ не є знако-вкладенням простору $L_p(A)$ в X. Ми доведемо, що тоді T - вузький оператор, тобто, нульовий згідно з [6]. Зафіксуємо $A \in \Sigma^+$ та $\varepsilon > 0$. Позначимо через $\mathcal{A}$ множину всіх $B \in \Sigma^+$, $B \subseteq A$, для яких існує знак x на B такий, що $\|Tx\| \leq \varepsilon\|x\|$. З леми Цорна випливає існування максимальної сім'ї попарно неперетинних елементів сім'ї $\mathcal{A}$, яку ми позначимо через $\mathcal{M}$. Оскільки кожний елемент з $\mathcal{M}$ має додатну міру, то $\mathcal{M}$ не більш, ніж зліченна: $\mathcal{M} = \{B_i\}_{i\in I}$, де I скінченна або зліченна. Покладемо $A_0 = \bigcup \mathcal{M} = \bigcup\limits_{i\in I} B_i$ і доведемо, що $A_0 \in \mathcal{A}$. Для кожного $i \in I$ виберемо знак x_i на B_i такий, що $\|Tx_i\| \leq \varepsilon\|x_i\|$. Тоді $x = \sum_{i\in I} x_i$ - є знак на A_0 та

$$\|Tx\| \leq \sum_{i\in I} \|Tx_i\| \leq \varepsilon \sum_{i\in I} \|x_i\| = \varepsilon\|x\|.$$

Отже, $A_0 \in \mathcal{A}$. Доведемо тепер, що $\lambda(A \setminus A_0) = 0$. Якщо б це було не так, то, згідно з припущенням, існують $B \in \Sigma+$, $B \subseteq A \setminus A_0$ та знак x на B такі, що $\|Tx\| \leq \varepsilon\|x\|$. Це суперечить максимальності сім'ї $\mathcal{M}$. Отже, множини A та A_0 збігаються майже скрізь (тобто, міра симетричної різниці дорівнює нулю).

Таким чином, доведено наступний факт: для довільних $A \in \Sigma+$ та $\varepsilon > 0$ існує знак x на A такий, що $\|Tx\| \leq \varepsilon$. Цього достатньо, щоб T був вузьким оператором, згідно з [3, p.54]. Теорему доведено.

Нехай $T : L_p \to X$ - ненульовий оператор. Застосовуючи метод доведення теореми 1 до доповнення до множини A, існування якої стверджує теорема, одержимо наступний факт.

Теорема 2. *Нехай* $0 < p < 1$ *та* X *- довільний* F*-простір. Якщо* $T : L_p \to X$ *- ненульовий лінійний неперервний оператор, то існує розбиття відрізка* $[0, 1]$ *на неперетинні множини додатної міри* $[0, 1] = \bigsqcup\limits_{i\in I} A_i \sqcup B$ *такі, що для кожного* $i \in I$ *звуження* $T|_{L_p(A_i)}$ *є знако-вкладення та* $T|_{L_p(B)} = 0$.

Автор вдячний В. В. Михайлюку за корисні зауваження.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Kadets V. M., Kalton N. J., Werner D.* Unconditionally convergent series of operators and narrow operators on L_1 // Preprint. — 2003.

2. *Mykhyayliyk V. V., Popov M. M.* Weak embeddings of L_1 // Houston J. Math. — 2005 (to appear).

3. *Plichko A. M., Popov M. M.* Symmetric function spaces on atomless probability spaces // Dissertations Math. (Rozpr. Mat.) — 1990. — 306. — P.1-85.

4. *Попов М. М.* Элементарное доказательство отсутствия ненулевых компактных операторов, определенных на пространстве L_p, $0 < p < 1$ // Мат. заметки. — 1990. — 47, N5. — C.154—155.

5. *Rolewicz S.* Metric Linear Spaces. — 1985. — PWN. — Warszawa. — 458p.

6. *Rosenthal H. P.* Some remarks concerning sign-embeddings // Semin. D'analyse Fonct. Univ. of Paris VII. — 1981/82.

7. *Rosenthal H. P.* Sign-embeddings of L^1 // Lect. Notes Math. — 1983. — 995. — P.155—165.

8. *Talagrand M.* The three space problem for L^1 // J. Amer. Math. Soc. — 1990. — 3, N1. — P.9—29.

Надійшла до редколегії 13.12.2004